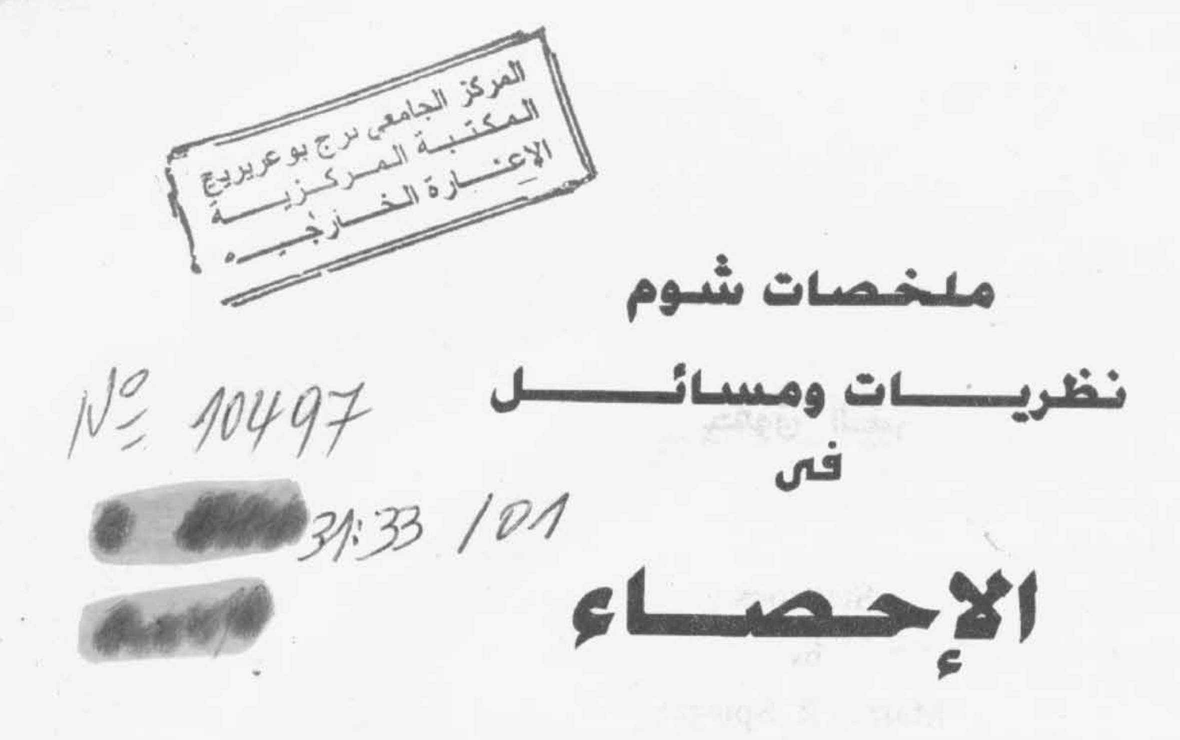


ملخصات شوم

نظريـــات ومســائـــل

فى

الإحصـــاء

تأليـــف

دكتور/ موراى ر. شبيجل

الأستاذ السابق ورئيس قسم الرياضيات

معهد رنسلير للفنون التطبيقية المتعددة ـ كونكتيكوت

ترجمـــة

دكتور/ شعبان عبد الحميد شعبان

قسم الإحصاء الرياضى ـ معهد الدراسات والبحوث الإحصائية

جامعة القاهرة ـ جمهورية مصر العربية

مراجعـــة

أستاذ دكتور/ أحمد حسن الموازينى

وكيل معهد الدراسات والبحوث الإحصائية

جامعة القاهرة ـ جمهورية مصر العربية

الدار الدولية للاستثمارات الثقافية ش.م.م.

مصر

مقدمة

يلعب علم الإحصاء أو ما يسمى أحياناً بالأساليب الإحصائية دوراً متزايداً فى جميع نواحى النشاط البشرى تقريباً . كبداية إذا أخذنا دنيا الأعمال فقط وحددنا أوجهها فإننا نجد أن أثر الإحصاء انتشر الآن إلى الزراعة والأحياء ، إدارة الأعمال ، الكيمياء ، الاتصالات ، الاقتصاد ، التربية ، الالكترونيات ، الطب ، الفيزياء ، العلوم السياسية ، علم النفس ، علم الاجتماع وعديد من المجالات الأخرى فى العلوم والهندسة .

والهدف من هذا الكتاب هو تقديم الأسس العامة للإحصاء والتى تفيد كل فرد بصرف النظر عن مجال تخصصه . وقد روعى فى تأليف الكتاب أنه يمكن استخدامه ككتاب مساعد لجميع الكتب المتداولة فى الإحصاء . « أو كنهج مقرر فى الإحصاء » وهو كذلك ذو قيمة كرجع للباحثين فى بداية استخدامهم للاحصاء فى مشاكل البحوث الخاصة بهم .

يبدأ كل فصل بعرض واضح للتعاريف والنظريات والأسس وكذلك توضيح الموضوعات الأخرى المتعلقة بهذا الفصل – يلى ذلك مجموعات متدرجة من المسائل المحلولة ومسائل إضافية وهى فى أغلب الأحيان تستخدم بيانات مأخوذة من مشاكل إحصائية حقيقية . وتساعد المسائل المحلولة فى شرح وتبسيط النظرية والتركيز على النقاط الدقيقة والتى بدون مراعاتها يشعر الطالب أنه على أرض غير صلبة كما تعطى تكرار للمبادىء الأساسية والتى تؤثر تأثيراً حيوياً فى عملية التدريس . وتتضمن المسائل المحلولة عديداً من إثبات الصيغ أما العدد الكبير من المسائل الإضافية بإجاباتها فتساعد على المراجعة الكاملة على الموضوعات الموجودة بكل فصل .

والأساس الرياضى الوحيد المطلوب لفهم الكتاب كله هو الحساب ومبادىء الجبر ويقدم الفصل الأول من الكتاب مراجعة لأهم المفاهيم الرياضية المستخدمة به ويمكن قراءته إما مع بداية المقرر أو الرجوع إليه كلما ظهرت حاجة إلى ذلك خلال الدراسة .

تعالج الأجزاء الأولى من الكتاب تحليل التوزيعات التكرارية وما يرتبط بها من مقاييس النزعة المركزية والتشتت والالتواء والتفرطح . وهذا بالطبع يؤدى إلى مناقشة مبادىء الاحتمالات وتطبيقاتها وهذا يشكل مقدمة لدراسة نظرية المعاينة . وتعالج أولا أساليب نظرية العينات ذات الحجم الكبير والتى تتضمن التوزيع الطبيعى وتطبيقاته فى التقديرات الإحصائية واختبارات الفروض والمعنوية . أما نظرية العينات ذات الحجم الصغير وتتضمن توزيع ت – أستيدنت وتوزيع كا تربيع (كا^{2}) مع تطبيقاتهما فتعالج فى الفصول التالية . وقد خصص فصل فى توفيق المنحنيات وطريقة المربعات الصغرى والتى تعد ذات أهمية فى حد ذاتها وتؤدى منطقياً إلى دراسة الموضوعات الخاصة بالارتباط والانحدار فى حالة متغيرين . الارتباط الجزئى والمتعدد الذى يتضمن أكثر من متغيرين عولج فى فصل مستقل . وفى ختام الكتاب خصص فصلان لتحليل السلاسل الزمنية والأرقام القياسية على التوالى .

وتعد الموضوعات المتضمنة فى الكتاب أكثر مما يمكن دراسته كمقرر فى المستوى الأول . والدافع لذلك هو إعطاء الكتاب مرونة أكثر فى وضعه كرجع مفيد وكذلك إثارة الاهتمام فى الموضوعات المدرجة به . عند استخدام الكتاب من الممكن تغيير ترتيب كثير من الفصول المتأخرة أو حذف بعض من هذه الفصول بدون صعوبة . وعلى سبيل المثال فإن الفصول من ١٣ إلى ١٧ يمكن تقديمها مباشرة بعد الفصل الخامس إذا كان من المطلوب دراسة الارتباط والانحدار والسلاسل الزمنية والأرقام القياسية قبل نظرية المعاينة . وكذلك فإن أغلبية الفصل السادس يمكن حذفه إذا كان الدارس لايرغب فى تخصيص وقت كبير لدراسة الاحتمالات . وفى مقرر فى المستوى الأول فإنه يمكن حذف الفصل الخامس عشر . والمبرر للترتيب الحالى للكتاب أن الاتجاه الحديث فى الدراسة هو تدريس نظرية المعاينة والاستدلال الإحصائى فى بداية المقرر بقدر الإمكان .

إننى أشكر عديداً من الوكالات الخاصة والحكومية لتعاونهم فى إمدادى بالبيانات الخاصة بالجداول . وقد ذكر المرجع الخاص بكل جدول فى مكانه المناسب خلال الكتاب وعلى وجه الخصوص فإننى مدين إلى الأستاذ « السير » رونالد أ . فيشر (زميل الجمعية الملكية ، كامبردج) . والدكتور فرانك ييتس (زميل الجمعية الملكية ، روثهامستود) وكذلك إلى السادة أصحاب شركة أوليفروبويد وأدنبرة لسماحهم باستخدام الجدول رقم (٣) من كتابهم « جداول إحصائية البحوث البيولوجية والزراعية والطبية » .

كذلك أعبر عن شكرى وامتنانى إلى العاملين بدار مشوم للنشر لروحهم الطيبة وتعاونهم لتحقيق الرغبة الشديدة لمحاولة المؤلف الوصول إلى الكمال .

م . ر . شبيجل

المحتويات

صفحة

ملحق

الفصل الأول

المتغيرات والاشكال البيانية

الاحصاء :

يختص الإحصاء بالطرق العملية لجمع وتنظيم وتلخيص وعرض وتحليل البيانات وكذلك الوصول إلى نتائج مقبولة وقرارات سليمة على ضوء هذا التحليل .

ويستخدم الاصطلاح فى معناه الضيق للتعبير عن البيانات نفسها أو الأرقام المستخرجة من هذه البيانات مثل المتوسطات . وعلى هذا نتحدث عن إحصاءات العمالة وإحصاءات الحوادث وغيرها .

المجتمع والعينة ــ الاحصاء الوصفى والاستقرائى:

عند جميع بيانات تخص خاصية من خصائص مجموعة من الأفراد أو الأشياء ، مثل أطوال أو أوزان طلبه جامعيين أو عدد الوحدات المعيبة أو غير المعيبة فى إنتاج مصنع للمسامير فى يوم معين ، فإنه قد يكون من المستحيل أو من غير العمل ملاحظة المجموعة بأكلها وخاصة إذا كانت كبيرة . وبدلا من اختبار المجموعة كلها ، والتى تسمى بالمجتمع الاحصائى أو المجموعة الكلية فإنه يمكن اختبار جزء صغير من المجموعة يسمى بالعينة .

والمجتمع يمكن أن يكون محدوداً أو غير محدود . وعلى سبيل المثال فإن المجتمع المكون من إنتاج مصنع لأنتاج المسامير فى يوم معين هو مجتمع محدود ، بينما المجتمع المكون من جميع النتائج الممكنة (صورة ، كتابة) فى قذفات متتالية لعملة هو مجتمع غير محدود .

وإذا كانت العينة ممثلة للمجتمع فإنه يمكن الحصول على نتائج مهمة عن المجتمع بتحليل بيانات هذه العينة . وفرع الإحصاء الذى يهتم بالشروط التى يجب توافرها حتى يكون هذا الاستدلال سليما يسمى بالإحصاء الاستقرائى أو الاستدلال الإحصائى .

وبما أن هذا النوع من الاستدلال لايمكن أن يكون مؤكداً فإن لغة الاحتمال تستخدم عند عرض النتائج .

أما فرع الإحصاء الذى يهدف فقط إلى وصف وتحليل مجموعة معينة وذلك دون الوصول إلى نتائج أو استدلال خاصة بالمجموعات الأكبر حجما فإنه يسمى بالاحصاء الوصفى أو الاحصاء الاستنتاجى .

قبل المضى فى استكمال دراسة الاحصاء فإننا سنقوم بمراجعة بعض المفاهيم الرياضية المهمة .

المتغيرات المتقطعة والمتصلة :

المتغير هو رمز مثل X, Y, H, x, B والذى يمكن أن يأخذ أى قيمة سبق تحديدها تسمى مجال هذا المتغير . إذا كان متغير لايأخذ سوى قيمة وحيدة فإنه يسمى ثابتاً .

المتغير الذى يمكن أن يأخذ أى قيمة بين قيمتين معينتين فيسمى متغيراً متصلا ، خلاف ذلك يسمى متغيراً متقطعاً .

مثال ١ — الرقم N لعدد الأطفال فى عائلة والذى يأخذ فقط القيم ... 0, 1, 2, 3, ولا يمكن أن يأخذ القيم 2.5 أو 3.842 ، هو متغير متقطع .

مثال ٢ — العمر A لشخص من الممكن أن يكون 62 سنه ، 63.8 سنه أو 65.8341 سنه وذلك حسب درجة الدقة فى القياس ، هو متغير متصل .

البيانات التى يمكن التعبير عنها بمتغير متقطع أو متصل تسمى بيانات متقطعة أو بيانات متصلة على التوالى . ومثال البيانات المتقطعة عدد الأطفال فى 1000 أسرة بينما أطوال 100 طالب جامعى يمكن اعتبارها كمثال على البيانات المتصلة . وبوجه عام فإن القياسات ينشأ عنها بيانات متصلة بينما العد أو الترقيم ينشأ عنها بيانات متقطعة .

قد يكون من المفيد أحياناً أن يمتد مفهوم المتغير إلى خصائص غير رقمية . فعلى سبيل المثال فإن اللون C فى قوس قزح يمكن أن يأخذ « القيم » أحمر ، برتقالى ، أصفر ، أخضر ، أزرق ، نيلى ، بنفسجى . وبشكل عام يمكن التعبير عن اللون الأحمر بالرقم ١ ، البرتقالى بالرقم ٢ ، وهكذا .

تقريب البيانات :

تقريب رقم مثل 72.8 إلى أقرب رقم عشرى هو 73 حيث أن 72.8 أقرب إلى 73 منها إلى 72 . كذلك فإن تقريب الرقم 72.8146 إلى أقرب رقم مئوى أو إلى رقمين عشريين هو 72.81 حيث أن 72.8146 أقرب إلى 72.81 منها إلى 72.82 .

فى تقريب رقم مثل 72.465 إلى أقرب رقم مئوى تصادفنا صعوبة حيث أن الرقم 72.465 فى نفس درجة البعد عن الرقمين 72.46 ، 72.47 وقد اصطلح من الناحية العملية أن يتم فى هذه الحالات التقريب إلى الرقم الزوجى السابق على 5 .

مثال ذلك 72.465 تقرب إلى 72.46 ، 183.575 تقرب إلى 183.58 ، 116 500 000 يقرب إلى أقرب مليون إلى 116 000 000 وهذا الحل العملى يفيد على وجه الخصوص فى تصغير الأخطاء المتراكمة للتقريب إذا أجرى عدد كبير من العمليات (أنظر المسألة ١ — ٤)

الرموز العلمية :

عند كتابة أى رقم وخاصة إذا كان متضمناً عدداً كبيراً من الأصفار قبل أو بعد العلامة العشرية ، فإنه من المفيد استخدام الرمز العلمى للأساس 10 .

مثال ١ — $10^1 = 10, 10^2 = 10 \times 10 = 100, 10^5 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 100\,000, 10^8 = 100\,000\,000$

مثال ٢ — $10^0 = 1,\ 10^{-1} = 0{\cdot}1,\ 10^{-2} = 0{\cdot}01,\ 10^{-5} = 0{\cdot}000\,01$

مثال ٣ — $864\,000\,000 = 8{\cdot}64 \times 10^8,\ 0{\cdot}000\,034\,16 = 3{\cdot}416 \times 10^{-5}$

لاحظ أن ضرب رقم بـ 10^8 ، مثلا يؤدى إلى تحريك العلامة العشرية 8 أماكن إلى اليمين . كما أن ضرب رقم بـ 10^{-6} يؤدى إلى تحريك العلامة العشرية 6 أماكن إلى اليسار

من المعتاد أن تستخدم الأقواس أو النقط للتعبير عن ضرب رقمين أو أكثر . مثلا

$$5 \times 3 = 15,\ (10)(10)(10) = 10.10.10 = 10 \times 10 \times 10 = 1000.$$

إذا استخدمت الحروف للدلالة على أرقام فإنه من المعتاد حذف الأقواس أو النقط . على سبيل المثال .

$$ab = (a)(b) = a.b = a \times b.$$

وتعد الرموز العملية مفيدة فى الحساب وخاصة فى تحديد مكان العلامة العشرية . وتستخدم فى ذلك القاعدة .

$$(10^p)(10^q) = 10^{p+q},\quad \frac{10^p}{10^q} = 10^{p-q}$$

حيث p ، q أى رقم .

فى الرقم 10^p ، p تسمى الأس و 10 الأساس .

مثال ١ — $(10^3)(10^2) \quad 1000 \times 100 = 100\,000 = 10^5$ (i.e. 10^{3+2}),

$$\frac{10^6}{10^4} = \frac{1\,000\,000}{10\,000} = 100 = 10^2 \text{ (i.e. } 10^{6-4})$$

مثال ٢ — $(4\,000\,000)(0{\cdot}000\,000\,000\,2) = (4 \times 10^6)(2 \times 10^{-10}) = (4)(2)(10^6)(10^{-10}) = 8 \times 10^{6-10}$
$8 \times 10^{-4} \quad 0{\cdot}000\,8$

مثال ٣ — $$\frac{(0{\cdot}006)(80\,000)}{0{\cdot}04} = \frac{(6 \times 10^{-3})(8 \times 10^4)}{4 \times 10^{-2}} = \frac{48 \times 10^1}{4 \times 10^{-2}} = \left(\frac{48}{4}\right) \times 10^{1-(-2)}$$
$$= 12 \times 10^3 = 12\,000$$

الارقام المعنوية :

إذا كانت دقة تسجيل وزن شيء هو فى الصورة 65.4 kg فهذا يعنى أن الوزن الحقيقى بين 65.35 kg و 65.45 kg والأرقام الدقيقة التى نحتاج إليها لتحديد العلامة العشرية ، بالإضافة إلى الأصفار اللازمة لتحديد العلامة العشرية ، تسمى الأرقام المعنوية للرقم .

مثال ١ — الرقم 65.4 له 3 أرقام معنوية

مثال ٢ — الرقم 4.5300 له 5 أرقام معنوية

مثال ٣ — الرقم $0.0018 = 1.8 \times 10^{-3}$ له 2 أرقام معنوية

مثال ٤ — الرقم $0.001800 = 1.800 \times 10^{-3}$ له 4 أرقام معنوية

الأرقام التى ترتبط بعملية التعداد أو الترقيم ، بعكس القياسات ، بطبيعتها أرقام صحيحة وبهذا يكون لها عدد غير محدود من الأرقام المعنوية . فى مثل هذه الحالات قد يكون من الصعب تحديد الأرقام المعنوية بدون وجود معلومات إضافية .مثال ذلك الرقم 000 000 186 من الممكن أن يكون له 9 .... ,4 ,3 أرقام معنوية . فإذا كان من المعروف أن له 5 أرقام معنوية فإنه من الأفضل أن يسجل 186.00 مليون أو 1.8600×10^8 .

العمليات الحسابية :

عند إجراء عمليات الحساب المتضمنة عمليات الضرب ، القسمة والحصول على جذور الأرقام فإن النتيجة النهائية لن تحتوى على أرقام معنوية بأكثر من الأرقام المعنوية بالرقم الذى به أقل رقم معنوى (أنظر المسألة ١ — ٩)

أمثلة :

1. $73{\cdot}24 \times 4{\cdot}52 = (73{\cdot}24)(4{\cdot}52) = 331$
2. $1{\cdot}648/0{\cdot}023 = 72$
3. $\sqrt{38{\cdot}7} = 6{\cdot}22$
4. $(8{\cdot}416)(50) = 420{\cdot}8$, if 50 is exact.

عند إجراء عمليات الجمع والطرح فإن النتيجة النهائية لن تحتوى على أرقام معنوية بعد العلامة العشرية بأكثر من الأرقام التى تحتوى على أقل رقم معنوى بعد العلامة العشرية (أنظر المسألة ١ — ١٠) .

أمثلة : 1. $3{\cdot}16 + 2{\cdot}7 = 5{\cdot}9$ 2. $83{\cdot}42 - 72 = 11$ 3. $47{\cdot}816 - 25 = 22{\cdot}816$, if 25 is exact.

القاعدة السابقة فى الجمع والطرح يمكن تعميمها (أنظر المسألة ١ — ١١)

الدوال :

إذا كان لكل قيمة من قيم المتغير X قيمة أو أكثر تقابلها للمتغير Y فإنه يذكر أن Y دالة فى X وتكتب $Y=F(X)$ (وتقرأ Y تساوى دالة F فى X) وذلك للتعبير عن هذا الاعتماد الدالى . ويمكن أن تستخدم حروف أخرى بدلا من F مثل ... و G, φ وهكذا .

ويسمى المتغير X بالمتغير المستقل والمتغير Y بالمتغير التابع

إذا كان لكل قيمة من قيم X قيمة وحيدة للمتغير Y فإن Y تسمى بدالة وحيدة القيمة فى X وخلاف ذلك تسمى بدالة متعددة القيم فى X .

مثال ١ — العدد الكلى P لسكان الجزر البريطانية يعد دالة فى الزمن t ، وتكتب $P = F(t)$.

مثال ٢ — الاستطالة S لزنبرك فى وضع رأسى يعد دالة فى الوزن W المعلق فى نهاية الزنبرك . وبالرموز ، $S = G(W)$.

ويمكن تمثيل الاعتماد الدالى أو المقابلة بين المتغيرات على صورة جدول . كذلك يمكن التعبير عنها على صورة معادلة تربط بين المتغيرات مثال $Y = 2X - 3$ ومنها يمكن تحديد قيمة Y المقابلة للقيم المختلفة للمتغير X .

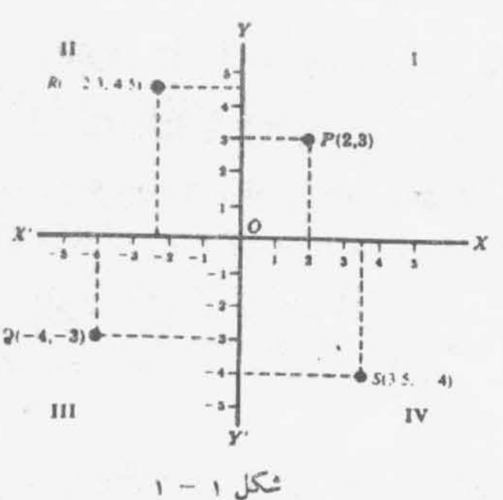
إذا كانت $Y = F(X)$ فإنه من المعتاد كتابة $F(3)$ مثلا للتعبير عن « قيمة Y عندما تكون $X = 3$ » ، $F(10)$ تعبر عن « قيمة Y عندما تكون $X = 10$ » وهكذا . على سبيل المثال إذا كانت $Y = F(X) = X^2$ فإن $F(3) = 3^2 = 9$ هى قيمة المتغير Y عندما تكون $X = 3$.

مفهوم الدالة يمكن تعميمه ليشمل حالة متغيرين أو أكثر (أنظر المسألة ١ - ١٧) .

الاحداثيات المتعامدة :

إذا أخذنا فى الاعتبار الخطان المتعامدان على بعضهما $X'OX$ و $Y'OY$ سميهما المحاور x و y (أنظر الشكل ١ - ١) حيث يوضح المقاييس المناسبة . هذان الخطان يقسمان المستوى المحدد بهما والمسمى بالمستوى $x\,y$ إلى أربع مناطق معبر عنها بالأرقام I, II, III, IV وهذه تسمى بالربع الاول ، الربع الثانى، الربع الثالث والربع الرابع على التوالى .

تسمى النقطة O بنقطة الأصل أو نقطة الصفر . إذا كانت هناك نقطة P وأسقطنا خطوطاً عمودية على المحورين x و y من النقطة P فإن قيمة x و y عند هذه النقطة التى تتقابل فيها الخطوط العمودية المسقطة مع هذه المحاور تسمى بالاحداثيات المتعامدة أو بشكل أبسط بإحداثيات النقطة P ويعبر عنها بالنقطة (x, y) ويسمى الاحداثى x أحياناً بالاحداثى السينى والاحداثى y بالاحداثى الصادى . فى الشكل (١-١) الاحداثى السينى للنقطة P هى 2 والاحداثى الصادى لها هو 3 . واحداثيات النقطة P هو $(2, 3)$.



شكل ١ - ١

وعلى العكس مما سبق فإذا أعطينا احداثيات نقطة فإنه يمكن تعيين موضع هذه النقطة . على هذا فإن النقطة ذات الاحداثيات $(-4, -3)$ ، $(-2.3, 4.5)$ وكذلك $(3.5, -4)$ ممثلة بالحروف Q, R, S على التوالى بالشكل .

ومن الممكن برسم المحور z يمر بالنقطة O وعمودى على المستوى $x\,y$ تعميم الفكرة السابقة . وفى هذه الحالة فإن إحداثيات النقطة P يمكن التعبير عنها بالصورة (x, y, z) .

الاشكال البيانية :

الشكل البيانى هو تعبير تصويرى للعلاقة بين المتغيرات . وتستخدم فى الإحصاء أنواع عديدة من الأشكال وذلك حسب طبيعة البيانات موضع الدراسة والهدف المرجو منه من الشكل . من بين هذه الأشكال الأعمدة البيانية ، الرسوم الدائرية والرسوم التصويرية ، وغير ذلك . وهذه الأشكال يشار إليها أحيانا بالخرائط أو الأشكال التوضيحية . وعلى هذا نتحدث عن خرائط الأعمدة البيانية وخرائط الرسوم الدائرية (أنظر المسائل أرقام ١ - ٢٣ ، ١ - ٢٤ ، ١ - ٢٦ ، وكذلك ١ - ٢٧) .

المعادلات :

المعادلة هى تعبير على الصورة $A = B$ حيث تسمى A بالعنصر أو الجانب الأيسر للمعادلة وB بالعنصر أو الجانب الأيمن لها إذا أجرينا على طرفى المعادلة نفس العمليات فإننا نحصل على معادلة مكافئة . وبهذا فإذا جمعنا أو طرحنا أو ضربنا كلا من طرفى المعادلة مستخدمين نفس المقدار فإننا نحصل على معادلة مكافئة والاستثناء الوحيد هو القسمة على الصفر فهى غير مسموح بها .

مثال : اعتبر المعادلة $2X + 3 = 9$.

اطرح 3 من الطرفين $2X=6$ أو $2X + 3 - 3 = 9 - 3$.

اقسم الطرفين على 2 : $X = 3$ أو $2X/2 = 6/2$.

هذه القيمة لـ X تعد حلا للمعادلة المعطاة وهذا يمكن إثباته إذا عوضنا عن X بالقيمة 3 فإننا سنحصل على $2(3) + 3 = 9$ أى $9 = 9$ وهذه متساوية . وتسمى عملية الحصول على حلول لمعادلة بحل المعادلة .

والفكرة السابقة يمكن استخدامها للحصول على حلول معادلتين فى مجهولين أو ثلاث معادلات فى ثلاثة مجاهيل وهكذا . هذه المعادلات تسمى بالمعادلات الآنية .

المتباينات :

الرمزان $<$ ، $>$ يعنيان « أقل من » و « أكبر من » على التوالى . والرموز $\leqq$ ، $\geqq$ يعنيان « أقل من أو يساوى » و « أكبر من أو يساوى » على التوالى . وهذه الرموز تعرف برموز المتباينات .

مثال ١ — $3 < 5$ تقرأ « 3 أقل من 5 »

مثال ٢ — $5 > 3$ تقرأ « 5 أكبر من 3 »

مثال ٣ — $X < 8$ تقرأ « X أقل من 8 »

مثال ٤ — $X \geqq 10$ تقرأ « X أكبر من أو تساوى 10 »

مثال ٥ — $4 < Y \leqq 6$ تقرأ « 4 أقل من Y والتى بدورها أقل من أو تساوى 6 » أو « تقع Y بين 4 و 6 بحيث أن 4 نفسها غير متضمنة بينما 6 نفسها متضمنة فى الفترة أو « Y أكثر من 4 وأقل من أو تساوى 6 »

تسمى العلاقات التى تتضمن رموز المتباينة بالمتباينات . وكما كنا نتحدث عن عناصر المعادلة فإنه يمكن الحديث عن عناصر المتباينة . فالمتباينة

$4 < Y \leqq 6$ عناصرها هى $4, Y, 6$.

المتباينة الصحيحة تستمر صحيحة :

(أ) إذا طرح نفس الرقم من أو أضيف إلى كل من عناصر المتباينة

أمثلة : بما أن $15 > 12$ فإن $15 + 3 > 12 + 3$ أى $18 > 15$ وكذلك $15 - 3 > 12 - 3$
أى $12 > 9$.

(ب) إذا ضرب كل عنصر فى أو قسم على نفس الرقم الموجب .

أمثلة بما أن $15 > 12$ فإن $(3)(5) > (3)(12)$ أى $(45 > 36)$ وكذلك $\frac{15}{3} > \frac{12}{3}$ أى $(5 > 4)$

(ج) إذا ضرب كل عنصر فى أو قسم على نفس الرقم السالب على أن يقلب اتجاه المتباينة .

أمثلة : بما أن $15 > 12$ فإن $(15)(-3) < (12)(-3)$ أى $(-45 < -36)$ كذلك $\frac{15}{-3} < \frac{12}{-3}$
أى $(-5 < -4)$

اللوغاريتمات :

أى رقم موجب N يمكن التعبير عنه كقوى الرقم 10 أى أنه من الممكن الحصول على الرقم p بحيث $N = 10^p$
و تسمى p لوغاريتم N للأساس 10 أو اللوغاريتم المعتاد للرقم N وتكتب $p = \log N$ أو $p = \log_{10} N$ على سبيل
المثال فإن الرقم $10^3 = 1000$ وبهذا فإن $\log 1000 = 3$ كذلك فبما أن $10^{-2} = 0.01$ فإن $\log 0.01 = -2$

إذا كان الرقم N رقماً يقع بين 1 و10 أى 10^0 و 10^1 فإن $p = \log N$ تقع بين الصفر والواحد ومن الممكن
الحصول عليها من جداول اللوغاريتمات فى الملحق صفحة ٥٣٦ .

مثال ١ — الحصول على $\log 2.36$ نبدأ بالبحث فى أسفل العمود المعنون N إلى أن نصل إلى الرقمين 23
ثم نتحرك إلى اليمين فى اتجاه العمود المعنون 6 . سنجد أن التقاطع هو 3729 . وبهذا يكون
$\log 2.36 = 0.3729$ أى $2.36 = 10^{0.3729}$

لوغاريتم أى عدد موجب يمكن الحصول عليه من لوغاريتمات الأرقام من 1 إلى 10 .

مثال ٢ — من المثال (١) ، $2.36 = 10^{0.3729}$ إذا ضربنا الأطراف على التوالى بالرقم 10

$$23.6 = 10^{1.3729},\ 236 = 10^{2.3729},\ 2360 = 10^{3.3729}, \ldots$$

أى

$$\log 2.36 = 0.3729,\ \log 23.6 = 1.3729,\ \log 236 = 2.3729,\ \log 2360 = 3.3729$$

مثال ٣ — بما أن $2.36 = 10^{0.3729}$ فإن القسمة المتكررة على الرقم 10 ، نجد

$$0.236 = 10^{0.3729-1} = 10^{-0.6271},\quad 0.0236 = 10^{0.3729-2} = 10^{-1.6271}, \ldots$$

ومن المعتاد أن نكتب 1 — 0.3729 على صورة 10 — 9.3729 او $\bar{1}.3729$
وكذلك 2 — 0.3729 تكتب 10 — 8.3729 على صورة $\bar{2}.3729$ وهكذا باستخدام هذه الرموز نجد .

$$\log 0.236 = 9.3729 - 10 = \bar{1}.3729 = -0.6271$$
$$\log 0.0236 = 8.3729 - 10 = \bar{2}.3729 = -1.6271, \text{ etc.}$$

ويسمى الجزء العشرى 0.3729 فى كل هذه اللوغاريتمات بالجزء العشرى . أما الجزء الباقى قبل العلامة العشرية للجزء العشرى مثل 3 ,2 ,1 وكذلك $\bar{2}$,$\bar{1}$ أو 10 — 8 ,10 — 9 يسمى بالعدد البيانى .

القواعد التالية من السهل إثباتها :

١ — العدد البيانى فى لوغاريتم أى عدد أكبر من الواحد الصحيح يكون موجباً ويساوى عدد الأرقام الصحيحة فى العدد الأصلى ناقصاً واحداً .

بهذا يكون العدد البيانى فى لوغاريتم 2.36 ,23.6 ,236 ,2360 هو 0 ,1 ,2 ,3 وتكون لوغاريتماتها 3.3729, 2.3729, 1.3729, 0.3729 .

٢ — العدد البيانى فى لوغاريتم أى عدد أصغر من الواحد الصحيح يكون سالباً ويساوى عدد الأصفار التى تلى العلامة العشرية مباشرة مضافاً إليها واحداً . بهذا يكون العدد البيانى فى لوغاريتم 0.00236 ,0.0236 ,0.236 هو 3 — ,2 — ,1 — وتكون لوغاريتماتها $\bar{3}.3729$,$\bar{2}.3729$,$\bar{1}.3729$ على التوالى .

أما إذا كان لوغاريتم عدد ذا أربعة أرقام مثل 758.2 ,2.364 فإنه يمكن الحصول عليها بالاستكمال (أنظر المسألة ١ — ٣٦) .

الأعداد المقابلة للوغاريتمات :

يمكن كتابة الرقم 2.36 فى الشكل الأسى على صورة $2.36 = 10^{0.3729}$ ويسمى الرقم 2.36 بالعدد المقابل للوغاريتم 0.3729 أو antilog 0.3729 أى أنه الرقم الذى لوغاريتمه 0.3729 ويترتب على ذلك ما يلى :

$$\text{antilog } 1.3729 = 23.6,\ \text{antilog } 2.3729 = 236,\ \text{antilog } 3.3729 = 2360 \ldots$$
$$\text{antilog } 9.3729 - 10 = \text{antilog } \bar{1}.3729 = 0.236.$$
$$\text{antilog } 8.3729 - 10 = \text{antilog } \bar{2}.3729 = 0.0236. \ldots$$

ويمكن الحصول على الأعداد المقابلة للوغاريتم أى رقم بالرجوع إلى الجدول فى الملحق .

مثال : للحصول على العدد المقابل للوغاريتم 10 — 8.6284 فإننا نبحث عن الجزء العشرى 0.6284 فى صلب الجدول . حيث نجده عند تقاطع الصف المعنون 42 والعمود 5 فإن الرقم المطلوب هو 425 . وبما أن العدد البيانى هو 10 — 8 فإن الرقم هو 0.0425 .

وبنفس الطريقة فإن $\text{antilog } 5.6284 = 425\,000$ ، $\text{antilog } 3.6284 = 4250$

أما إذا كان الجزء العشرى غير موجود بالجدول فإنه يمكن الحصول على العدد بالاستكمال (أنظر المسألة رقم ١ – ٣٧)

الحسابات باستخدام اللوغاريتمات :

$$\log MN = \log M + \log N$$
$$\log \frac{M}{N} = \log M - \log N$$
$$\log M^p = p \log M$$

وباستخدام هذه النتائج معاً فإننا نجد على سبيل المثال

$$\log \frac{A^p B^q C^r}{D^s E^t} = p\log A + q\log B + r\log C - s\log D - t\log E$$

أنظر المسائل من ١ – ٣٨ إلى ١ – ٤٥

مســـائل محلولة

المتغيرات :

١ – ١ حدد أياً من البيانات التالية تمثل بيانات متقطعة وأياً منها تمثل بيانات متصلة

(أ) عدد الأسهم المباعة فى سوق الأوراق المالية — الحل : متقطعة

(ب) درجات الحرارة المسجلة كل نصف ساعة فى مكتب الأرصاد الجوية — الحل : متصلة

(جـ) أعمار لمبات التليفزيون المنتجة فى شركة ما — الحل : متصلة

(د) الدخول السنوية لأساتذة كلية — الحل : متقطعة

(هـ) أطوال 1000 مسمار من انتاج مصنع — الحل : متصلة

١ – ٢ وضح مجال كل من المتغيرات التالية وحدد أياً من هذه المتغيرات متصل وأياً منها متقطع .

(أ) الرقم V لعدد ليترات الماء فى ماكينة غسيل .

المجال : أى رقم يبدأ من الصفر إلى طاقة الماكينة .

المتغير متصل .

(ب) عدد الكتب B الموضوع على رف فى إحدى المكتبات .

المجال ... ,3 ,2 ,1 ,0 إلى أكبر عدد من الكتب يمكن أن تناسب الرف .

المتغير متقطع .

(ج) المجموع S لعدد النقط التى نحصل عليها من رمية زهرتى طاولة

المجال : الأرقام الممكن الحصول عليها من رمية واحدة لزهرة طاولة هى 1, 2, 3, 4, 5, 6 . وبهذا يكون مجموع النقط فى رمية زهرتين هو 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 وهذا هو مجال S .

المتغير متقطع

(د) القطر d لكرة

المجال : إذا اعتبرنا أن النقطة هى كرة قطرها صفر فإن المجال d هو جميع القيم ابتداء من الصفر .

المتغير متصل

(هـ) الدولة C فى أوروبا .

المجال : انجلترا ، فرنسا ، ألمانيا . . وهكذا . ويمكن تمثيلها رقمياً ... ,3 ,2 ,1 وهكذا

المتغير متقطع

تقريب البيانات :

١ - ٣ قرب الأرقام التالية إلى درجة الدقة المشار إليها

(أ) 48.6	أقرب وحدة	49	(و) 143.95	أقرب نسبة من العشرة	144.0
(ب) 136.5	أقرب وحدة	136	(ز) 368	أقرب نسبة من المائة	400
(ج) 2.484	أقرب نسبة من مئة	2.48	(ح) 24448	أقرب نسبة من ألف	24000
(د) 0.0435	أقرب نسبة ألف	0.044	(ط) 5.56500	أقرب نسبة من المائة	5.56
(هـ) 4.50001	أقرب وحدة	5	(ى) 5.56501	أقرب نسبة من المائة	5.57

١ - ٤ أجمع الأرقام 4.35, 8.65, 2.95, 12.45, 6.65, 7.55, 9.75

(أ) مباشرة

(ب) بالتقريب إلى أقرب نسبة من العشرة حسب طريقة « الرقم الزوجى »

(ج) بالتقريب بحيث يزيد الرقم السابق على الـ 5

الحــل :

(أ)	(ب)	(ج)
4.35	4.4	4.4
8.65	8.6	8.7
2.95	3.0	3.0
12.45	12.4	12.5
6.65	6.6	6.7
7.55	7.6	7.6
9.75	9.8	9.8
المجموع 52.35	المجموع 52.4	المجموع 52.7

لاحظ أن الطريقة (ب) أحسن من الطريقة (ج) حيث أنها تؤدى إلى تناقص أخطاء التقريب المتراكة ب.

الرموز العلمية والارقام المعنوية :

١ - ٥ عبر عن الأرقام التالية بدون استخدام قوى العدد 10 .

(أ) 4.823×10^{7} . حرك العلامة العشرية 7 أماكن إلى اليمين فيكون الناتج 48230000

(ب) 8.4×10^{-6} حرك العلامة العشرية 6 أماكن إلى اليسار فيكون الناتج 0.000 008 4

(ج) $3.80 \times 10^{-4} = 0.000\,380$ (هـ) $300 \times 10^{8} = 30\,000\,000\,000$

(د) $1.86 \times 10^{5} = 186\,000$ (و) $70\,000 \times 10^{-10} = 0.000\,007\,000\,0$

١ - ٦ ما هو عدد الأرقام المعنوية فى الأرقام التالية إذا افترضنا أن الأرقام مسجلة بدقة ؟

(أ) 149.8 mm أربعة (د) 0.002 80 m ثلاثة (ز) 9 منازل غير محدود

(ب) 149.80 mm خمسة (هـ) 1.002 80 m ستة (ح) 4.0×10^{3} g إثنان

(ج) 0.0028 m إثنان (و) 9 g واحد (ط) $7.584\,00 \times 10^{-5}$ N ستة

١ - ٧ ماهو الحد الأقصى للخطأ فى القياسات التالية إذا افترضنا أنها مسجلة بدقة ؟ حدد عدد الأرقام المعنوية لكل رقم فى كل حالة .

(أ) 73.854 mm من الممكن أن تكون القياسات فى المدى من 73.8535 mm إلى 73.8545 mm وبهذا يكون الحد الأقصى للخطأ 0.0005 mm يحتوى الرقم على خمسة أرقام معنوية .

(ب) $0.09800\ m^{3}$ رقم الـ m^{3} من الممكن أن يكون أى رقم من 0.097 995 إلى 0.098 005 وبهذا يكون الحد الأقصى للخطأ $0.000\,005\ m^{3}$ يحتوى الرقم على أربعة أرقام معنوية .

(ج) 3.867×10^{8} km . الرقم الحقيق بالكيلومترات أكبر من 3.8665×10^{8} ولكنه أقل من 3.8675×10^{8} .

وبهذا يكون الحد الأقصى للخطأ هو 0.0005×10^{8} km . يحتوى الرقم على أربعة أرقام معنوية .

١ — ٨ أكتب الأرقام التالية باستخدام الرموز العملية ، مفترضاً أن جميع الأرقام معنوية إلا إذا ذكر غير ذلك .

(أ) 24 380 000 (four sig. fig.) $= 2{\cdot}438 \times 10^{7}$ (جـ) 7 300 000 000 (five sig. fig.) $= 7{\cdot}3000 \times 10^{9}$

(ب) $0{\cdot}000\,009\,851 = 9{\cdot}851 \times 10^{-6}$ (د) $0{\cdot}000\,184\,00 = 1{\cdot}8400 \times 10^{-4}$

العمليات الحسابية :

١ — ٩ وضح أنه فى حاصل ضرب الرقم 5.74 فى 3.8 مفترضاً أن أرقامها المعنوية هى ثلاثة وإثنان على التوالى لايمكن أن يكون دقيقاً لأكثر من رقمين معنويين .

الطريقة الأولى :

$21.812 = 3.8 \times 5.74$ ولكن ليس كل ناتج الضرب معنوياً . ولتحديد عدد الأرقام المعنوية فنلاحظ أن الرقم 5.74 يمكن أن يكون أى رقم بين 5.745 ، 5.735 بينما الرقم 3.8 يمكن أن يكون أى رقم بين 3.75 ، 3.85 وبهذا يكون أصغر قيمة ممكنة لحاصل الضرب هو $21.50625 = 3.75 \times 5.735$ وتكون أكبر قيمة ممكنة هى $5.745 \times 3.85 = 22.118\,25$.

وبما أن المدى الممكن للقيم هو من 21.506 25 إلى 22.118 25 فإنه من الواضح أن الأرقام المعنوية لن تزيد من الأرقام الخمسة الأولى ، وتكتب النتيجة 22 . لاحظ أن الرقم 22 يمثل أى رقم بين 21.5 ، 22.5 .

الطريقة الثانية :

اعتبر فى الصورة التالية أن الأرقام المائلة مشكوك فى صحتها ، وبهذا يحسب حاصل الضرب كالآتى :

يجب أن لاتحتفظ بأكثر من رقم واحد مشكوك فيه فى النتيجة وبهذا يكون الرقم 22 إلى رقمين معنويين .

$$\begin{array}{r} 5{\cdot}7\mathit{4} \\ \underline{3{\cdot}\mathit{8}} \\ \underline{\mathit{4592}} \\ \underline{172\mathit{2}} \\ 21{\cdot}\mathit{812} \end{array}$$

لاحظ أنه من الضرورى الاحتفاظ بعدد أكبر من الأرقام المعنوية أكبر مما هو فى آخر حد دقيق . لاحظ أنه لو قمنا بتقريب الرقم 5.74 إلى 5.7 فإن حاصل ضرب $22 = 21.66 = 3.8 \times 5.7$ إلى رقمين معنويين ، كما فى النتيجة السابقة . عند إجراء الحسابات بدون استخدام آلة حاسبة فإنه يمكن التقليل من العمل بعدم الاحتفاظ بأكثر من رقم أو رقمين معنويين بعد آخر معامل دقيق وتقرب النتيجة النهائية إلى أقرب رقم معنوى .

١ – ١٠ أجمع الأعداد 8.472 ,12.3 ,5.9561 ,15.28 ,4.193 55 مفترضاً أن جميع الأرقام معنوية

الحــل :

فى (أ) الرقم المشكوك فيه فى عمليات الجمع مكتوب بخط مائل . النتيجة النهائية والتى لاتتضمن أكثر من رقم واحد مشكوك فيه هى 46.2

$$(أ)\quad \begin{array}{r} 4{\cdot}19355 \\ 15{\cdot}28 \\ 5{\cdot}9561 \\ 12{\cdot}3 \\ 8{\cdot}472 \\ \hline 46{\cdot}20165 \end{array} \qquad (ب)\quad \begin{array}{r} 4{\cdot}19 \\ 15{\cdot}28 \\ 5{\cdot}96 \\ 12{\cdot}3 \\ 8{\cdot}47 \\ \hline 46{\cdot}20 \end{array}$$

بعض العمل يمكن تقليله لو اتبعنا الطريقة (ب) حيث احتفظنا برقم معنوى عشرى واحد أكثر من الرقم الأقل دقة. والنتيجة النهائية ، مقربة إلى 46.2 تتفق مع النتيجة فى (أ) .

١ – ١١ أجمع 1372410 — 000 684 12 + 000 000 475 إذا كانت هذه الأعداد تحتوى على 7 ,5 ,3 أرقام معنوية على التوالى

الحــل :

فى عمليات الجمع فى (أ) جميع الأرقام احتفظ بها ثم قربت النتيجة . فى (ب) استخدمت طريقة مشابهة لما استخدمناه فى الحل ١ – ١٠ (ب) . فى كلتا الحالتين فإن الأرقام المشكوك فيها مكتوبة بخط مائل .

$$(أ)\quad \begin{array}{r} 487\,684\,000 \\ -\ \ 1\,372\,410 \\ \hline 486\,311\,590 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 475\,000\,000 \\ +\ \ 12\,684\,000 \\ \hline 487\,684\,000 \end{array} \qquad\qquad (ب)\quad \begin{array}{r} 487\,700\,000 \\ -\ \ 1\,400\,000 \\ \hline 486\,300\,000 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 475\,000\,000 \\ +\ \ 12\,700\,000 \\ \hline 487\,700\,000 \end{array}$$

وتقرب النتيجة النهائية إلى 000 000 486 وقد يكون من الأفضل لبيان أن هناك 3 أرقام معنوية أن تكتب على صورة 486 مليون أو 4.86×10^8 .

١ – ١٢ أجر العمليات الموضحة فيما يلى :

(أ) $48{\cdot}0 \times 943 = (48{\cdot}0)(943) = 45\,300$ (ب) $8{\cdot}35/98 = 0{\cdot}085$

(جـ)

$$\begin{aligned}(28)(4193)(182) &= (2{\cdot}8 \times 10^1)(4{\cdot}193 \times 10^3)(1{\cdot}82 \times 10^2) \\ &= (2{\cdot}8)(4{\cdot}193)(1{\cdot}82) \times 10^{1+3+2} = 21 \times 10^6 = 2{\cdot}1 \times 10^7\end{aligned}$$

وهذه يمكن كتابتها 21 مليون لبيان أن هناك رقمين معنويين

(د)

$$\frac{(526\cdot7)(0\cdot001\,280)}{0\cdot000\,034\,921} = \frac{(5\cdot267 \times 10^{2})(1\cdot280 \times 10^{-3})}{3\cdot4921 \times 10^{-5}} = \frac{(5\cdot267)(1\cdot280)}{3\cdot4921} \times \frac{(10^{2})(10^{-3})}{10^{-5}}$$

$$= 1\cdot931 \times \frac{10^{2-3}}{10^{-5}} = 1\cdot931 \times \frac{10^{-1}}{10^{-5}}$$

$$= 1\cdot931 \times 10^{-1+5} = 1\cdot931 \times 10^{4}$$

وهذه يمكن كتابتها 19.31 ألف لبيان أن هناك أربعة أرقام معنوية

(هـ)

$$\frac{(1\cdot475\,62 - 1\cdot473\,22)(4895\cdot36)}{0\cdot000\,159\,180} = \frac{(0\cdot002\,40)(4895\cdot36)}{0\cdot000\,159\,180} = \frac{(2\cdot40 \times 10^{-3})(4\cdot895\,36 \times 10^{3})}{1\cdot591\,80 \times 10^{-4}}$$

$$= \frac{(2\cdot40)(4\cdot895\,36)}{1\cdot591\,80} \times \frac{(10^{-3})(10^{3})}{10^{-4}} = 7\cdot38 \times \frac{10^{0}}{10^{-4}} = 7\cdot38 \times 10^{4}$$

هذه أيضاً يمكن كتابتها 73.8 ألف لإظهار الأرقام الثلاثة منوية بالعدد

(و) إذا كان البسط 6 ، 5 أرقاما دقيقة ، $3\cdot84 \cdot 5\cdot009 - 8\cdot85$ $\quad \frac{(5\cdot482)^2}{6} \quad \frac{(4\cdot38)^2}{5}$

(ز) $(3\cdot1416)(8\cdot447) - 26\cdot54 \quad 3\cdot1416\sqrt{71\cdot35}$ (ح) $\sqrt{39\cdot3 \quad 6\cdot27} \quad \sqrt{128\cdot5 - 89\cdot24}$

١ – ١٢ احسب قيمة كل مما يلي إذا كانت $X = 3,\ Y = -5,\ A = 4,\ B = -7$ حيث كل الأرقام يفترض فيها أنها دقيقة .

(أ) $2X - 3Y = 2(3) - 3(-5) = 6 + 15 = 21$

(ب) $4Y - 8X + 28 = 4(-5) - 8(3) + 28 = -20 - 24 + 28 = -16$

(جـ) $\dfrac{AX + BY}{BX - AY} = \dfrac{(4)(3) + (-7)(-5)}{(-7)(3) - (4)(-5)} = \dfrac{12 + 35}{-21 + 20} = \dfrac{47}{-1} = -47$

(د) $X^2 - 3XY - 2Y^2 = (3)^2 - 3(3)(-5) - 2(-5)^2 = 9 + 45 - 50 = 4$

(هـ)

$$2(X + 3Y) - 4(3X - 2Y) = 2[(3) + 3(-5)] - 4[3(3) - 2(-5)]$$
$$= 2[3 - 15] - 4[9 + 10] = 2(-12) - 4(19)$$
$$= -24 - 76 = -100$$

طريقة أخرى :

(و)

$$2(X + 3Y) - 4(3X - 2Y) = 2X + 6Y - 12X + 8Y = -10X + 14Y = -10(3) + 14(-5)$$
$$= -30 - 70 = -100$$

(ز)

$$\frac{X^2 - Y^2}{A^2 - B^2 + 1} = \frac{(3)^2 - (-5)^2}{(4)^2 - (-7)^2 + 1} = \frac{9 - 25}{16 - 49 + 1} = \frac{-16}{-32} = \frac{1}{2} = 0\cdot5$$

$$\sqrt{2X^2 - Y^2 - 3A^2 + 4B^2 + 3} = \sqrt{2(3)^2 - (-5)^2 - 3(4)^2 + 4(-7)^2 + 3}$$
$$= \sqrt{18 - 25 - 48 + 196 + 3} = \sqrt{144} = 12$$

(ح)

$$\sqrt{\frac{6A^2}{X} + \frac{2B^2}{Y}} = \sqrt{\frac{6(4)^2}{3} + \frac{2(-7)^2}{-5}} = \sqrt{\frac{96}{3} + \frac{98}{-5}} = \sqrt{12\cdot4} = 3\cdot52, \text{approx}$$

الدوال :

١ - ١٤ الجدول ١ - ١ يظهر عدد الأطنان من الجذور والبنجر التي أنتجتها مزرعة PQR وذلك خلال الأعوام من من 1950 إلى 1960

بالرجوع إلى هذا الجدول حدد السنة أو السنوات التي في خلالها :

(أ) أنتج أقل عدد من أطنان الجذور

(ب) أنتج أكبر عدد من أطنان البنجر

(جـ) حدث أكبر تدهور في إنتاج الجذور

السنة	عدد الأطنان من الجذور (مقربة لأقرب ٥ أطنان)	عدد الأطنان من البنجر (مقربة لأقرب ٥ أطنان)
1950	200	75
1951	185	90
1952	225	100
1953	250	85
1954	240	80
1955	195	100
1956	210	110
1957	225	105
1958	250	95
1959	230	110
1960	235	100

شكل ١-١

(د) انخفض إنتاج البنجر بينما ارتفع إنتاج الجذور عما كان عليه في العام السابق

(هـ) أنتج نفس كية الأطنان من الجذور والبنجر

(و) مجموع إنتاج الجذور ، والبنجر وصل إلى نهاية العظمى

الحل : (أ) 1951 (ب) 1959 ، 1956 (جـ) 1955 (د) 1953, 1957, 1958, 1960
(هـ) 1952, 1957; 1953, 1958 (و) 1958

١ - ١٥ إذا كانت W تعبر عن عدد الأطنان المنتجة من الجذور و C تعبر عن عدد الأطنان المنتجة من البنجر في العام t في مزرعة PQR المذكورة في المسألة ١ - ١٤ . من الواضح أن W ، C دالتان في t وهذا يعبر عنه $W = F(t)$ و $C = G(t)$.

(أ) أوجد W عند $t = 1956$ — الحل : 210

(ب) أوجد C عند $t = 1959$ ، $t = 1953$ — الحل : 110 ، 85 على التوالى

(جـ) أوجد t عند $W = 225$ — الحل : 1957 ، 1952 على التوالى

(د) أوجد $F(1959)$ — الحل : 240

(هـ) أوجد $G(1958)$ — الحل : 95

(و) أوجد C عندما $W = 210$ — الحل : 110

(ز) ما هو مجال المتغير t ؟ — الحل : السنوات 1950, 1951, ...,1960

(ح) هل W دالة وحيدة القيمة فى t ؟

نعم ، حيث أنه لكل قيمة من قيم t (فى مجال t) تقابلها قيمة وحيدة للمتغير W

(ط) هل t دالة فى W ؟ إذا كانت كذلك فهل هى دالة وحيدة القيمة ؟ نعم ، t دالة فى W حيث أنه لكل قيمة يمكن أن تأخذها W تقابلها قيمة أو أكثر من قيم t يمكن الحصول عليها من الجدول .

بما أنه من الممكن أن يكون هناك أكثر من قيمة للمتغير t مقابل قيمة من قيم W (مثال : عندما $W=225$ فإن $t = 1952$ أو $t = 1957$) فإن الدالة متعددة القيم . هذا الاعتماد الدالى لـ t على W يمكن كتابته على صورة $t = H(W)$

(ى) هل C دالة فى W ؟

نعم ، حيث أنه لكل قيمة ممكنة من قيم W يقابلها قيم أو أكثر من قيم C كما هو محدد بالجدول ١ - ١ . كذلك فإن W دالة فى C .

(ك) ما هو المتغير المستقل ، t أو W ؟

من الناحية المادية فإنه من المعتاد أن نفكر فى أن W تتحدد من t وليس أن t تتحدد من W . وبهذا فإنه من الناحية المادية نعتبر t المتغير المستقل و W المتغير التابع . من الناحية الرياضية فإن أياً من المتغيرين يمكن اعتباره متغيراً مستقلا والآخر متغيراً تابعاً . فالمتغير الذى يعطى قيما مختلفة هو المتغير المستقل أما المتغير الذى يتحدد كنتيجة لذلك فهو المتغير التابع .

١ - ١٦ تتحدد قيمة المتغير Y من المتغير X طبقاً للمعادلة $Y = 2X - 3$ (حيث الرقمان 2,3 أرقام صحيحة) .

(أ) أوجد قيمة Y إذا أخذت X القيم 1.5 ، 2− ,3

عندما $X = 3,\ Y = 2X - 3 = 2(3) - 3 = 6 - 3 = 3.$

عندما $X = -2,\ Y = 2X - 3 = 2(-2) - 3 = -4 - 3 = -7$

عندما $X = 1{\cdot}5,\ Y = 2X - 3 = 2(1{\cdot}5) - 3 = 3 - 3 = 0$

(ب) كون جدولا لقيم Y المقابلة لقيم X = 2, 1, 0, 1, 2, 3, 4

يظهر الجدول المقابل قيم Y ، محسوبة كما فى الجزء (أ) من المسألة :

X	2	1	0	1	2	3	4
Y	7	5	3	1	1	3	5

لاحظ أنه باستخدام قيم أخرى لـ X فإنه من الممكن تكوين عديد من الجداول . العلاقة $Y = 2X - 3$ مكافئة لمجموعة من كل الجداول المحتملة .

(ج) إذا كان اعتماد Y على X يعبر عنه بالصورة $Y = F(X)$ حدد قيمة $F(2.4)$ ، $F(0.8)$

$$F(2\cdot4) = 2(2\cdot4) - 3 = 4\cdot8 - 3 = 1\cdot8,\quad F(0\cdot8) = 2(0\cdot8) - 3 = 1\cdot6 - 3 = -1\cdot4$$

(د) ما هي قيمة X إذا كانت $Y = 15$ ؟

بالتعويض عن Y بالقيمة 15 فى $Y = 2X - 3$. فإن $15 = 2X \quad 3, 2X \quad 18, X \quad 9$

(هـ) هل من الممكن التعبير عن X كدالة فى Y ؟

نعم حيث أن $Y = 2X - 3, Y + 3 = 2X$ أو $X = \frac{1}{2}(Y + 3)$ وهذا يعبر عن X كدالة صريحة فى Y .

(و) هل Y دالة وحيدة القيمة فى X ؟

نعم ، حيث أنه لكل قيمة يمكن أن تأخذها X (وهناك عدد لانهائى من هذه القيم) تأخذ Y قيمة وحيدة فقط .

(ز) هل X دالة وحيدة القيمة فى Y

نعم ، حيث أنه من الجزء (ج) فإن $X = \frac{1}{2}(Y + 3)$ بحيث أنه لكل قيمة يمكن أن تأخذها Y قيمة وحيدة فقط تأخذها X .

١ – ١٧ إذا كانت $Z = 16 + 4X - 3Y$ أوجد قيم Z المقابلة لما يلى :

(أ) $X \quad 2, Y \quad 5$ (ب) $X \quad 3, Y \quad 7$ (ج) $X \quad -4, Y \quad 2$

الحـــل :

(أ) $Z = 16 + 4(2) - 3(5) = 16 + 8 - 15 = 9$

(ب) $Z = 16 + 4(-3) - 3(-7) = 16 - 12 + 21 = 25$

(ج) $Z = 16 + 4(-4) - 3(2) = 16 - 16 - 6 = -6$

بمعلومية قيم Y ، X يقابلها قيمة Z . ومن الممكن التعبير عن اعتماد Z على Y ، X بأن تكتب $Z = F(X, Y)$ وتقرأ Z دالة فى Y ، X . $F(2, 5)$ تعبر عن قيمة Z عندما $Y = 5$ $X = 2$ وهى 9 ، من الجزء (أ) . بصورة مماثلة $F(-3, -7) = 25$ ، $F(-4, 2) = -6$ من (ب) و (ج) وتسمى المتغيرات X, Y بالمتغيرات المستقلة و Z بالتغير التابع .

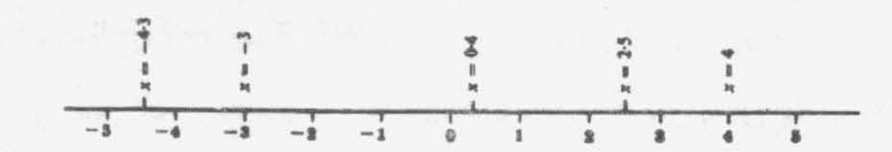
الاشكال البيانية :

١ – ١٨ عين على المحور X فى نظام للإحداثيات النقط المقابلة لما يلى :

(أ) $x = 4$ (ب) $x = -3$ (جـ) $x = 2.5$

(د) $x = -4.3$ (هـ) $x = 0.4$ ، مفترضاً أن كل هذه القيم قيم صحيحة .

الحل :



لكل قيمة من قيم x الصحيحة نقطة وحيدة فقط على المحور . و بالعكس فإنه من الثابت فى الرياضة المتقدمة أن كل نقطة على الأحداثى تقابلها قيمة وحيدة من قيم x .

من الناحية النظرية فإن هناك نقطة تقابل ... $x = \pi = 3.141\ 592653\ 58$

أو ... $x = 7/22 = 3.142857142875$.

ومن الناحية العملية فإننا لن نأمل أن نحدد موضع نقطة بالدقة حيث أن كثافة القلم الذى تستخدمه له سمك يغطى على عدد لانهائى من النقط ، كذلك فإن المحور x نفسه له سمك . وبهذا فإن الشكل أعلاه هو تمثيل مادى للوضع الرياضى الفعلى .

١ – ١٩ إذا كان x يعبر عن قطر حامل كرة بالمليمتر . إذا كانت $x = 4.58$ إلى ثلاثة أرقام معنوية . كيف يمكن تمثيل هذا على المحور x ؟

الحـــل :

القياس المعطى 4.58 mm. يظهر أن القياس الحقيقى يقع بين 4.575 mm. و 4.585 . وبهذا فإن القياس يجب أن يمثل بالجزء الثقيل من الخط .

١ – ٢٠ عين فى نظام للاحداثيات المتعامدة النقطة التى إحداثياتها :

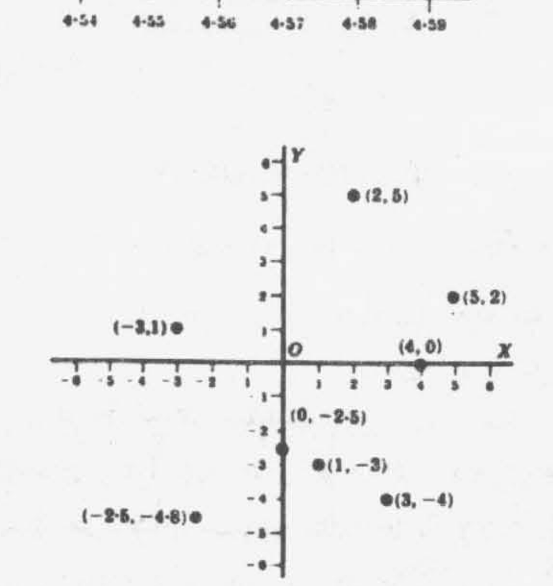
(أ) (5, 2) (ب) (2, 5)

(جـ) (–3, 1) (د) (1, –3)

(هـ) (– 2.5, – 4.8)

(و) (0, – 2.5)

(ز) (3, – 4) (ح) (4, 0)



الشكل ١ – ٢

افترض أن الأرقام المعطاة هي أرقام صحيحة . أنظر الشكل (١ – ٢) لتوضيح الحل .

١ – ٢١ عبر بيانياً عن المعادلة $y = 2x - 3$

الحل :

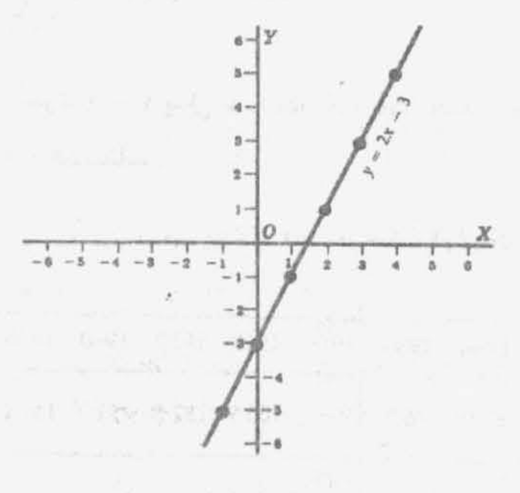
ضع $x = -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$

فإننا نجد

$y = -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5$

على التوالي [أنظر المسألة ١ – ١٦ (ب)]. وبهذا تكون النقطة على الرسم هي (٨٨) .

وقد رسمت باستخدام نظام الاحداثيات المتعامدة كما هو موضح بالشكل ١ – ٣ جميع هذه النقط وكذلك غيرها من النقط التي يمكن الحصول عليها باستخدام قيم أخرى لـ x تقع على خط مستقيم وهو الشكل المطلوب .



الشكل ١ – ٣

وبما أن الشكل البياني للمعادلة $y = 2x - 3$ هو خط مستقيم فإننا نسمي أحياناً $F(x) = 2x - 3$ دالة خطية

وبشكل عام فإن $F(x) = ax + b$ حيث a, b ثوابت دالة خطية وشكلها البياني هو خط مستقيم .

لاحظ أن نقطتين فقط لازمتين لرسم الدالة الخطية لأن نقطتين كافيتان لتحديد خط

١ – ٢٢ عبر بيانياً عن المعادلة $y = x^2 - 2x - 8$

الحل :

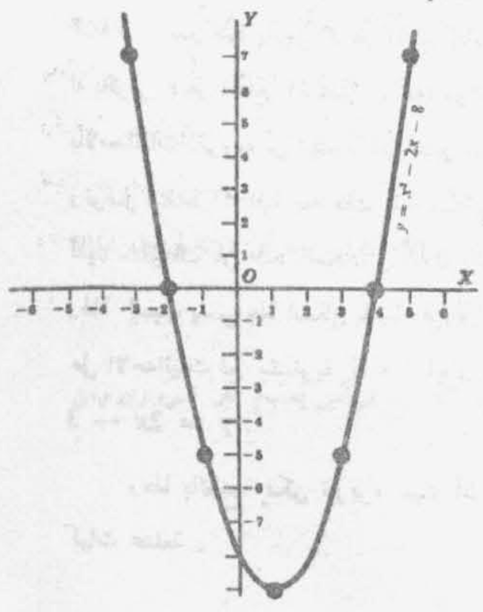
يظهر الجدول قيم y المقابلة للقيم المختلفة لـ x وعلى سبيل المثال فعندما $x = 2$

$y = (-2)^2 - 2(-2) - 8 = 4 + 4 - 8 = 0$

x	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
y	7	0	−5	−8	−9	−8	−5	0	7

من الجدول فإن النقط الموضحة بالشكل هي $(-3, 7)$
$(-2, 0), (-1, -5), (0, -8), (1, -9), (2, -8)$
$(3, -5), (4, 0), (5, 7)$

هذه النقط وغيرها من النقط التي يمكن الحصول عليها باستخدام



الشكل ١ – ٤

قيم مختلفة لـ x ، تقع على المنحنى الموضح بالشكل ١ — ٤ . هذا المنحنى يسمى قطع مكافىء .

والدالة $F(x) = x^2 - 2x - 8$

تسمى دالة من الدرجة الثانية . وبشكل عام فإن الرسم البياني للمعادلة $y = a + bx + cx^2$ حيث a, b, c ثوابت و $c \neq 0$ يعبر عن قطع مكافىء . أما إذا كانت $c = 0$ فإن الشكل يعبر عن خط مستقيم كما فى المسألة ١ — ٢١ .

١ — ٢٣ الجدول ١ — ٢ يعطى عدد سكان الولايات المتحدة (بالمليون) للسنوات $1840, 1850, \ldots, 1960$. ارسم هذه البيانات .

جدول ١ — ٢ سكان الولايات المتحدة (بالمليون) ، 1960 — 1840

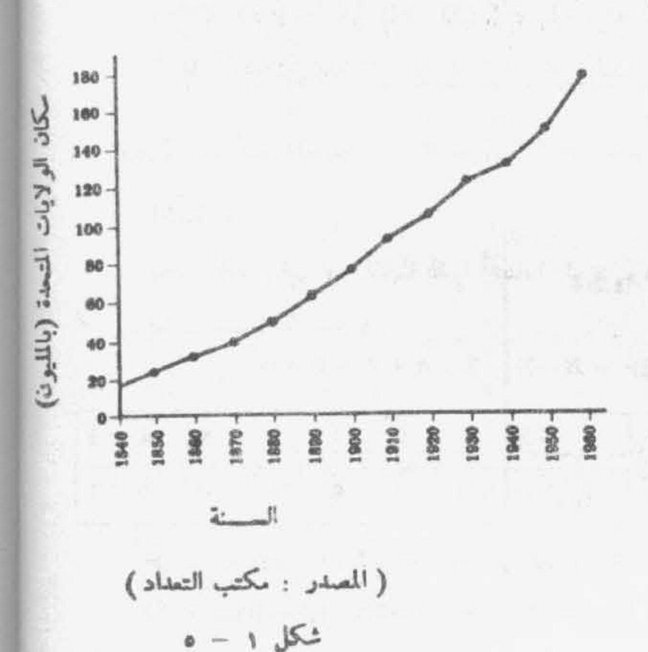
السنة	1840	1850	1860	1870	1880	1890	1900	1910	1920	1930	1940	1950	1960
السكان (بالمليون)	17·1	23·2	31·4	39·8	50·2	62·9	76·0	92·0	105·7	122·8	131·7	151·1	179·3

المصدر : مكتب التعداد

الطريقة الأولى :

بالرجوع إلى الشكل ١ — ٥ فإننا فى الرسم اعتبرنا أن السكان ، يعبر عنها بالرمز P هو المتغير التابع بينما الزمن ، يرمز له بالرمز t هو المتغير المستقل . وتحدد مواضع النقط كالمعتاد بالاحداثيات المقروءة من الجدول فمثلا على سبيل المثال $(1880, 50.2)$ وتوصل النقاط المتتالية بعد ذلك بخط مستقيم حيث أنه لاتوجد لدينا معلومات عن عدد السكان فى خلال السنوات المتوسطة . ولهذا السبب يسمى هذا الشكل بالخط البيانى لاحظ أن الوحدات على الاحداثيات غير متساوية كما هو الحال عند رسم المعادلة $y = 2x - 3$.

وهذا بالطبع يمكن تبريره حيث أن المتغيران يمثلان كميات مختلفة .



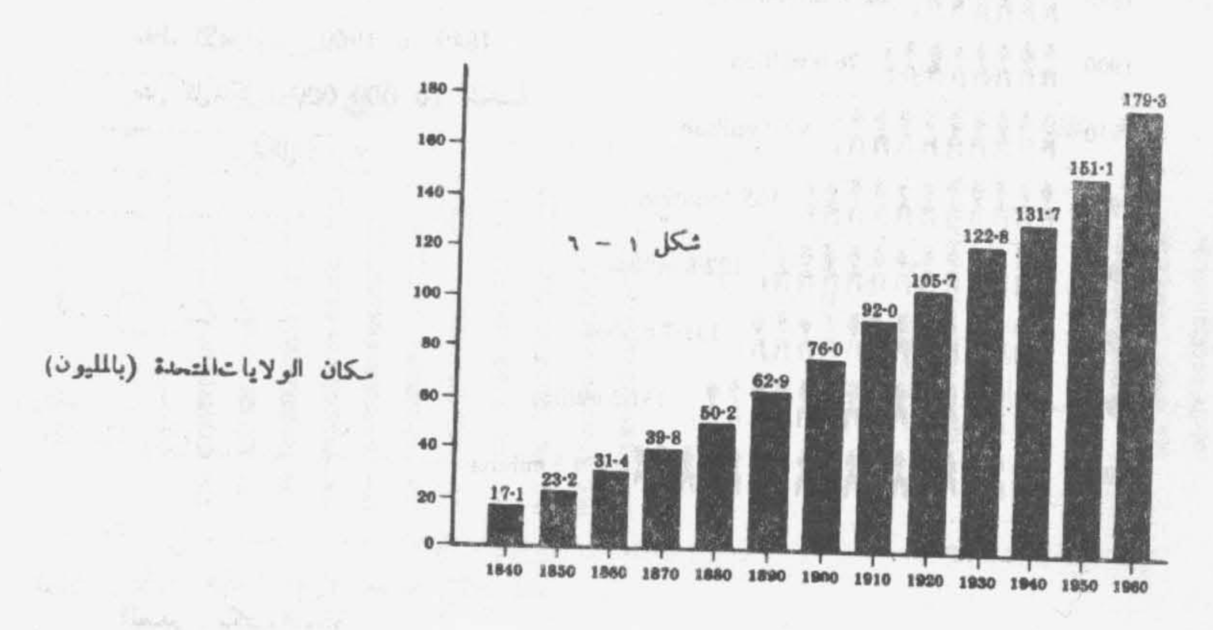
(المصدر : مكتب التعداد)

شكل ١ — ٥

لاحظ أيضاً أن الصفر قد وضع على المحور الرأسي وليس (لأسباب واضحة) على المحور الأفقي . وبشكل عام يجب أن يوضح الصفر وبخاصة على المحور الرأسي .

فإذا كان من المستحيل وضع الصفر لأي سبب وإذا كان حذفه قد يؤدي إلى استنتاجات خاطئة بواسطة القارىء فإنه من الممكن لفت النظر إلى هذا الحذف بإحدى الوسائل كما هو موضح في المسألة ١ — ٢٦ . الجدول أو الرسم البياني الذي يوضح توزيع متغير كدالة في الزمن يسمى سلسلة زمنية .

الطريقة الثانية :



المصدر : مكتب التعداد

الشكل ١ — ٦ يسمى بالأعمدة البيانية ، خرائط الأعمدة أو مخططات الأعمدة . عرض الأعمدة ليس له أي دلالة في هذه الحالة ويمكن أن يأخذ أي حجم مادامت الأعمدة لاتتراكب فوق بعضها .

الأرقام الموضحة على الأعمدة من الممكن تركها أو حذفها . فإذا أبقينا عليها فإن التدريج الرأسي يصبح غير ضروري ومن الممكن حذفه .

الطريقة الثالثة :

1840	17·1 million
1850	23·2 million
1860	31·4 million
1870	39·8 million
1880	50·2 million
1890	62·9 million
1900	76·0 million
1910	92·0 million
1920	105·7 million
1930	122·8 million
1940	131·7 million
1950	151·1 million
1960	179·3 million

سكان الولايات المتحدة

خلال الأعوام 1840 *to* 1960

يمثل كل شكل 10 000 000 شخصاً

شكل ١ – ٧

المصدر : مكتب التعداد

الخرائط أو المخططات كالتى فى الشكل ١ – ٧ تسمى بالرسوم التصويرية أو الخرائط المصورة . وعادة تستخدم لتوضيح البيانات الإحصائية بطريقة مشوقة للعامة . وكثير من هذه الرسوم التصويرية تظهر مقدرة كبيرة على الابتكار والابداع فى فن توضيح البيانات .

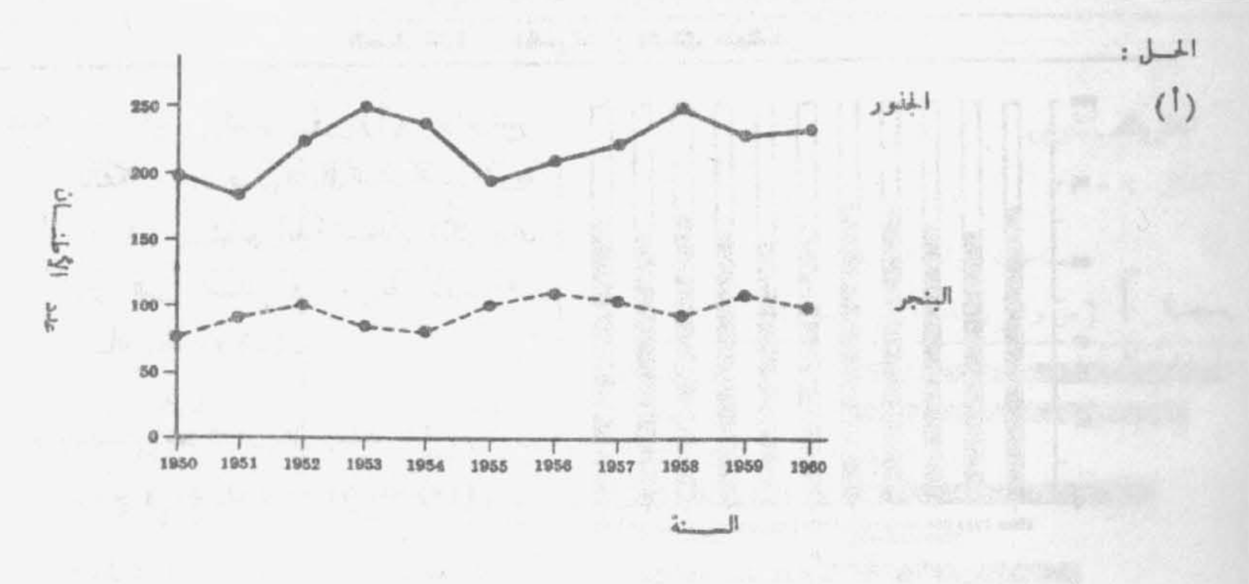
الأرقام على يمين الرسوم فى الرسم التصويرى السابق يمكن إدراجها أو عدم إدراجها وعند حذفها فإنه يظل من الممكن للقارىء تقدير عدد السكان إلى أقرب خمسة ملايين شخص .

١ – ٢٤ عبر بيانياً عن بيانات المسألة ١ – ١٤ باستخدام

(أ) الخطوط البيانية (ب) الأعمدة البيانية

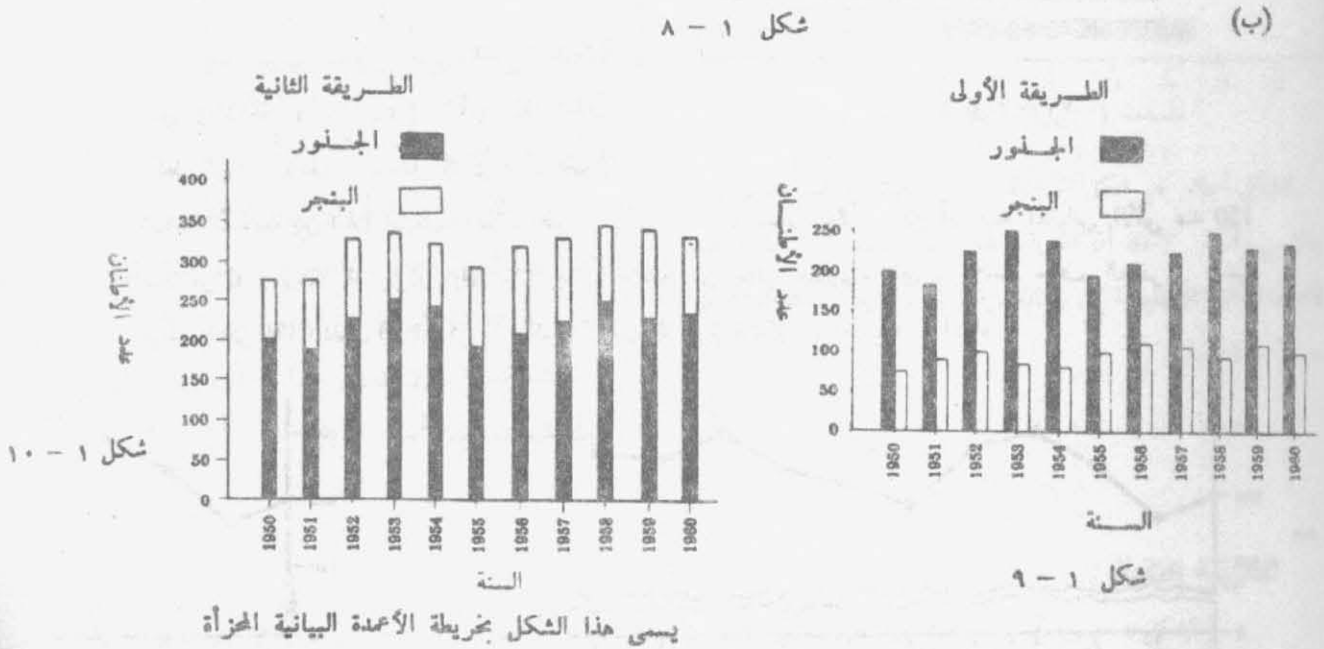
الحـل :

(أ)



شكل ١ – ٨

(ب)



شكل ١ – ٩

شكل ١ – ١٠

يسمى هذا الشكل بخريطة الأعمدة البيانية المجزأة

١ – ٢٥ (أ) عبر عن عدد الأطنان السنوية من الجذور والبنجر فى المسألة ١ – ١٤ كنسبة من مجموع الإنتاج السنوى .

(ب) ارسم النسب التى حصلت عليها فى (أ)

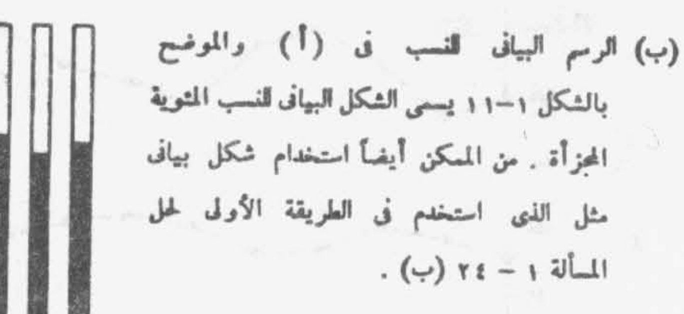
الحـل :

(أ) فى 1950 نسبة الجذور $\frac{200}{200 + 75} = 72{\cdot}7\%$ ونسبة البنجر $= 100\% - 72{\cdot}7\% = 27{\cdot}3\%$

جـدول ١ – ٣

السـنة	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958	1959	1960
نسبة الجـذور	72·7	67·3	69·2	74·6	75·0	66·1	65·6	68·2	72·5	67·6	70·1
نسبة البنجر	27·3	32·7	30·8	25·4	25·0	33·9	34·4	31·8	27·5	32·4	29·9

(ب) الرسم البيانى للنسب فى (أ) والموضح بالشكل ١–١١ يسمى الشكل البيانى للنسب المئوية المجزأة . من الممكن أيضاً استخدام شكل بيانى مثل الذى استخدم فى الطريقة الأولى لحل المسألة ١ – ٢٤ (ب) .

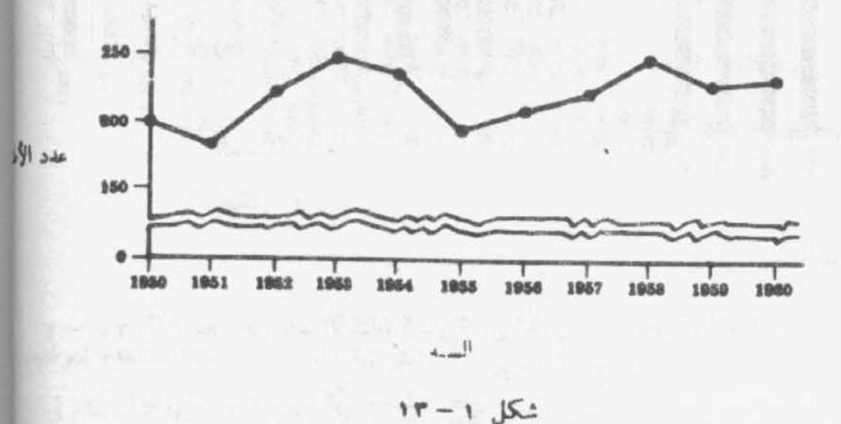


شكل ١ – ١١

١ – ٢٦ باستخدام الخط البيانى مثل بيانات انتاج الجذور الموضح فى الجدول ١ – ١ بالمسألة (١٤) .

الحـل :

الخط البيانى المطلوب يمكن الحصول عليه من حل (المسألة ١ – ٢٤) (أ) وذلك بحذف الخط البيانى الأدنى . وهذا يؤدى إلى ظهور مساحة مضاعفة بين الخط البيانى الأعلى والمحور الرأسى . ولتجنب ذلك يمكن أن نبدأ المقياس الأفقى عند 150 بدلا من 0 . وهذا قد يؤدى إلى استنتاجات خاطئة من جانب القارىء الذى لا يلاحظ حذف الصفر . وحتى نوجه النظر لهذا الحذف فمن الممكن أن يكون الرسم كما فى (الشكل ١ – ١٢) أدناه .



شكل ١ – ١٣

شكل ١ – ١٢

أسلوب آخر يمكن استخدامه حتى نوجه النظر إلى حذف الصفر نستخدم خطاً متعرجاً على أحد الاحداثيات كما هو موضح (بالشكل ١ – ١٣) أعلاه .

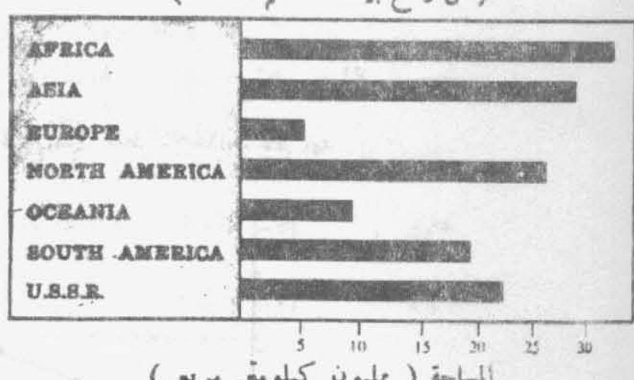
١ – ٢٧ الجدول ١ – ٤ يظهر مساحات القارات المختلفة فى العالم معبراً عنها بمليون الكيلومترات المربعة ، عبر بيانياً عن هذه البيانات .

الطريقة الأولى :

الشكل ١ – ١٤

مساحات قارات العالم

(من واقع بيانات الأمم المتحدة)



المساحة (بمليون كيلومتر مربع)

الشكل أعلاه هو شكل الأعمدة البيانية حيث الأعمدة أفقية بدلا بدلا من رأسية . لاحظ أن القارات قد رتبت حسب الترتيب الأبجدى لأسمائها (باللغة الإنجليزية) . وكان من الممكن ترتيبها تصاعدياً أو تنازلياً حسب مساحاتها .

جدول ١ – ٤

مساحات قارات العالم

القارة	المساحة بمليون كيلومتر (مربع)
أفريقيا	30.3
آسيا	26.9
أوروبا	4.9
أمريكا الشمالية	24.3
استراليا و نيوزيلندا	8.5
أمريكا الجنوبية	17.9
الاتحاد السوفييتى	20.5
المجموع	133.3

المصدر الأمم المتحدة

ملحوظة ١ – مساحة أوروبا لاتتضمن مساحة الاتحاد السوفيتى والبلاد الخاضعة لسيطرته حيث ظهر فى خانة الـ *U.S.S.R* (الاتحاد السوفيتى)

ملحوظة ٢ – لاتتضمن مساحة أوروبا تركيا حيث ظهرت ضمن أسيا .

الطريقة الثانية :

(الشكل ١ – ١٥) يسمى بالرسم الدائرى أو الخريطة التوضيحية الدائرية . لرسم هذا الشكل تستخدم النتيجة بأن المساحة الكلية 133.3 مليون كيلومتر مربع وهذه تقابل مجموع درجات قوس الدائرة أى 360° .

وبهذا فإن كل مليون كيلومتر مربع يقابله 360°/133.3 ومن هذا فإن أفريقيا ومساحتها 30.3 مليون كيلومتر مربع يقابلها قوس المقدار 82° = (360°/133.3) 30.3 بينما آسيا ، أوروبا ، أمريكا الشمالية استراليا ونيوزيلندا ، أمريكا الجنوبية والاتحاد السوفيتى يقابلها قوس المقدار 73°, 13°, 66°, 23°, 48° and 55° على التوالى .

وباستخدام المنقلة فإن خطوط التقسيم المطلوبة يمكن رسمها .

مساحة قارات العالم

(بمليون كيلومتر مربع)



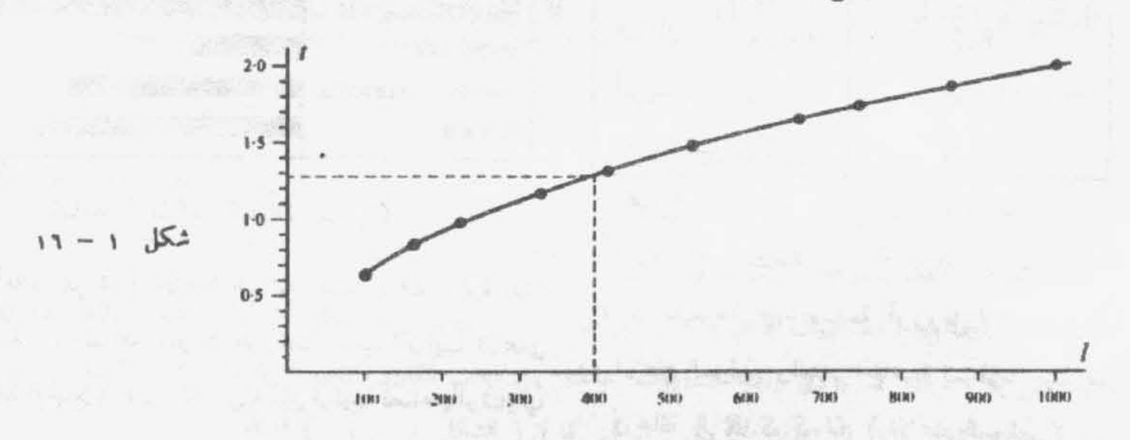
شكل ١ – ١٥

١ – ٢٨ الملاحظات التالية سجلت فى معمل للطبيعة للزمن t (بالثوانى) اللازم لكى يكمل بندول طوله l (بالمليمترات) اهتزازة واحدة (أ) أعرض بيانياً t كدالة فى l (ب) من الرسم قدر t لبندول طوله 400 مليمتر

l	101	162	222	338	420	534	667	745	866	1000
t	0·64	0·81	0·95	1·17	1·30	1·47	1·65	1·74	1·87	2·01

الحـــل :

(أ) الخط البيانى الموضح بالشكل ١ – ١٦ حصلنا عليها بتوصيل نقط الملاحظات بخط ممهد .



شكل ١ – ١٦

(ب) القيمة المقدرة لـ t هى 1.27 ثانية .

المعادلات :

١ – ٢٩ حل المعادلات التالية :

(أ) $4a - 20 = 8$

أضف 20 إلى طرفى المعادلة $4a - 20 + 20 = 8 + 20$ أو $4a = 82$

اقسم الطرفين على 4 : $4a/4 = 28/4$ و $a = 7$

تحقيق : $4(7) - 20 = 8, 28 - 20 = 8, 8 = 8$

(ب) $3X + 4 = 24 - 2X$

اطرح 4 من طرفى المعادلة $3X + 4 = 24 - 2X - 4$ أو $3X = 20 - 2X$

أضف $2X$ إلى الطرفين $3X + 2X = 20 - 2X + 2X$ أو $5X = 20$

اقسم الطرفين على 5 : $5X/5 = 20/5$ و $X = 4$

تحقيق : $3(4) + 4 = 24 - 2(4), 12 + 4 = 24 - 8, 16 = 16$

من الممكن الحصول على الحل بطريقة أسرع بمعلومية أنه من الممكن نقل أو تحريك أى حد من أحد طرفى المعادلة إلى الطرف الآخر بعد تغيير إشاراته . وبهذا يمكن أن نكتب

$$3X + 4 = 24 - 2X, \quad 3X + 2X = 24 - 4, \quad 5X = 20, \quad X = 4$$

(جـ)
$$18 - 5b = 3(b + 8) + 10$$

$$18 - 5b = 3b + 24 + 10, 18 - 5b = 3b + 34$$

للتحويل $18 - 34 = 5b - 3b$ أو $-16 = -8b$

بالقسمة على $-8, \frac{-8b}{-8} = \frac{16}{-8}$ و $b = -2$

تحقيق : $18 - 5(-2) = 3(-2 + 8) + 10, 18 + 10 = 3(6) + 10, 28 = 28$

(د)
$$\frac{Y + 2}{3} + 1 = \frac{Y}{2}$$

اضرب أولا الطرفين فى 6 ، العامل المشترك الأصغر للمقام

$$6\left(\frac{Y + 2}{3} + 1\right) = 6\left(\frac{Y}{2}\right), \quad 6\left(\frac{Y + 2}{3}\right) + 6(1) = \frac{6Y}{2}, \; 2(Y + 2) + 6 = 3Y$$
$$2Y + 4 + 6 = 3Y, \quad 2Y + 10 = 3Y, \quad 10 = 3Y - 2Y, \quad Y = 10$$

تحقيق : $\frac{10 + 2}{3} + 1 = \frac{10}{2}, \; \frac{12}{3} + 1 = \frac{10}{2}, \; 4 + 1 = 5, \; 5 = 5$

١ - ٣٠ حل كل من مجموعات المعادلات الآنية التالية :

(أ)
$$\left.\begin{aligned} 3a - 2b &= 11 \\ 5a + 7b &= 39 \end{aligned}\right\}$$

اضرب المعادلة الأولى فى 7 : $21a - 14b = 77$ (١)

اضرب المعادلة الثانية فى 2 : $10a + 14b = 78$ (٢)

أجمع $31a = 155$

اقسم على 31 : $a = 5$

لاحظ أنه بضرب المعادلات المعطاة فى الأرقام المناسبة فإنه يمكننا كتابة معادلتين مكافئتين وهما (١) ، (٢) . حيث تتساوى القيمة العددية لمعاملات المجهول . وبجمع المعادلتين فإنه يمكن حذف المجهول b وبهذا نحصل على قيمة a .

وبالتعويض عن a فى المعادلة الأولى : $3(5) - 2b = 11, -2b = -4, b = 2$.

وبهذا نحصل على $b = 2$ ، $a = 5$

تحقيق : $3(5) - 2(2) = 11,\ 15 - 4 = 11,\ 11 = 11.$
$5(5) + 7(2) = 39,\ 25 + 14 = 39,\ 39 = 39$

(ب)
$$\left.\begin{aligned} 5X + 14Y &= 78 \\ 7X + 3Y &= -7 \end{aligned}\right\}$$

اضرب المعادلة الأولى فى 3 $\qquad 15X + 42Y = 234 \qquad (١)$

اضرب المعادلة الثانيه فى 14− $\qquad -98X - 42Y = 98 \qquad (٢)$

اجمع $\qquad -83X = 332$

اقسم على 83 − : $\qquad X = -4$

بالتعويض عن $X = -4$ فى المعادلة الأولى $5(-4) + 14Y = 78,\ 14Y = 98,\ Y = 7$

أى $X = -4,\quad Y = 7$

تحقيق : $5(-4) + 14(7) = 78,\ -20 + 98 = 78,\ 78 = 78.$
$7(-4) + 3(7) = -7,\ -28 + 21 = -7,\ -7 = -7$

(جـ)
$$\left.\begin{aligned} 3a + 2b + 5c &= 15 \\ 7a - 3b + 2c &= 52 \\ 5a + b - 4c &= 2 \end{aligned}\right\}$$

اضرب المعادلة الأولى فى 2 :
اضرب المعادلة الثانية فى 5 − :
اجمع

$$\begin{aligned} 6a + 4b + 10c &= 30 \\ -35a + 15b - 10c &= -260 \\ \hline -29a + 19b &= -230 \end{aligned} \qquad (١)$$

اضرب المعادلة الثانية فى 2 :
ضع المعادلة الثالثة :

$$\begin{aligned} 14a - 6b + 4c &= 104 \\ 5a + b - 4c &= 2 \\ \hline 19a - 5b &= 106 \end{aligned} \qquad (٢)$$

وبهذا نكون قد حذفنا c ويبقى لدينا المعادلتين (١) ، (٢) والتى يمكن حلها آنياً لنحصل على قيم b ، a

اضرب المعادلة (١) فى 5 :
اضرب المعادلة (٢) فى 19 :
اجمع
اقسم على 216 :

$$\begin{aligned} -145a + 95b &= -1150 \\ 361a - 95b &= 2014 \\ \hline 216a &= 864 \\ a &= 4 \end{aligned}$$

بالتعويض عن $a = 4$ في (١) أو (٢) نجد أن $b = -6$

بالتعويض عن $b = -6,\ a = 4$ في أي من المعادلات المعطاة نحصل على قيمة $c = 3$.

أي أن $a = 4,\ b = -6 . c = 3$

تحقيق : $3(4) + 2(-6) + 5(3) = 15,\ 15 = 15.\ 7(4) - 3(-6) + 2(3) = 52,\ 52 = 52$
$5(4) + (-6) - 4(3) = 2,\ 2 = 2.$

المتباينات :

١ - ٣١ عبر بالكلمات عن معنى مايلي :

(أ) $N > 30$ — N أكبر من 30

(ب) $X \leqq 12$ — X أقل من أو تساوى 12

(جـ) $0 < p \leqq 1$ — p أكبر من الصفر وأقل من أو تساوى الواحد

(د) $\mu - 2t < X < \mu + 2t$ — X أكبر من $\mu - 2t$ وأقل من $\mu + 2t$

١ - ٣٢ ترجم مايلي إلى رموز

(أ) المتغير X يأخذ فيما بين 5,2 بما في ذلك 5,2 : $2 \leqq X \leqq 5$

(ب) الوسط الحسابي $\bar{X}$ أكبر من 28.42 ولكن أقل من 31.56 : $28.42 < \bar{X} < 31.56$:

(جـ) m مقدار موجب أقل من أو يساوى 10 : $0 < m \leqq 10$

(د) P مقدار غير سالب : $P \geqq 0$

١ - ٣٣ باستخدام رموز المتباينات رتب الأرقام $3{\cdot}42,\ -0{\cdot}6,\ -2{\cdot}1,\ 1{\cdot}45,\ -3$

(أ) ترتيباً تصاعدياً حسب قيمها

(ب) ترتيباً تنازلياً حسب قيمها

الحل :

(أ) $-3 < -2{\cdot}1 < -0{\cdot}6 < 1{\cdot}45 < 3{\cdot}42$

(ب) $3{\cdot}42 > 1{\cdot}45 > -0{\cdot}6 > -2{\cdot}1 > -3$

لاحظ أنه عند تعيين الأرقام كنقط على خط (أنظر المسألة ١ - ١٨) فإنها تتزايد من اليسار إلى اليمين .

١ – ٣٤ فى كل مايلى أوجد المتباينة المقابلة فى X . بمعنى حل كل متباينة فى X

(أ) $2X < 6$ اقسم الطرفين على 2 لتحصل على $X < 3$

(ب) $3X - 8 \geq 4$ بإضافة 8 على كلا الطرفين $3X \geq 12$ أقسم الطرفين على 3 لتحصل على $X \geq 4$.

(جـ) $6 - 4X < -2$ بإضافة 6 - على كلا الطرفين ، $-4X < -8$ وبقسمة الطرفين على -4 نحصل على $X > 2$

لاحظ أنه كما فى المعادلات يمكن نقل حد من طرف إلى آخر من أطراف المتباينة مع تغيير إشارة الحد المنقول .

مثال الجزء (ب)

(د) $-3 < \frac{X-5}{2} < 3$ بالضرب فى 2 ، $-6 < X - 5 < 6$ ، بإضافة 5 . $-1 < X < 11$

(هـ) $-1 \leq \frac{3-2X}{5} \leq 7$ بالضرب فى 5 ، $-5 \leq 3 - 2X \leq 35$ ، بإضافة 3 — نحصل على $-8 \leq -2X \leq 32$ ، بالقسمة على 2 — $4 \geq X \geq -16$ أو $-16 \leq X \leq 4$

اللوغارتيمات والاعداد المقابلة للوغارتيمات :

١ – ٣٥ حدد العدد البيانى للوغاريتمات المعتادة (الأساس 10) لكل من الأرقام التالية :

(أ) 57 (جـ) 5.63 (هـ) 982.5 (ز) 186000 (ط) 0.7314 (ك) 0.0071

(ب) 57.4 (د) 35.63 (و) 7824 (ح) 0.71 (ى) 0.0325 (ل) 0.0003

الحـل :

(أ) 1 (جـ) 0 (هـ) 2 (ز) 5 (ط) 10 — 9 (ك) 10 — 7

(ب) 1 (د) 1 (و) 3 (ح) 10—9 (ى) 10 — 8 (ل) 10 — 6

١ – ٣٦ تحقق من اللوغاريتمات التالية :

(أ) $\log 87.2$ الجزء العشرى $= 0.9405$ ، العدد البيانى $= 1$ وبهذا يكون $\log 87.2 = 1.9405$

(ب) $\log 37\,300 = 4{\cdot}5717$ (د) $\log 9{\cdot}21 = 0{\cdot}9643$

(جـ) $\log 753 = 2{\cdot}8768$ (هـ) $\log 54{\cdot}50 = 1{\cdot}7364$

(و) $\log 0.382$ الجزء العشرى $= 0.5821$ ، العدد البياني $=$ وبهذا يكون $\log 0.382 = 9.5821 - 10$

(ز) $\log 0.00159 = 7.2014 - 10$ (ط) $\log 0.000827 = 6.9175 - 10$

(ح) $\log 0.0753 = 8.8768 - 10$ (ى) $\log 0.0503 = 8.7016 - 10$

(ك) $\log 4.638$ الجزء العشرى لـ $\log 4638$ هو 0.8 من المسافة بين الجزء العشرى لـ $\log 4630$ والجزء العشرى لـ $\log 4640$

الجزء العشرى لـ $\log 4640 = 0.6665$

الجزء العشرى لـ $\log 4630 = 0.6656$

الفرق الجدولى $= 0.0009$

الجزء العشرى $\log 4.638 = 0.6656 + (0.8)(0.00009)$

$= 0.6663$ إلى أربعة أرقام عشرية

وبهذا يكون $\log 4.638 = 0.6663$

وهذه العملية تسمى الاستكمال الخطى

وإذا رغبنا ، فإن خانة الفروق فى الجدول صفحة ٥٣٦ و ٥٣٧ من الممكن استخدامها لإيجاد الجزء العشرى مباشرة $(6656 + 7)$

(ل) $\log 6.753 = 0.8295\ (8293 + 2)$ (ع) $\log 0.2548 = 9.4062 - 10\ (4048 + 14)$

(م) $\log 183.2 = 2.2630\ (2625 + 5)$ (ف) $\log 0.04372 = 8.6407 - 10\ (6405 + 2)$

(ن) $\log 43.15 = 1.6350\ (6345 + 5)$ (ص) $\log 0.009848 = 7.9933 - 10\ (9930 + 3)$

(س) $\log 876400 = 5.9427\ (9425 + 2)$ (ق) $\log 0.0001788 = 6.2524 - 10\ (2504 + 20)$

١ - ٣٧ تحقق من الأعداد المقابلة للوغاريتمات

(أ) antilog 1.9058

من الجدول فإن الجزء العشرى 0.9058 يقابل الرقم 805 . وبما أن العدد البياني هو 1 ، فإن العدد به رقمان قبل العلامة العشرية وبهذا يكون العدد المطلوب هو 80.5 أى $\text{antilog } 1.9058 = 80.5$

(ب) $\text{antilog } 3.8531 = 7130$, $\text{antilog } 2.1875 = 154$, $\text{antilog } 0.4997 = 3.16$,
$\text{antilog } 4.9360 = 86\,300$

(جـ) $\text{antilog } 7.8657 - 10$

من الجدول فإن الجزء العشرى 0.8657 يقابل الرقم 734 وحيث أن العدد البياني هو $7 - 10$ فإن الرقم يحتوى على صفرين تاليين مباشرة للعلامة العشرية . وبهذا يكون الرقم المطلوب هو 0.00734

أى $7.8657 - 10 = 0.00734$

وإذا رغبنا ، فإن خانة الفرق فى الجدول صفحة ٥٣٦ ، ٥٣٧ من الممكن استخدامها لإيجاد الجزء العشرى مباشرة

(د) $\text{antilog } 2.3927 = 0.0247, \ \text{antilog } 9.8267 - 10 = 0.671,$

$\text{antilog } 7.7443 - 10 = 0.00555$ (هـ) $\text{antilog } 9.3842 - 10$

وبما أن الجزء العشرى غير موجود بالجداول فإننا نلجأ إلى الاستكمال :

الجزء العشرى لـ $\log 2430 = 0.3856$ الجزء العشرى المعطى $= 0.3842$

الجزء العشرى لـ $\log 2420 = 0.3838$ الجزء العشرى التالى فى الصغر $= 0.3838$

الفرق الجدول $= 0.0018$ الفرق $= 0.0004$

وبهذا $2422 = (4/18)(2430 - 2420) + 2420$ إلى أربعة أرقام ويكون الرقم المطلوب هو 0.2422.

(و)

$$\begin{aligned} &\text{antilog } 2{\cdot}6715 = 469{\cdot}3 && (3/9 \times 10 = 3 \text{ approx.}) \\ &\text{antilog } 4{\cdot}1853 = 15\,320 && (6/28 \times 10 = 2 \text{ approx.}) \\ &\text{antilog } 0{\cdot}9245 = 8{\cdot}404 && (2/5 \times 10 = 4) \end{aligned}$$

(ز)

$$\begin{aligned} &\text{antilog } 1{\cdot}6089 = 0{\cdot}4064 && (4/11 \times 10 = 4 \text{ approx.}) \\ &\text{antilog } 8{\cdot}8907 - 10 = 0{\cdot}077\,75 && (3/6 \times 10 = 5) \\ &\text{antilog } 1{\cdot}2000 = 15{\cdot}85 && (13/27 \times 10 = 5 \text{ approx.}) \end{aligned}$$

الحسابات باستخدام اللوغارتيمات :

احسب كلا مما يلى باستخدام اللوغاريتمات :

١ - ٣٨ $P = (3.81)(43.4)$. $\log P = \log 3.81 + \log 43.4$

$$\log 3.81 = 0.5809$$

$$(+) \ \log 43.4 = 1.6375$$

$$\log P = 2.2184$$

إذن $P = \text{antilog } 2.2184 = 165.3$

أو 165 إلى ثلاثة أرقام معنوية لاحظ الدلالة الأسية للحساب حيث

$$(3{\cdot}81)(43{\cdot}4) = (10^{0{\cdot}5809})(10^{1{\cdot}6375}) = 10^{0{\cdot}5809 + 1{\cdot}6375} = 10^{2{\cdot}2184} = 165{\cdot}3$$

١ ٣٩ $P = (73.42)(0.004\,620)(0.5143)$ $\log P = \log 73.42 + \log 0.004\,620 + \log 0.5143$

$$\begin{aligned} \log 73{\cdot}42 &= 1{\cdot}8658 \\ (+) \ \log 0{\cdot}004\,620 &= 7{\cdot}6646 - 10 \\ (+) \ \log 0{\cdot}5143 &= 9{\cdot}7112 - 10 \\ \log P &= 19{\cdot}2416 - 20 = 9{\cdot}2416 - 10 \end{aligned}$$

إذن $P = .1744$

١ - ٤٥

$$P = \sqrt{\frac{(874\cdot3)(0\cdot038\,16)(28\cdot53)^3}{(1\cdot754)^4\,(0\cdot007\,352)}}$$

log 874·3	= 2·9417	=	2·9417
log 0·038 16	= 8·5816 − 10	=	8·5816 − 10
3 log 28·53	= 3(1·4553)	=	4·3659
Add:			15·8892 − 10
		(−)	8·8424 − 10
			7·0468

4 log 1·754 = 4(0·2440)	=	0·9760
log 0·007 352	=	7·8664 − 10
Add:		8·8424 − 10

Then $\log P = \frac{1}{2}(7{\cdot}0468) = 3{\cdot}5234$, and $P = 3338$.

مسائل اضافية

المتغيرات :

١ - ٤٦ حدد أى من البيانات التالية تمثل بيانات متقطعة وأياً منها تمثل بيانات متصلة :

(أ) عدد ملليمترات الأمطار الساقطة على مدينة ما خلال أشهر السنة المختلفة .

(ب) سرعة سيارة بالكيلومترات / ساعة .

(ج) عدد أوراق النقد فئة 5 £ المتداولة بالمملكة المتحدة فى فترة ما .

(د) القيمة الإجمالية للأسهم المباعة يومياً فى سوق الأوراق المالية .

(هـ) عدد الطلبة المسجلين بجامعة على مدار عدد من السنين .

الحـل : (أ) متصلة (ب) متصلة (ج) متقطعة (د) متقطعة (هـ) متقطعة .

١ - ٤٧ وضح مجال كل من المتغيرات التالية وحدد أيا من هذه المتغيرات متصل وأى منها متقطع .

(أ) العدد W من كيلوجرامات القمح التى ينتجها الفدان فى مزرعة على مدار عدد من السنين .

(ب) العدد N للافراد فى عائلة .

(ج) الحالة الاجتماعية لشخص .

(د) الزمن t لطيران صاروخ .

(هـ) العدد P للبتلات فى زهرة .

الحـل :

(أ) الصفر ومابعده ، متصل (ب) 2, 3,... متقطعة .

(ج) أعزب ، متزوج ، مطلق ، منفصل ، أرمل ، متقطعة .

(د) الصفر وما بعده ، متصل .

(هـ) 0, 1, 2, ... متقطعة .

تقريب البيـــانات ، الرموز العلميـــة والأرقام المعنوية :

١ – ٤٨ قرب الأرقام التالية إلى درجة الدقة المشار إليها :

(أ) 3256 أقرب مئة
(ب) 5·781 أقرب نسبة من العشرة
(ﺟ) 0·0045 أقرب نسبة من ألف
(د) 46·7385 أقرب نسبة من مئة
(ﻫ) 125·9995 إلى رقين عشرين
(و) 3 502 378 أقرب مليون
(ز) 148·475 أقرب وحدة
(ح) 0·000 098 501 أقرب نسبة من المليون
(ط) 2184·73 أقرب عشرة
(ى) 43·875 00 أقرب نسبة من المئة

الحــل :

(أ) 3300 (ب) 5.8 (ﺟ) 0.004 (د) 46.74 (ﻫ) 126.00 (و) 4000 000 (ز) 148
(ح) 0.000 099 (ط) 2180 (ى) 43.88 .

١ – ٤٩ عبر عن الأرقام التالية بدون استخدام قوى الرقم 10

(أ) 132.5×10^{4} (ب) 418.72×10^{-5} (ﺟ) 280×10^{-7} (د) 7300×10^{6} (ﻫ) 3.487×10^{-4}
(و) 0.0001850×10^{5}

الحــل :

(أ) 1325000 (ب) 0.004 187 2 (ﺟ) 0.000 028 0 (د) 7 300 000 000 (ﻫ) 0.000 3487
(و) 18.50

١ – ٥٠ ماهو عدد الأرقام المعنوية فى الأرقام التالية إذا افترضنا أن الأرقام قد سجلت بدقة :

(أ) 2·54 mm
(ب) 0·004 500 m
(ﺟ) 3 510 000 litres
(د) 3·51 million litres
(ﻫ) 10·000 100 m
(و) 378 people
(ز) 378 g
(ح) $4{\cdot}50 \times 10^{-3}$ km
(ط) $500{\cdot}8 \times 10^{5}$ kg
(ى) 100·00 km

الحــل : (أ) 3 (ب) 4 (ﺟ) 7 (د) 3 (ﻫ) 8 (و) غير محدود (ز) 3 (ح) 3
(ط) 4 (ى) 5

١ – ٥١ ماهو الحد الأقصى للخطأ فى القياسات التالية إذا افترضنا أنها مسجلة بدقة ؟ حدد عدد الأرقام المعنوية لكل رقم فى كل حالة .

(أ) 7·20 million litres
(ب) 0·000 048 35 millimetres
(ﺟ) 5280 metres
(د) $3{\cdot}0 \times 10^{8}$ metres
(ﻫ) 186 000 metres per second
(و) 186 thousand metres per second

الحـل :

(أ) 0·005 million or 5000 litres; 3 (جـ) 0·5 m; 4 (هـ) 0·5 m/s; 6

(ب) 0·000 000 005 or 5×10^{-9} mm; 4 (د) $0·05 \times 10^8$ or 5×10^6 m; 2 (و) 0·5 thousand or 500 m/s; 3

١ – ٥٧ اكتب الأرقام التالية باستخدام الرموز العلمية ، مفترضاً أن جميع الارقام معنوية إلا إذا ذكر غير ذلك .

(أ) 0.000317 (ب) 428 000 000 (أربعة أرقام معنوية)

(جـ) 21 600.00 (د) 0.000 009810

(هـ) 732 ألف (و) 18.0 عشر الألف

الإجابة :

(أ) 3.17×10^{-4} (ب) 4.280×10^8 (جـ) $2.160\ 000 \times 10^4$ (د) 9.810×10^{-6}

(هـ) 7.32×10^5 (و) 1.80×10^{-3}

العمليات الحسابية :

١ – ٥٣ وضح أن (أ) حاصل ضرب (ب) حاصل قسمة ، الرقين 5.16 ، 72.48 مفترضاً أن أرقامها المعنوية هي أربعة وثلاثة على التوالي لايمكن أن يكون دقيقاً لأكثر من ثلاثة أرقام معنوية ، اكتب ناتج الضرب وناتج القسمة لدرجة الدقة المسجلة .

الاجابة : (أ) 374 (ب) 14.0

١ – ٥٤ أجر العمليات الموضحة أدناه . مفترضاً أن الأرقام مسجلة بدقة مالم يذكر خلاف ذلك

(أ) $0·36 \times 781·4$ (جـ) $5·78 \times 2700 \times 16·00$ (هـ) $\sqrt{120 \times 0·5386 \times 0·4614}$ (120 exact)

(ب) $\frac{873·00}{4·881}$ (د) $\frac{0·004\,80 \times 2300}{·2084}$ (و) $\frac{(416\,000)(0·000\,187)}{\sqrt{73·84}}$

(ز) $14·8641 + 4·48 - 8·168 + 0·361\,25$

(ح) $4\,173\,000 - 170\,264 + 1\,820\,470 - 78\,320$ الأرقام مسجلة بدقة إلى 4, 6, 6, 6 رقماً معنوياً

(ط) $\sqrt{\frac{7(4·386)^2 - 3(6·47)^2}{6}}$ الأرقام 3, 6, 7 أرقام دقيقة (ى) $4·120\sqrt{\frac{3·1416[(9·483)^2 - (5·075)^2]}{0·000\,198\,0}}$

الإجابة .

(a) 280 (two sig fig.), or 2·8 hundred, or $2·8 \times 10^2$. (b) 178·9. (c) 250 000 (three sig fig.), or 250 thousand, or 250×10^3. (d) 53·0. (e) 5·461. (f) 9·05. (g) 11·54. (h) 5 745 000 (four sig fig.), or 5 745 thousand, or 5·745 million, $5·745 \times 10^6$. (i) 1·2. (j) 4157

١ - ٥٥ احسب قيمة كل مما يلي إذا كانت $U = -2, V = \frac{1}{2}, W = 3, X = -4, Y = 9, Z = \frac{1}{6}$ حيث يفترض أن جميع الأرقام دقيقة .

(أ) $4U + 6V - 2W$

(ب) $\frac{XYZ}{UVW}$

(ج) $\frac{2X - 3Y}{UW + XV}$

(د) $3(U - X)^2 + Y$

(ه) $\sqrt{U^2 - 2UV + W}$

(و) $3X(4Y + 3Z) - 2Y(6X - 5Z) - 25$

(ز) $\sqrt{\frac{(W - 2)^2}{V} + \frac{(Y - 5)^2}{Z}}$

(ح) $\frac{X - 3}{\sqrt{(Y - 4)^2 + (U - 5)^2}}$

(ط) $X^3 + 5X^2 - 6X - 8$

(ى) $\frac{U - V}{\sqrt{U^2 + V^2}}[U^2V(W + X)]$

الإجابة :

(أ) -11 (ه) 3 (ح) $-7/\sqrt{34}$, or $-1{\cdot}200\,49$ approx.

(ب) 2 (و) -16 (ط) 32

(ج) $35/8$ or $4{\cdot}375$ (ز) $\sqrt{98}$, or $9{\cdot}899\,61$ approx. (ى) $10/\sqrt{17}$, or $2{\cdot}425\,36$ approx.

(د) 21

الدوال ، الجداول والاشكال البيانية :

١ - ٥٦ تتحدد قيمة المتغير Y من قيمة المتغير X طبقاً للمعادلة $Y = 10 - 4X$

(أ) أوجد قيمة Y إذا أخذت X القيم $X = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$ أظهر هذه النتائج فى جدول

(ب) أوجد قيمة Y إذا أخذت X القيم $X = -2{\cdot}4, -1{\cdot}6, -0{\cdot}8, 1{\cdot}8, 2{\cdot}7, 3{\cdot}5, 4{\cdot}6$

(ج) إذا كان اعتماد Y على X يعبر عنه بالعلاقة $Y = F(X)$ أوجد $F(2{\cdot}8), F(-5), F(\sqrt{2}), F(-\pi)$

(د) ماهى قيمة X المقابلة لقيم Y المساوية لـ $Y = -2, 6, -10, 1{\cdot}6, 16, 0, 10$ ؟

(ه) عبر عن X كدالة صريحة فى Y .

الإجـــابة :

(أ) $22, 18, 14, 10, 6, 2, -2, -6, -10$ (ج) $-1{\cdot}2, 30, 10 - 4\sqrt{2} = 4{\cdot}34$ approx., $10 + 4\pi = 22{\cdot}57$ approx.

(ب) $19{\cdot}6, 16{\cdot}4, 13{\cdot}2, 2{\cdot}8, -0{\cdot}8, -4, -8{\cdot}4$ (د) $3, 1, 5, 2{\cdot}1, -1{\cdot}5, 2{\cdot}5, 0$. (ه) $X = \frac{1}{4}(10 - Y)$

١ - ٥٧ إذا كانت $Z = X^2 - Y^2$ أوجد قيمة Z عندما :

(أ) $X = -2, Y = 3$ (ب) $X = 1, Y = 5$

(ج) باستخدام الرمز الدالى $Z = F(X, Y)$ أوجد $F(-3, -1)$

الإجـــابة : (أ) -5 (ب) -24 (ج) 8

١ – ٥٨ إذا كانت $W = 3XZ - 4Y^2 + 2XY$ أوجد W عندما (أ) $X = 1, Y = -2, Z = 4$

(ب) $X = -5, Y = -2, Z = 0$ (جـ) إذا استخدمنا الرمز الدال $W = F(X, Y, Z)$ أوجد $F(3, 1, -2)$

الإجـابة : (أ) -8 (ب) 4 (جـ) -16

١ – ٥٩ عين باستخدام نظام الاحداثيات المتعامدة النقط التي أحداثياتها :

(أ) $(3, 2)$ (ب) $(2, 3)$ (جـ) $(-4, 4)$ (د) $(4, -4)$

(هـ) $(-3, -2)$ (و) $(-2, -3)$ (ز) $(-4.5, 3)$ (ح) $(-1.2, -2.4)$

(ط) $(0, -3)$ (ى) $(1.8, 0)$

١ – ٦٠ عبر بيانياً عن المعادلات (أ) $y = 10 - 4x$ (أنظر المسألة ١ – ٥٦)

(ب) $y = 2x + 5$ (جـ) $y = \frac{1}{3}(x - 6)$، (د) $2x + 3y = 12$، (هـ) $3x - 2y = 6$.

١ – ٦١ عبر بيانياً عن المعادلات (أ) $y = 2x^2 + x - 10$ (ب) $y = 6 - 3x - x^2$

١ – ٦٢ عبر بيانياً عن المعادلة $y = x^3 - 4x^2 + 12x - 6$.

١ – ٦٣ الجدول التالي يوضح عدد العاملين بالزراعة وغير العاملين بها بالولايات المتحدة الأمريكية في الأعوام 1840 – 1950
عبر بيانياً عن هذه البيانات باستخدام (أ) الخطوط البيانية (ب) خرائط الأعمدة البيانية
(جـ) خرائط الأعمدة البيانية المجزأة .

السنة	1840	1850	1860	1870	1880	1890	1900	1910	1920	1930	1940	1950
العمال الزراعيين (بالمليون)	3·7	4·9	6·2	6·9	8·6	9·9	10·9	11·6	11·4	10·5	8·8	6·8
العمال غير الزراعيين (بالمليون)	1·7	2·8	4·3	6·1	8·8	13·4	18·2	25·8	31·0	38·4	42·9	52·2

المصدر : مصلحة التجارة ، مكتب التعدادات

١ - ٦٤ صمم رسماً تصويرياً ملائماً لإظهار التغيرات فى أعداد

(أ) العمال الزراعيين (ب) العمال غير الزراعيين

فى بيانات المسألة السابقة . هل يمكنك تصميم رسم تصويرى يظهر التغيرات فى كل من (أ) ، (ب) معاً ؟ .

١ - ٦٥ باستخدام بيانات المسألة ١ - ٦٣ ارسم شكلا بيانياً يوضح النسب المئوية العاملين

(أ) الزراعيين (ب) غير الزراعيين . هل يمكنك تصميم شكل بيانى يظهر كلا من (أ) ، (ب) فى نفس الوقت ؟

١ - ٦٦ الجدول التالى يظهر معدل المواليد والوفيات لكل 1000 من السكان بالولايات المتحدة فى الأعوام 1955 و 1915 عبر بيانياً عن هذه البيانات باستخدام شكل بيانى مناسب .

السنة	1915	1920	1925	1930	1935	1940	1945	1950	1955
معدل المواليد لكل 1000 من السكان	25·0	23·7	21·3	18·9	16·9	17·9	19·5	23·6	24·6
معدل الوفيات لكل 1000 من السكان	13·2	13·0	11·7	11·3	10·9	10·8	10·6	9·6	9·3

المصدر : مصلحة الصحة والتعليم والخدمات

١ - ٦٧ الجدول التالى يبين ارتفاعات أعلى سبعة مبانى ومنشآت فى العالم . ارسم هذه البيانات مستخدماً شكلا بيانياً مناسباً .

المكان	الارتفاع بالأمتار	المبنى أو المنشأة
نيويورك	381	مبنى « الأمبيرستت »
نيويورك	319	مبنى « كريزلر »
باريس	300	برج إيفل
نيويورك	290	مبنى « وول ستريت »
نيويورك	283	بنك مانهاتن
نيويورك	259	مبنى الـ R.C.A. مركز روكفلر
نيويورك	241	مبنى « وولورث »

١ – ٦٨ الجدول التالى يظهر السرعة المدارية لكواكب المجموعة الشمسية . ارسم هذه البيانات :

الكوكب	عطارد	الزهرة	الأرض	المريخ	المشترى	زحل	أورانوس	نبتون	بلوتو
السرعة (km/s)	47.8	35.1	29.8	24.1	13.0	9.7	6.8	5.5	4.8

١ – ٦٩ الجدول التالى يبين الحالة الاجتماعية للذكور والإناث (14 سنة فأكثر) بالولايات المتحدة فى عام 1958 . عبر عن هذه البيانات بيانياً باستخدام رسمين دائريين لهما نفس القطر

الحالة الاجتماعية	الذكور (نسبة مئوية من المجموع)	الإناث (نسبة مئوية من المجموع)
أعزب	24·[illegible]	18·8
متزوج	69·8	66·0
أرمل	3·9	12·8
مطلق	1·8	2·3

المصدر : مكتب التعداد .

١ – ٧٠ الجدول التالى يبين المساحة بمليون الكيلومترات المربعة لمحيطات العالم .
ارسم هذه البيانات مستخدماً : (أ) الأعمدة البيانية (ب) الرسوم الدائرية .

المحيط	الهادى	الأطلنطى	الهندى	القطبى الجنوبى	القطبى الشمالى
المساحة مليون km^2	183.4	106.7	73.8	19.7	12.4

المعادلات :

١ – ٧١ حل المعادلات التالية :

(أ) $16 - 5c = 36$ (جـ) $4(X - 3) - 11 = 15 - 2(X + 4)$ (هـ) $3[2(X + 1) - 4] = 10 - 5(4 - 2X)$

(ب) $2Y - 6 = 4 - 3Y$ (د) $3(2U + 1) = 5(3 - U) + 3(U - 2)$ (و) $\frac{2}{5}(12 + Y) = 6 - \frac{1}{4}(9 - Y)$

الحــل : (أ) -4 (ب) 2 (جـ) 5 (د) $3/4$ (هـ) 1 (و) -7

١ – ٧٢ حل كل من مجموعة المعادلات الآنية التالية .

(أ) $\left.\begin{matrix} 2a + b = 10 \\ 7a - 3b = 9 \end{matrix}\right\}$ (ب) $\left.\begin{matrix} 3a + 5b = 24 \\ 2a + 3b = 14 \end{matrix}\right\}$ (جـ) $\left.\begin{matrix} 8X - 3Y = 2 \\ 3X + 7Y = -9 \end{matrix}\right\}$ (د) $\left.\begin{matrix} 5A - 9B = -10 \\ 3A - 4B = 16 \end{matrix}\right\}$

(هـ) $\left.\begin{matrix} 2a + b - c = 2 \\ 3a - 4b + 2c = 4 \\ 4a + 3b - 5c = -8 \end{matrix}\right\}$ (و) $\left.\begin{matrix} 5X + 2Y + 3Z = -5 \\ 2X - 3Y - 6Z = 1 \\ X + 5Y - 4Z = 22 \end{matrix}\right\}$ (ز) $\left.\begin{matrix} 3U - 5V + 6W = 7 \\ 5U + 3V - 2W = -1 \\ 4U - 8V + 10W = 11 \end{matrix}\right\}$

الحــل :

(أ) $a = 3, b = 4$ (ب) $a = -2, b = 6$ (جـ) $X = -0{\cdot}2, Y = -1{\cdot}2$

(د) $A = 184/7 = 26{\cdot}285\,71$ approx., $B = 110/7 = 15{\cdot}714\,29$ approx.

(هـ) $a = 2, b = 3, c = 5$ (و) $X = -1, Y = 3, Z = -2$ (ز) $U = 0{\cdot}4, V = -0{\cdot}8, W = 0{\cdot}3$

١ – ٧٣ (أ) عبر بيانياً عن المعادلات $5x + 2y = 4$ and $7x - 4y = 23$ مستخدماً نفس الأحداثيات .

(ب) من الرسم أوجد الحل الآنى للمعادلتين .

(جـ) استخدم نفس الطريقة لحصول على الحل الآنى للمعادلات (أ) – (د) بالمسألة ١ – ٧٢ .

الحــل : (ب) $(2, -3)$, i.e. $x = 2, y = -3$

١ – ٧٤ (أ) استخدم الرسم البيانى للمسألة ١ – ٦١ (أ) لإيجاد حل المعادلة $2x^2 + x - 10 = 0$ (ملحوظة : أوجد قيمة x من تقاطع القطع المكافىء مع محور x أى عندما $y = 0$) .

(ب) استخدم الطريقة الموضحة فى (أ) لإيجاد حل المعادلة $3x^2 - 4x - 5 = 0$.

الحــل : (أ) $2, -2.5$ (ب) (تقريباً) $2.1, -0.8$.

١ – ٧٥ حل المعادلة من الدرجة الثانية $aX^2 + bX + c = 0$ معطى بصيغة الدرجة الثانية $X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

استخدم هذه الصيغة لإيجاد حل

(أ) $3X^2 - 4X - 5 = 0$ (ب) $2X^2 + X - 10 = 0$

(جـ) $5X^2 + 10X = 7$ (د) $X^2 + 8X + 25 = 0$

الحل (أ) $\frac{4 \pm \sqrt{76}}{6}$ or 2·12 and – 0·79 approx (ب) $2, -2.5$ (جـ) (تقريباً) $0.549, -2.549$

(د) $\frac{-8 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{-8 \pm \sqrt{36}\sqrt{-1}}{2} = \frac{-8 \pm 6\sqrt{-1}}{2} = -4 \pm 3\sqrt{-1} = -4 \pm 3i$

حيث $\sqrt{-1} = i$ هذه الجذور هى أرقام مركبة ولن تظهر إذا استخدمنا الرسوم البيانية .

المتباينات :

١ – ٧٦ باستخدام رموز المتباينات رتب الأعداد $-1.5, 1.52, 2.37, -6.15, -4.3$ حسب قيمتها (أ) ترتيباً تصاعدياً (ب) ترتيباً تنازلياً .

الحل (أ) $-6.15 < -4.3 < -1.5 < 1.52 < 2.37$ (ب) $2.37 > 1.52 > -1.5 > -4.3 > -6.15$

١ – ٧٧ استخدم رموز المتباينات للتعبير عن الجمل التالية

(أ) عدد الأطفال N يقع بين 30 , 50 متضمناً العددين 30 , 50

(ب) المجموع S لعدد النقط التى تظهر على زهرى طاولة لا يقل عن 7

(جـ) X أكبر من أن يساوى -4 ولكن أقل من 3

(د) أقصى قيمة لـ P هى 5

(هـ) X لا تزيد عن Y بأكثر من 2

الحل : (أ) $30 \leqq N \leqq 50$, (ب) $S \geqq 7$, (جـ) $-4 \leqq X < 3$, (د) $P \leqq 5$, (هـ) $X - Y > 2$

١ – ٧٨ حل كل من المتباينات التالية :

(أ) $3X \geqq 12$ (د) $3 + 5(Y - 2) \leqq 7 - 3(4 - Y)$ (ز) $-2 \leqq 3 + \frac{1}{2}(a - 12) < 8$

(ب) $4X < 5X - 3$ (هـ) $-3 \leqq \frac{1}{5}(2X + 1) \leqq 3$

(جـ) $2N + 15 > 10 + 3N$ (و) $0 < \frac{1}{2}(15 - 5N) \leqq 12$

الحل : (أ) $X \geqq 4$, (ب) $X > 3$, (جـ) $N < 5$, (د) $Y \leqq 1$, (هـ) $-8 \leqq X \leqq 7$, (و) $-1.8 \leqq N < 3$, (ز) $2 \leqq a < 22$

اللوغارتيمات :

١ – ٧٩ أوجد اللوغاريتم المعتاد لكل من الأعداد التالية :

(أ) 387 (ج) 0·0792 (هـ) 0·6042 (ز) 476·3 (ط) 7·146 (ك) 0·000 98

(ب) 0·387 (د) 14 630 (و) 0·002 795 (ح) 1·007 (ى) 71·46 (ل) 84·620 000

الحـــل :

(أ) 2·5877 (جـ) 8·8987 − 10 (هـ) 9·7812 − 10 (ز) 2·6779 (ط) 0·8541 (ك) 6·9912 − 10

(ب) 9·5877 − 10 (د) 4·1653 (و) 7·4464 − 10 (ح) 0·0030 (ى) 1·8541 (ل) 7·9275

١ – ٨٠ أوجد العدد المقابل للوغاريتم الأعداد التالية :

(أ) 3·5611 (جـ) 1·7045 (هـ) 2·4700 (ز) 2·8003 (ط) 0·0800

(ب) 9·8293 − 10 (د) 8·9266 − 10 (و) 6·4700 − 10 (ح) 3·7072 (ى) 6·3841

الحـــل :

(أ) 3640 (جـ) 50·64 (هـ) 295·1 (ز) 0·063 14 (ط) 1·202

(ب) 0·675 (د) 0·084 45 (و) 0·000 295 1 (ح) 5096 (ى) 2 422 000 or $2{\cdot}422 \times 10^6$

١ – ٨١ احسب قيمة ما يلي باستخدام اللوغاريتمات

(أ) $(783{\cdot}6)(1654)$ (هـ) $\dfrac{(0{\cdot}3854)^4\,(12{\cdot}48)^2}{(0{\cdot}043\,82)^3}$ (ح) $\sqrt[5]{(21{\cdot}63)(33{\cdot}81)(47{\cdot}53)(65{\cdot}28)(87{\cdot}47)}$

(ب) $\dfrac{21{\cdot}7}{378{\cdot}2}$ (و) $0{\cdot}041\,82\,\sqrt{0{\cdot}6758}$ (ط) $\sqrt{\dfrac{(48{\cdot}79)(0{\cdot}005\,74)^3}{(2{\cdot}143)^5}}$

(جـ) $\dfrac{(0{\cdot}045\,56)(624{\cdot}1)}{(14{\cdot}32)(0{\cdot}003\,572)}$ (ز) $\sqrt[3]{3728}$ (ى) $\dfrac{3{\cdot}781}{0{\cdot}018\,73}\sqrt{\dfrac{(43{\cdot}25)(0{\cdot}087\,43)}{(0{\cdot}002\,356)(6{\cdot}824)}}$

(د) $(1{\cdot}562)^{15}$

الحـــل :

(أ) 1296000 أو 1.296×10^6 (ب) 0.057 39 أو 0.0574 إلى ثلاثةأرقام معنويه (جـ) 556.0

(د) 804.4 (هـ) 40820 (و) 0.03438 (ز) 15.51 (ح) 45.67 (ط) 4.519×10^{-4}=0.0004519

أو 4.52×10^{-4} إلى ثلاثه أرقام معنوية (ى) 3096

١ – ٨٢ ارسم (أ) $y = \log x$. (ب) $y = 10^x$. ناقش التشابه بين الشكلين .

١ - ٨٣ أكتب المعادلة (أ) $2 \log X - 3 \log Y = 2$ (ب) $\log Y + 2X = \log 3$ بصورة خالية من اللوغاريتمات

الحـــل : (أ) $X^2 = 100Y^3$ (ب) $Y = 3(10^{-2X})$

١ - ٨٤ إذا كانت If $a^p = N$, w حيث a , p أرقام موجبة ، $a \neq 1$ فإننا نسمى p لوغاريتم N للأساس a ونكتب $p = \log_a N$ احسب :

(أ) $\log_2 8$ (ب) $\log_{25} 125$

(ج) $\log_4 1/16$ (د) $\log_{1/2} 32$

(هـ) $\log_5 1$

الحـــل :

(أ) 3 (ب) $3/2$ (ج) -2 (د) -5 (هـ) 0

١ - ٨٥ وضح أن $N = 2.303 \log_{10} N$ loge تقريباً ، حيث $e = 2.71828 \ldots$ تسمى بالأساس الطبيعي للوغاريتم حيث $N > 0$.

١ - ٨٦ وضح أن 1 $(\log_b a)(\log_a b)$ حيث $a > 0, b > 0, a \neq 1, b \neq 1$.

الفصل الثانى

التوزيعات التكرارية

البيانات الخام

البيانات الخام هى بيانات جمعت ولكنها غير منتظمة عدديا . مثال ذلك مجموعة أوزان 100 طالب استخرجت من سجلات جامعة حسب الترتيب الأبجدى لأسمائهم .

المفردات المنظومة

المنظومة هى ترتيب للبيانات الرقمية الخام ترتيبا تصاعديا أو تنازليا حسب قيمها . الفرق بين الرقم الأكبر والرقم الأصغر يسمى مدى البيانات . على سبيل المثال ، إذا كان أكبر الطلبة وزنا فى المائة طالب هو 74 kg وأقلهم وزناً هو 60 kg فإن المدى هو 74 — 60 = 14 kg .

التوزيعات التكرارية

عند تلخيص أعداد كبيرة من البيانات الخام فإنه من المفيد توزيعها على فئات أو طوائف وتحديد عدد الأشخاص الذين ينتمون لكل فئة ويسمى هذا العدد بتكرار الفئة .

الجدول المنظم على صورة فئات يقابل كل فئة تكرارها يسمى بالتوزيع التكرارى أو الجدول التكرارى . ويمثل الجدول ٢ – ١ توزيع تكرارى لأوزان (مقربة إلى أقرب kg) 100 طالب من طلبة جامعة XYZ .

جدول ٢ – ١

أوزان 100 طالب من طلبة جامعة XYZ

الأوزان (كيلو جرامات)	عدد الطلبة
60–62	5
63–65	18
66–68	42
69–71	27
72–74	8
	100 المجموع

الفئة أو الطائفة الأولى على سبيل المثال تشتمل على الأوزان من 60 kg إلى 62 kg . ويعبر عنها بالرمز 62 — 60 . وبما أن عدد الطلبة الذين ينتمون إلى هذه الفئة هم 5 طلبة فإن التكرار المقابل لهذه الفئة هو 5 .

تسمى البيانات المنظمة والملخصة كما فى التوزيع التكرارى أعلاه بالبيانات المجمعة وعلى الرغم من أن عملية التجميع تؤدى بشكل عام إلى ضياع كثير من تفصيلات البيانات الأصلية فإن الفائدة الهامة منها هى الصورة العامة التى يمكن الحصول عليها والعلاقات الأساسية التى تظهر بالتالى أكثر وضوحا .

فترة الفئات وحدود الفئات

الرمز الذى يعبر عن الفئة مثل 62 — 60 فى الجدول أعلاه يسمى بفترة الفئة . الرقمان 60 و 62 يسميان حدود الفئة . الرقم الأصغر 60 يسمى الحد للفئة الأدنى والرقم الأكبر 62 يسمى الحد الأعلى للفئة . المصطلح فئة وفترة الفئة يستخدمان فى أغلب الأحيان للدلالة على نفس المعنى على الرغم من أن فترة الفئة هى فى الحقيقة رمز للفئة .

وفترة الفئة التى ، من الناحية النظرية على الأقل ، ليس لها أما حد الفئة الأعلى أو حد الفئة الأدنى تسمى بفترة فئة مفتوحة . على سبيل المثال إذا أخذنا مجموعة أعمار لأشخاص فإن فترة الفئة « 65 سنة فأكثر » هى فترة فئة مفتوحة .

الحدود الحقيقية للفئات

إذا كانت الأوزان سجلت إلى أقرب kg فإن فـترة الفئة 62 — 60 تتضمن من النـاحية النظرية كل القياسات من 59.5000 ... kg إلى 62.5000 ... kg . هذه الأرقام إذا عبرنا عنها باختصار بالأرقام الصحيحة 59.5 ,62.5 تسمى بالحدود الحقيقية للفئة . الرقم الأصغر 59.5 هو الحد الأدنى الحقيقى للفئة والرقم الأكبر وهو 62.5 هو الحد الأعلى الحقيقى للفئة .

ومن الناحية العملية فإن الحدود الحقيقية للفئة يمكن الحصول عليها بجمع الحد الأعلى لفترة فئة والحد الأدنى لفترة الفئة التالية لها والقسمة على 2

فى بعض الأحيان تستخدم الحدود الحقيقية للفئات كرمز للفئات . مثال ذلك ، الفئات المختلفة بالعمود الأول فى الجدول ٢ – ١ يمكن التعبير عنها بالصورة 65.5 — 62.5 ,62.5 — 59.5 وهكذا ولتلافى الغموض باستخدام هذه الرموز فإن الحدود الحقيقية للفئات يجب أن لا تتطابق مع أحد القيم الفعلية . فلو كان لدينا القيمة 62.5 فإنه يكون من الصعب تقرير ما إذا كانت تنتمى إلى الفئة 62.5—59.5 أو 65.5-62.5 .

حجم أو طول فترة الفئة

حجم أو طول فترة الفئة هو الفرق بين الحد الأدنى الحقيقى والحـد الأعلى الحقيقى للفئة ويسمى أيضا طول الفئة ، حجم الفئة أو طول الفئة . إذا كانت جميع الفئات فى التوزيع التكرارى لها نفس الطول فإن الطول المشترك يرمز له بالرمز c .

وفى هذه الحالة فإن c هو الفرق بين الحدين الأدنيين لفئتين متتاليتين . أو الحدين الأعليين لفئتين متتاليتين . مثال ذلك لو أخذنا بيانات الجدول ٢ – ١ فإن طول الفئة هو 3 $= 62.5 - 59.5 = 65.5 - 62.5$ c .

مركز الفئة

مركز الفئة هو منتصف فترة الفئة وتحصل عليه بجمع الحد الأدنى والحد الأعلى للفئة وتقسم المجموع على أثنين . فمركز الفئة 62—60 هو $(60 + 62)/2$. ويسمى مركز الفئة أيضا بمنتصف الفئة .

وبهدف مزيد من التحليل الرياضى فإنه يفترض أن جميع القراءات الموجودة داخل فترة فئة تأخذ قيما تتطابق مع مركز الفئة . بهذا فإن جميع الأوزان داخل الفئة 60—62 kg تعتبر كما لو أنها 61 kg .

قواعد عامة لتكوين التوزيعات التكرارية

١ – حدد أكبر قيمة وأقل قيمة فى البيانات الخام ومنها أوجد المدى (الفرق بين أكبر رقم وأقل رقم) .

٢ – قسم المدى إلى عدد مناسب من الفئات المتساوية الطول . إذا لم يكن ذلك ممكنا استخدم فئات ذات أطوال مختلفة أو فئات مفتوحة (أنظر المسألة ٢ – ١٢) . ويأخذ عدد الفئات عادة بين 5, 20 حسب البيانات . وتختار الفئات أيضا بحيث يتفق مركز الفئة مع المشاهدات الفعلية . وهذا يؤدى إلى التقليل من أخطاء التجميع عند اجراء مزيد من المعالجة الرياضية . وعلى أية حال فإن الحدود الحقيقية للفئات يجب ألا تتفق مع بيانات مشاهدة فعلا .

٣ – حدد عدد المشاهدات التى تقع فى كل فترة فئة . أى حدد تكرار كل فئة . وأحسن طريقة لأداء ذلك هو استخدام كشف الحزم أو النقط (أنظر المسألة ٢ – ٨) .

المدرجات التكرارية والمضلعات التكرارية :

هما طريقتان فى الرسم البيانى للتعبير عن التوزيعات التكرارية .

١ – **المدرج التكرارى** أو مدرج التكرارات يتكون من مجموعة من المستطيلات لها :

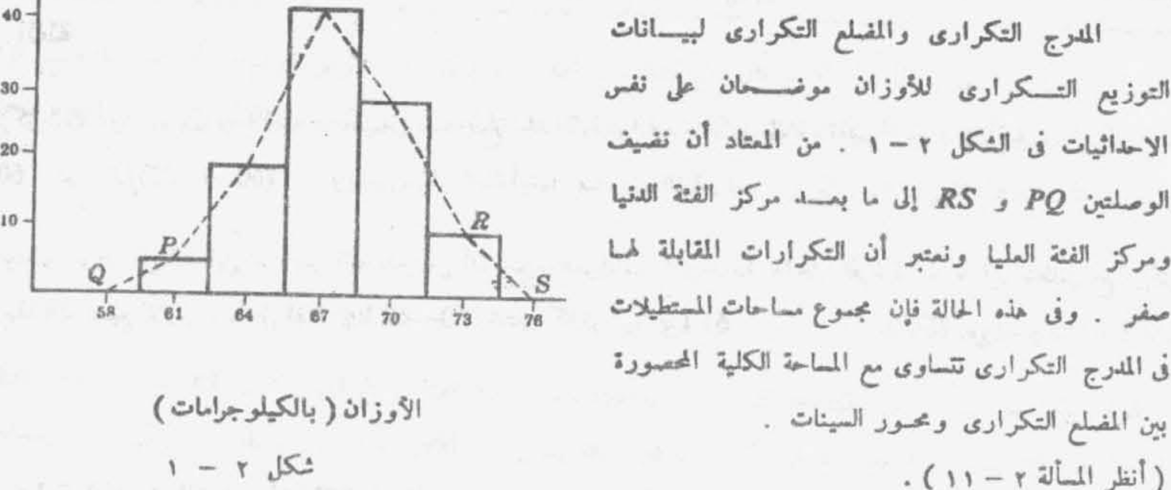
(ا) قاعدة على المحور الأفقى (محور x) مراكزها عند مركز الفئة وطول القاعدة يساوى طول فترة الفئة .

(ب) مساحة متناسبة مع تكرارات الفئات .

وإذا كانت الفئات كلها لها نفس الطول فإنه من المعتاد أن تأخذ الارتفاعات مساوية لتكرارات الفئات . أما إذا كانت الفئات غير متساوية الطول فإن هذه الأطوال يجب أن تعدل (أنظر المسألة ٢ – ١٣) .

٢ – **المضلع التكرارى** ، هو خط بيانى لتكرار الفئة المقابلة لمركز الفئة . ويمكن رسمه بإيصال نقط تنصيف رؤوس المستطيلات المكونة للمدرج التكرارى .

المدرج التكرارى والمضلع التكرارى لبيانات التوزيع التكرارى للأوزان موضحان على نفس الاحداثيات فى الشكل ٢ – ١ . من المعتاد أن نضيف الوصلتين PQ و RS إلى ما بعد مركز الفئة الدنيا ومركز الفئة العليا ونعتبر أن التكرارات المقابلة لها صفر . وفى هذه الحالة فإن مجموع مساحات المستطيلات فى المدرج التكرارى تتساوى مع المساحة الكلية المحصورة بين المضلع التكرارى ومحور السينات .
(أنظر المسألة ٢ – ١١) .



الأوزان (بالكيلوجرامات)

شكل ٢ – ١

التوزيع التكرارى النسبى

التكرار النسبى لفئة هو تكرار الفئة مقسوما على التكرار الكلى لجميع الفئات وعادة يعبر عنه كنسبة مئوية . فعلى سبيل المثال فإن التكرار النسبى للفئة 68—66 فى الجدول (٢ – ١) هو $42\% = 42/100$. مجموع التكرارات النسبية لجميع الفئات هو 1 أو 100% .

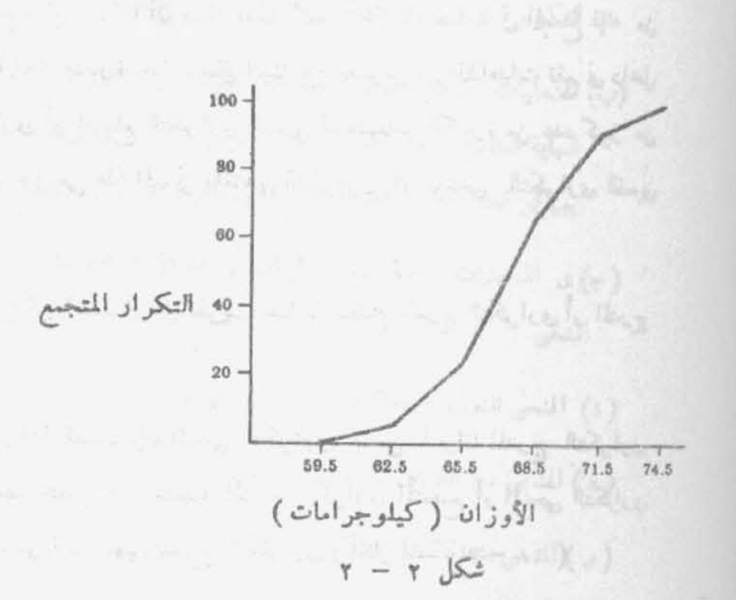
إذا استبدلنا التكرارات فى الجدول التكرارى السابق بما يقابلها من التكرارات النسبية فإن الجدول الناتج يسمى بالتوزيع التكرارى النسبى أو توزيع النسب المئوية أو جداول التكرارات النسبية .

تمثيل البيانى للتوزيع التكرارى النسبى يمكن الحصول عليه من المدرج التكرارى أو المضلع التكرارى وذلك بإبدال تدريج المحور الرأسى من التكرارات إلى التكرارات النسبية وهذا لن يغير فى الشكل نفسه . ويسمى الشكل الناتج بمدرج التكرارات النسبية أو المدرج التكرارى للنسب المئوية وكذلك المضلع التكرارى النسبى أو المضلع التكرارى للنسب المئوية .

التوزيع التكرارى المتجمع ، والمنحنى التكرارى المتجمع

مجموع التكرارات المقابلة لجميع القيم الأقل من الحد الأعلى الحقيقى لفئة معينة يسمى بالتكرار المتجمع إلى هذه الفئة والمتضمن تكرارها أيضا . وعلى سبيل المثال فى الجدول ١ – ٢ فإن التكرار المتجمع إلى الفئة 68 — 66 والمتضمن تكرارها أيضا هو $65 = 42 + 18 + 5$ وهذا يعنى أن 65 طالبا أوزانهم تقل عن 68.5 kg .

والجدول الذى يمثل التكرارات المتجمعة يسمى بالتوزيع المتجمع أو جدول التكرارات المتجمعة أو باختصار التوزيع- المتجمع ومثال له الجدول ٢ – ٢ لتوزيع أوزان الطلبة .



شكل ٢ — ٢

جدول ٢ — ٢

الأوزان (كيلوجرامات)	عدد الطلبة
أقل من 59.5	0
أقل من 62.5	5
أقل من 65.5	23
أقل من 68.5	65
أقل من 71.5	92
أقل من 74.5	100

والشكل البيانى الذى يظهر التكرارات المتجمعة إلى أقل من الحد الأعلى الحقيقى لأى فئة بالمقابلة لحد الأعلى الحقيقى للفئات يسمى بالمضلع التكرارى المتجمع أو المنحنى التكرارى كما هو موضح بالشكل ٢ — ٢ والخاص بتوزيع أوزان الطلبة .

وفى بعض الأحيان قد يكون من المرغوب فيه الحصول على التوزيع التكرارى المتجمع لجميع القيم الأكبر من أو المساوية لحد الأدنى الحقيقى لكل فئة . وحيث أننا تعتبر فى هذه الحالة الأوزان 59.5 kg أو أكثر ، 62.5 kg أو أكثر وهكذا . فإن هذا يسمى أحيانا التوزيع المتجمع على أساس « أو أكثر من » بينما التوزيع الذى ذكرناه سابقا يسمى التوزيع المتجمع على أساس « الأقل من » . ومن السهل الحصول على أحدهما من الآخر (أنظر المسألة ٢ — ١٥) . وشكل التكرار المتجمع يسمى تبعا لذلك المنحنى التكرارى الصاعد « أقل من » فى الحالة الأولى والمنحنى التكرارى النازل « أو أكثر » . ولكن عندما نشير إلى التوزيع التكرارى المتجمع أو المنحنى التكرارى المتجمع بدون توصيف فإن هذا يتضمن أن الأساس هو « الأقل من » .

التوزيع التكرارى المتجمع النسبى . المنحنى المتجمع للنسب المئوية

التوزيع التكرارى المتجمع النسبى أو التكرار المتجمع المئوى . هو التكرار المتجمع مقسوما على التكرار الكلى . مثال ذلك فإن التكرار المتجمع النسبى للأوزان الأقل من 68.5 kg هو 65/100 = 65% وهذا يعنى أن 65% من الطلبة أوزانهم أقل من 68.5 kg .

إذا استخدمنا التكرارات المجتمعة النسبية فى الجدول ٢ — ٢ والشكل ٢ — ٢ بدلا من التكرارات المتجمعة فإن النتيجة تسمى بالتوزيع التكرارى المتجمع النسبى أو بالتوزيع المتجمع للنسب المئوية أو المضلع التكرارى المتجمع النسبى أو المنحنى التكرارى المتجمع للنسب المئوية .

المنحنى التكرارى . تمهيد المنحنى التكرارى المتجمع

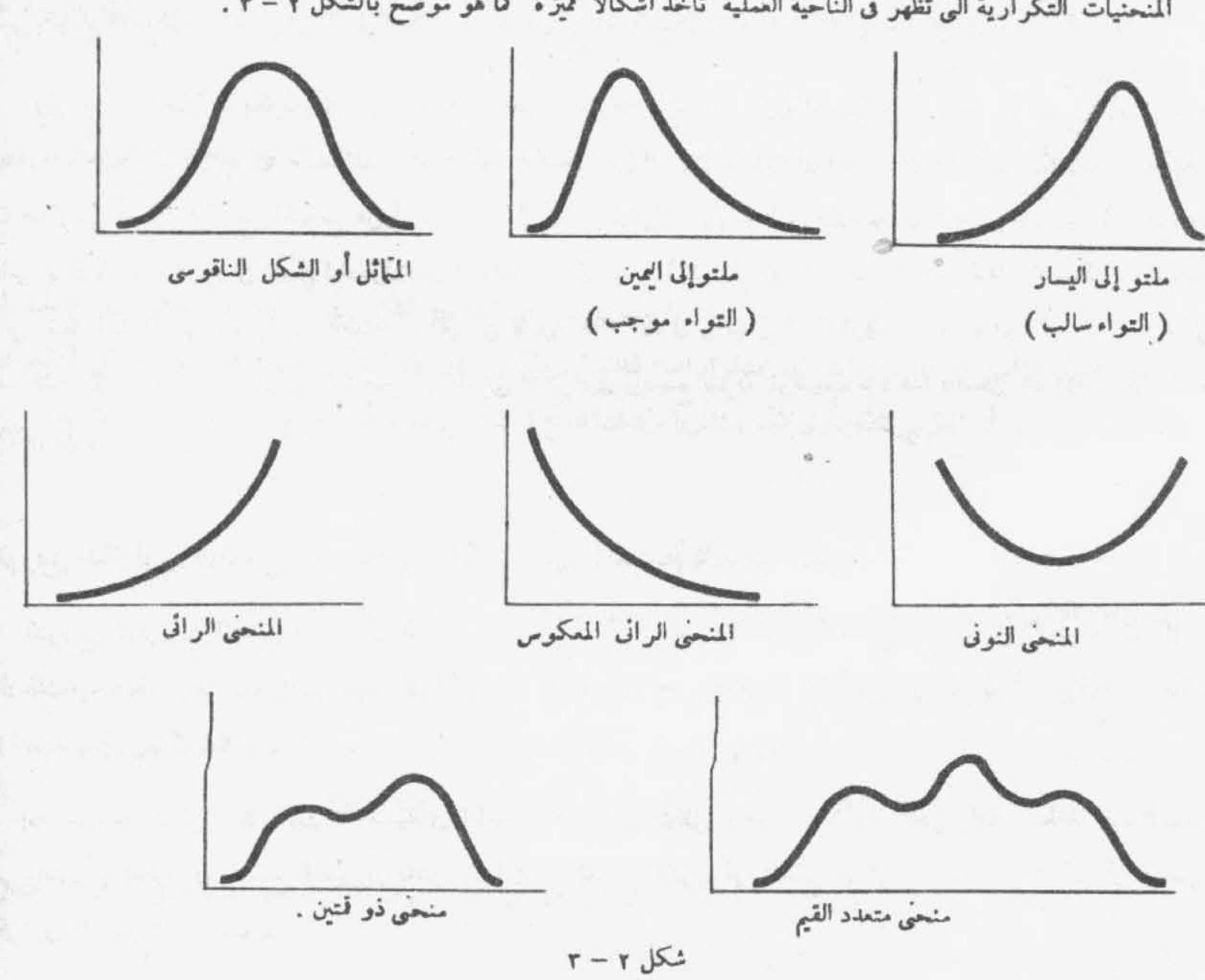
يمكن اعتبار البيانات المجمعة كعينة مسحوبة من مجتمع أكبر . وبما أن هناك عددا كبيرا من المشاهدات فى المجتمع فإنه من الممكن من الناحية النظرية (البيانات المتصلة) اختيار فترة الفئة صغيرة جدا ويظل لدينا عدد ملموس من المشاهدات تقع فى داخل كل فئة . وبهذا فإنه من المتوقع أن يتكون المضلع التكرارى أو المضلع التكرارى النسبى للمجتمعات الكبيرة من عدد كبير من الخطوط الصغيرة المتكسرة والتى يمكن تقريبها بمنحنى ، ويسمى هذا المنحنى بالمنحنى التكرارى أو المنحنى التكرارى النسبى على التوالى .

ومن المنطقى أن نتوقع أن مثل هذه المنحنيات النظرية يمكن الحصول على تقريب لها باستخدام المدرج التكرارى أو المدرج التكرارى النسبى للعينة بعد تمهيده .

وتزيد درجة الدقة فى التقريب بزيادة حجم العينة . ولهذا السبب فإن المنحنى التكرارى يسمى أحيانا المدرج التكرارى الممهد . وبنفس الطريقة فإن المنحنى التكرارى المتجمع الممهد نحصل عليه بتمهيد المدرج التكرارى المتجمع أو المنحنى التكرارى المتجمع . ومن المعتاد أن يكون تمهيد المنحنى المتجمع أكثر سهولة من تمهيد المدرج التكرارى (أنظر المسألة ٢ – ١٨) .

اشكال المنحنيات التكرارية

المنحنيات التكرارية التى تظهر فى الناحية العملية تأخذ أشكالا مميزة كما هو موضح بالشكل ٢ – ٣ .



شكل ٢ – ٣

(ا) المنحنى التكرارى المتماثل أو ذو الشكل الناقوسى متميز بأن المشاهدات المتساوية البعد عن مركز النهاية العظمى لها نفس التكرارات . ومن الأمثلة الهامة له المنحنى المعتدل .

(ب) المنحنيات التكرارية متوسطة عدم التماثل أو الالتواء تتميز بأن أحد طرفيها يمتد أكثر من الآخر على جانبى مركز النهاية العظمى . إذا كان الطرف (الأيمن) أطول فيكون المنحنى فى هذه الحالة ملتوياً إلى اليمين أو ملتويا التواء موجبا . بينما لو كان العكس صحيحا فإن المنحنى يكون ملتويا إلى اليسار أو ملتويا التواء سالبا .

(ج) فى المنحنيات ذات الشكل الرائى أو الشكل الرائى المعكوس فإن نقطة النهاية العظمى للمنحنى تقع عند أحد طرفى المنحنى .

(د) المنحنى النونى له نهاية عظمى عند كل من طرفيه .

(هـ) المنحنى ذو القمتين له نهايتان عظميان .

(و) المنحنى متعدد القيم له أكثر من نهايتين عظمتين .

مسائل محلولة

المفردات المنظومة

٢ - ١ (ا) رتب الأرقام 22 ,34 ,57 ,11 ,48 ,6 ,27 ,38 ,45 ,17 فى منظومة ، ثم

(ب) حدد المدى .

الحل :

(ا) بترتيبها تصاعديا حسب قيمها تكون المنظومة 6 ,11 ,17 ,22 ,27 ,34 ,38 ,45 ,48 ,57

بترتيبها تنازليا حسب قيمها تكون المنظومة 57 ,48 ,45 ,38 ,34 ,27 ,22 ,17 ,11 ,6

(ب) بما أن الرقم الأصغر هو 6 والرقم الأكبر هو 57 فإن المدى هو $51 = 6 - 57$.

٢ - ٢ درجات 80 طالبا فى مادة الرياضة فى جامعة ولاية مسجلة بالجدول التالى

68	84	75	82	68	90	62	88	76	93
73	79	88	73	60	93	71	59	85	75
61	65	75	87	74	62	95	78	63	72
66	78	82	75	94	77	69	74	68	60
96	78	89	61	75	95	60	79	83	71
79	62	67	97	78	85	76	65	71	75
65	80	73	57	88	78	62	76	53	74
86	67	73	81	72	63	76	75	85	77

بالرجوع إلى هذا الجدول حدد .

(أ) أكبر درجة .

(ب) أقل درجة .

(ج) المـدى

(د) درجات أعلى خمسة طلبة من حيث الترتيب .

(هـ) درجات أقل خمسة طلبة من حيث الترتيب .

(و) درجات الطالب الذى ترتيبه العاشر من أعلى .

(ز) ما هو عدد الطلبة الذين حصلوا على الدرجة 75 فأكثر .

(ح) ما هو عدد الطلبة الذين حصلوا على درجات أقل من 85 .

(ط) ما هى النسبة المئوية للطلبة الحاصلين على درجات أعلى من 65 ولـكن ليست أعلى من 85 .

(ى) ما هى الدرجات التى لم تظهر مطلقا .

الحـل :

بعض هذه الأسئلة تتطلب تفصيلات بحيث تكون أحسن طريقة للإجابة عليها هى تكوين منظومة . وهذا يمكن عمله بتقسيم البيانات إلى عدد مناسب من الفئات ووضع كل رقم يأخذ من الجدول فى الفئة الملائمة ، كما فى الجدول ٢ – ٣ أدناه . وهذا يسمى جدول المدخلات . ويتم بعد ذلك ترتيب الأرقام داخل كل فئة فى منظومة كما فى الجدول ٢ – ٤ وبهذا نحصل على المنظومة المطلوبة .

جدول ٢ – ٣

50-54	53
55-59	59, 57
60-64	62, 60, 61, 62, 63, 60, 61, 60, 62, 62, 63
65-69	68, 68, 65, 66, 69, 68, 67, 65, 65, 67
70-74	73, 73, 71, 74, 72, 74, 71, 71, 73, 74, 73, 72
75-79	75, 76, 79, 75, 75, 78, 78, 75, 77, 78, 75, 79, 79, 78, 76, 75, 78, 76, 76, 75, 77
80-84	84, 82, 82, 83, 80, 81
85-89	88, 88, 85, 87, 89, 85, 88, 86, 75
90-94	90, 93, 93, 94
95-99	95, 96, 95, 97

جدول ٢ - ٤

50-54	53
55-59	57, 59
60-64	60, 60, 60, 61, 61, 62, 62, 62, 62, 63, 63
65-69	65, 65, 65, 66, 67, 67, 68, 68, 69
70-74	71, 71, 71, 72, 72, 73, 73, 73, 73, 74, 74, 74
75-79	75, 75, 75, 75, 75, 75, 75,76, 76, 76, 76, 77, 77, 78, 78, 78, 78, 78, 79, 79, 79
80-84	80, 81, 82, 82, 83, 84
85-89	85, 85, 85, 86, 87, 88, 88, 88, 89
90-94	90, 93, 93, 94
95-99	95, 95, 96, 97

من الجدول ٢ - ٤ يكون من الأسهل نسبيا الإجابة على هذه الأسئلة . حيث

(ا) أكبر درجة : 97

(ب) أقل درجــة : 53

(ج) المــدى 44 = 53 — 97

(د) درجات أعلى خمسة طلبة من حيث الترتيب : 97, 96, 95, 95, 94

(هـ) درجات أقل خمسة طلبة من حيث الترتيب : 53 57, 59, 60, 60

(و) درجة الطالب الذى ترتيبه العاشر من أعلى : 88

(ز) عدد الطلبة الذين حصلوا على الدرجة 75 فأكثر : 44

(ح) عدد الطلبة الذين حصلوا على درجات أقل من 85 : 63

(ط) نسبة الطلبة الحاصلين على درجات أعلى من 65 ولـكن ليست أعلى من 85 : 49/80 = 61.2%

(ى) الأرقام التى لم تظهر هى 0 وكذلك 52, 54, 55, 56, 58, 64, 70, 91, 92, 98, 99, 100 .

التوزيعـــات التكرارية والمدرجـــات والمضلعات التكرارية

٢ - ٣ يبين الجدول ٢ - ٥ التوزيع التكرارى للأجور الشهرية بالجنيهات الاسترلينية لـ 65 عاملا فى شركة P and R .

حدد باستخدام هذا الجدول :

(ا) الحد الأدنى للفئة السادسة ج : £ 100.00

(ب) الحد الأعلى للفئة الرابعة ج : £89.99

(جـ) مركز الفئة (أو منتصف الفئة) الثالثة . مركز الفئة الثالثة

$$\tfrac{1}{2}(£70.00 + £79.99) = £74.9995$$

ولكثير من الأغراض العملية يقرب هذا الرقم إلى £75.00 .

جدول ٥ – ٢

الأجور	عدد العاملين
£50·00–£59·99	8
60·00– 69·99	10
70·00– 79·99	16
80·00– 89·99	14
90·00– 99·99	10
100·00–109·99	5
110·00–119·99	2
	المجموع 65

(د) الحدود الحقيقية للفئة الخامسة

الحد الأدنى الحقيقى للفئة الخامسة

الحد الأعلى الحقيقى للفئة الخامسة :

$$= \tfrac{1}{2}(£90·00 + £89·99) = £89·995.$$

$$= \tfrac{1}{2}(£99·99 + £100·00) = £99·995.$$

(هـ) طول الفئة الخامسة :

طول الفئة الخامسة = الحد الأعلى الحقيقى للفئة الخامسة – الحد الأدنى الحقيقى للفئة الخامسة

$$= £99.995 - £88.995 = £10.00$$

وفى هذه الحالة فإن جميع الفئات لها نفس الطول £10.00 .

(و) تكرار الفئة الثالثة ج : 16

(ز) التكرار النسبى للفئة الثالثة : ج : $16/65 = 0.246 = 24.6\%$

(ح) الفئة ذات التكرار الأكبر ج : £70.00—£79.99

وهذه تسمى أحيانا بالفئة المنوالية . ويسمى تكرارها بتكرار الفئة المنوالية .

(ط) نسبة العاملين الذين يحصلون على دخل شهرى أقل من £80.00

العدد الكلى للعاملين الذين يحصلون على دخل أقل من £80.00 شهريا $34 = 8 + 10 + 16$

نسبة العاملين يحصلون على دخل أقل من £80.00 شهريا $= 34/65 = 52.3\%$

(ى) العاملين الذين يحصلون على دخل أقل من £100.00 ولكن لا يقل دخلهم عن £60.00 شهريا

$$= 10 + 14 + 16 + 10 = 50$$

نسبة العاملين الذين يحصلون على دخل أقل من £100.00 ولكن لا يقل دخلهم عن £60.00 شهريا

$= 50/65 = 76.9\%$.

نسبة العاملين الذين يحصلون على دخل أقل من £100.00 ولكن لا يقل دخلهم عن £60.00 شهريا

$50/65 = 76.9\%$.

٢ – ٤ إذا كانت مراكز الفئات للتوزيع التكرارى لأطوال أوراق نبات الغار هى 128, 137, 146, 155, 164, 173, 182 mm أوجد (ا) طول الفئة (ب) الحدود الحقيقية للفئات (جـ) حدود الفئات ، مفترضا أن القياس أخذ إلى أقرب مليمتر .

الحــل :

(ا) طول الفئة = الفرق المشترك بين مراكز الفئات المتتالية $= 9\ mm = 137 - 146 = 128 - 137$.

(ب) بما أن أطوال الفئات كلها متساوية ، فإن الحدود الحقيقية للفئات هى فى منتصف المسافة بين مراكز الفئات وبهذا يكون لدينا القيم .

$$\tfrac{1}{2}(128 + 137), \tfrac{1}{2}(137 + 146), \ldots, \tfrac{1}{2}(173 + 182) \text{ or } 132{\cdot}5, 141{\cdot}5, 150{\cdot}5, \ldots, 177{\cdot}5 \text{ mm.}$$

وبهذا يكون الحد الحقيقى للفئة الأولى هــو

$123.5 = 9 - 132.5$ وللفئة الأخيرة هو $186.5 = 9 + 177.5$

وبما أن الطول المشترك للفئات هــو $9\ mm$. فإن الحــدود الحقيقية للفئات هى :

$$123{\cdot}5, 132{\cdot}5, 141{\cdot}5, 150{\cdot}5, 159{\cdot}5, 168{\cdot}5, 177{\cdot}5, 186{\cdot}5 \text{ mm.}$$

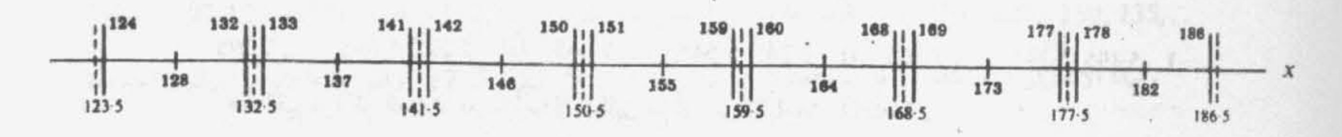
(جـ) بما أن حدود الفئات هى قيم صحيحة فإننا نختار حدود الفئات من الأرقام الصحيحة الأقرب إلى الحدود الحقيقية للفئة وعلى سبيل التحديد :

$$123, 124, 132, 133, 141, 142, \ldots$$

وبهذا فإن حدود الفئة الأولى هى 132–124 والفئة التالية 141–133 وهكذا .

٢ – ٥ عبر بيانيا عن نتائج المسألة السابقة :

الحــل :



مراكز الفئات 182 ,... ,128, 137, 146 حدد موضعها على محور x . ويوضح على الرسم الحــدود الحقيقية للفئات بالخطوط الرأسية المتقطعة بينما حدد حدود الفئات بالخطوط الرأسية المتصلة .

٢ – ٦ إذا كان أصغر 150 قياسا هو $5.18\ mm$ وكان أكبرها هو $7.44\ mm$. حدد مجموعة ملائمة من :

(ا) حدود الفئات (ب) الحدود الحقيقية للفئات (جـ) مراكز الفئات

والتى يمكن استخدامها لتكوين توزيع تكرارى لهذه القياسات .

الحـل :

المـدى $2.26\ mm = 5.18 - 7.44$. وإذا استخدمنا 5 فئات كحد أدنى فإن طول الفئــة سيكون $0.45 = 2.26/5$ تقريبا أما إذا استخدمنا كحد أعلى 20 فئة فإن طول الفئة سيكون $0.11 = 2.26/20$ تقريبا . وبهذا يكون الاختيار المناسب لطول الفئة يقع بين $0.45, 0.11$ وقد يكون $0.20, 0.30$ أو 0.40 .

(ا) تظهر الأعمدة I, II, III فئات ملائمة أطوالها 0.20 ,0.30 ,0.40 على الترتيب .

I	II	III
5·10–5·29	5·10–5·39	5·10–5·49
5·30–5·49	5·40–5·69	5·50–5·89
5·50–5·69	5·70–5·99	5·90–6·29
5·70–5·89	6·00–6·29	6·30–6·69
5·90–6·09	6·30–6·59	6·70–7·09
6·10–6·29	6·60–6·89	7·10–7·49
6·30–6·49	6·90–7·19	
6·50–6·69	7·20–7·49	
6·70–6·89		
6·90–7·09		
7·10–7·29		
7·30–7·49		

لاحظ أن الحد الأدنى للفئة الأولى من الممكن أن يكون مختلفا عن 5.10 . فعلى سبيل المثال فى العمـــود I إذا بدأنا بالرقم 5.15 كحد أدنى فإن الفئة الأولى يمكن كتابتها على الشكل 5.15–5.34 .

(ب) الحدود الحقيقية للفئات المقابلة للأعمدة I, II, III أعلاه هى كالآتى .

I 5·095–5·295, 5·295–5·495, 5·495–5·695, . . ., 7·295–7·495
II 5·095–5·395, 5·395–5·695, 5·695–5·995, . . ., 7·195–7·495
III 5·095–5·495, 5·495–5·895, 5·895–6·295, . . ., 7·095–7·495

لاحظ أن هذه الحدود الحقيقية للفئات ملائمة حيث أنها لا تتطابق مع أى من القياسات المشاهدة .

(ج) مراكز الفئات المقابلة للأعمدة I, II, III المعطاة فى (ا) هى كالآتى :

I 5·195, 5·395, . . ., 7·395 II 5·245, 5·545, . . ., 7·345 III 5·295, 5·695, . . ., 7·295

هذه القيم لمراكز الفئات يميزها أنها لا تتطابق مع أى من القياسات المشاهدة .

٢ – ٧ فى الاجابة على السؤال السابق اختار أحد الطلبة الفئات التالية .

5.10—5.40, 5.40—5.70 . . ., 6.90—7.20, 7.20—7.50

هل هناك أى خطأ فى هذا الاختيار ؟

الحــل :

هذه الفئات تتشابك فيما بينها عند 5.40, 5.70, . . ., 7.20 وبهذا فإنه إذا كانت قيمة مســجلة لقياس هى 5.40 على سبيل المثال ، فإنه يمكن أن توضع فى أى من الفئتين الأولى أو الثانية . ويبرر بعض الإحصــائيين ذلك بالاتفاق على أن يوضع نصف هذه الحالات غير الواضحة فى أحد الفئات والنصف الآخر فى الفئة الأخرى .

وعدم الوضـــوح فى هذه الحالة يمكن حذفه بأن نكتب الفئات كالآتى : — 5.10 أقل من 5.40 و 5.40 أقل من 5.70 وهكذا . وفى هذه الحالة فإن الحدود تتطابق مع الحدود الحقيقية للفئة ومراكز الفئات تتطابق مع

البيانات المشاهدة . وبشكل عام فن المستحب أن نتجنب مثل هذا التشابك فى الفئات كلما كان ذلك ممكننا وكذلك اختيار الحدود الحقيقية للفئات بحيث لا تتطابق مع قيم فعلية مشاهدة . وعلى سبيل المثـال فإن الفئات فى المسألة السابقة يمكن اختيارها مثل 5.695 — 5.395 ، 5.395 — 5.095 وهكذا . بدون أى غموض . ويعيب هذا الاختيار بالذات أن مراكز الفئات لا تتطابق مع قيم مشاهدة .

٢ – ٨ فى الجدول التالى سجلت أطوال 40 من أوراق نبات الغار إلى أقرب مليمتر . كون توزيعا تكراريا .

138	164	150	132	144	125	149	157
146	158	140	147	136	148	152	144
168	126	138	176	163	119	154	165
146	173	142	147	135	153	140	135
161	145	135	142	150	156	145	128

الحـل :

أكبر طول هو 176 mm وأصغر طول هو 119 mm وبهذا يكون المدى 57 mm = 119 — 176

إذا استخدمنا 5 فئات فإن طول الفئة سيكون بالتقريب 11 = 57/5 .

إذا استخدمنا 20 فئة فإن طول الفئة سيكون بالتقريب 3 = 57/20 .

أحد الاختيارات الملائمة لطول الفئة هـو 5 mm . وكذلك فإنه من الملائم اختيار مراكز الفئـات عند ...,120, 125, 130, 135 وبهذا فإن الفئات من الممكن أن تكون ... ,132—128 ,127—122,123 — 118 .

وبهذا الاختيار فإن الحدود الحقيقية للفئات هى ...,117.5, 122.5, 127.5 والتى لاتتطابق مع البيانات المشاهدة .

جدول ٢ – ٦

الطـول	الحـزم	التكرار
118-122	/	1
123-127	//	2
128-132	//	2
133-137	////	4
138-142	~~////~~ /	6
143-147	~~////~~ ///	8
148-152	~~////~~	5
153-157	////	4
158-162	//	2
163-167	///	3
168-172	/	1
173-177	//	2
		المجموع 40

التوزيع التكرارى المطلوب موضح بالشكل ٢–٦. ويستخدم العمود الأوسط ويسمى كشف الحزم (أوالنقط) فى ترتيب البيانات الخام لحصـول على التـكرارات ويحذف عادة عنـد العرض النهائى للتوزيع التكرارى . وليس ضروريا وضع القيم فى منظومة وأن كان من الممكن فى حالة وجودها استخدامها فى تبويب التكرارات .

جدول ٢ – ٧

الطول	الحـزم	التكرار
118–126	///	3
127–135	~~////~~	5
136–144	~~////~~ ////	9
145–153	~~////~~ ~~////~~ //	12
154–162	~~////~~	5
163–171	////	4
172–180	//	2
		40 المجموع

طريقة أخرى

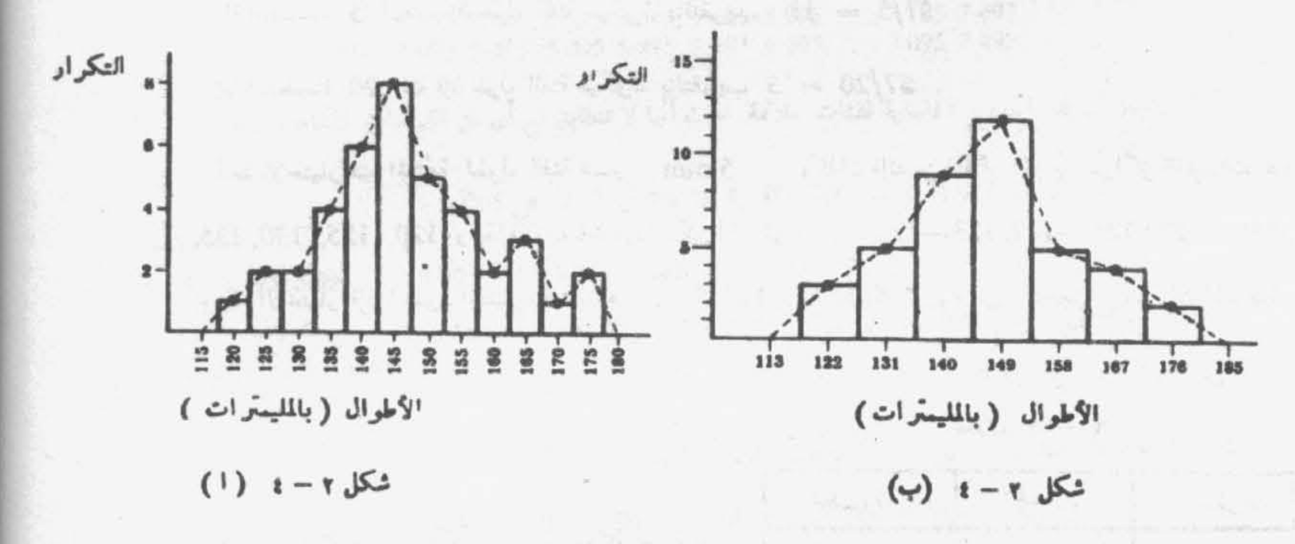
ومن الطبيعي أن يكون من الممكن الحصول على توزيعات تكرارية أخرى .

بالجدول ٢ – ٧ يظهر على سبيل المثال التوزيع التكراري باستخدام 7 فئات حيث طول الفئة هو 9 mm.

٢ – ٩ كون (أ) مدرج تكراري (ب) مضلع تكراري لتوزيع الأطوال في المسألة ٢–٨

الحـل :

المدرج التكراري والمضلع التكراري لكل من الحالات المذكورة في المسألة ٢–٨ معطاة في الأشكال ٢–٤(أ) ٢ – ٤ (ب)



شكل ٢ – ٤ (ب) شكل ٢ – ٤ (أ)

لاحظ أن مراكز قواعد المستطيلات قد عينت عند مراكز الفئات .

٢ – ١٠ باستخدام بيانات المسألة ٢ – ٣ كون

(أ) توزيع تكراري نسبي (أو نسب مئوية) .

(ب) مدرج تكراري

(ج) مدرج تكراري نسبي

(د) مضلع تكراري

(هـ) مضلع تكراري نسبي .

الحـل :

(أ) التوزيع التكرارى النسبى المبين بالجدول ٢ – ٨ حصـلنا عليه من التوزيع التكرارى للمسألة ٢ – ٣ بقسمة تكرارات كل فئة على المجموع الكلى للتكرارات (65) وعبرنا عن النتيجة كنسبة مئوية .

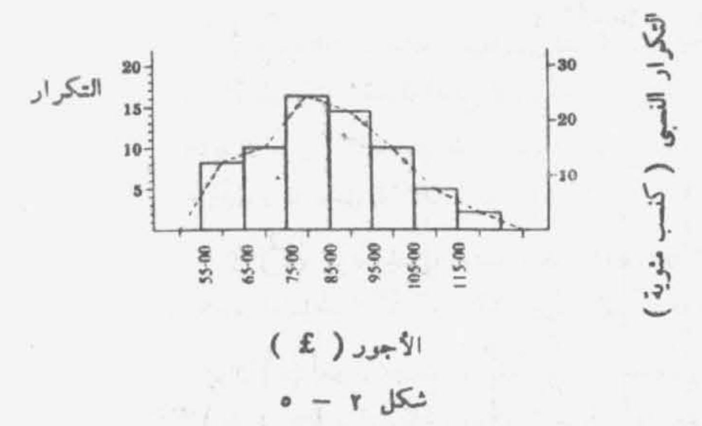
جدول ٢ – ٨

الأجور	التكـرار النسبى (كنسب مئـوية)
£50·00–£59·99	12·3
60·00– 69·99	15·4
70·00– 79·99	24·6
80·00– 89·99	21·5
90·00– 99·99	15·4
100·00–109·99	7·7
110·00–119·99	3·1
	المجموع 100.0%

(ب) ، (ج) . المدرج التكرارى والمدرج التكرارى النسبى موضحان بالشكل ٢ – ٥ . لاحظ أنه للتحويل إلى مدرج تـكرارى نسبى فإنه من الضرورى فقـط إضافة مقياس رأسى يظهر التكرارات النسبية كما هو موضـح على يمين الشكل .

(د)، (هـ) المضلع التكرارى والمضلع التكرارى النسبى موضحان بالخط البيانى المتقطع بالشكل ٢ – ٥ .

للتحويل إلى مضلع تكرارى نسبى فإنه من الضرورى فقط إضافة مقيـاس رأسى يظهر التكرارات النسبية .



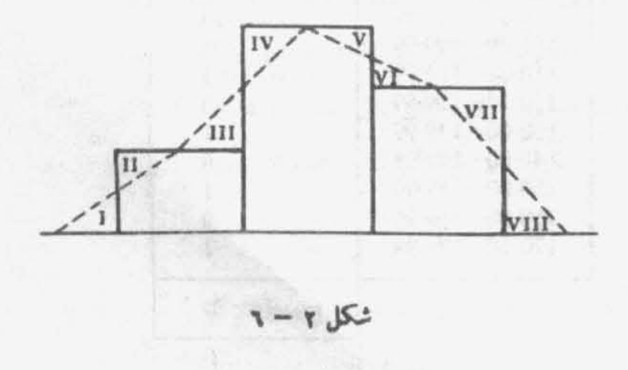
شكل ٢ – ٥

لاحظ أنه إذا كان المطلوب هو المضلع التكرارى النسبى فقط فإن الرسم المقابل لن يحتوى على المدرج التكرارى ومحور التكرارات النسبية سوف يظهر على اليسار بدلا من محور التكرارات .

٢–١١ أثبت أن المسـاحة الكلية للمستطيلات فى المدرج التكرارى تساوى المساحة الكلية المحصـورة بين المضلع التكرارى ومحور السينات .

الحـل :

سنثبت ذلك فى حالة مدرج تكرارى يتكون من ثلاثة مستطيلات كما بالرسم ، حيث يظهر المضلع التكرارى بخطوط متقطعة .



شكل ٢ – ٦

المساحة الكلية للمستطيلات =

المساحة المظللة + مساحة II + مساحة IV + مساحة V + مساحة VII

= المساحة المظللة + مساحة I + مساحة III + مساحة II + مساحة VIII

= المساحة المحصورة بين المضلع التكرارى ومحور السينات .

لأن مساحة I = مساحة II ، مساحة III = مساحة IV ، مساحة V = مساحة VI ، مساحة VII = مساحة VIII .

٢ – ١٢ فى شركة P and R (المسألة ٢ – ٣) عين خمسة عاملين جدد وكانت أجورهم الشهرية £85·34 . كون توزيعاً تكرارياً لأجور الـ 70 عاملا .

الحــل :

التوزيعات التكرارية الممكنة تظهر فى الجداول (أ) ، (ب) ، (جـ) ، (د) ، (هـ) ، أدناه . (أ) احتفظ بنفس طول الفئة £10.00 خلال الجدول . وكنتيجة لذلك ظهرت فئات خالية وتفاصيل دقيقة حول الحد الأعلى لهيكل الأجور .

فى (ب) الفئات الخالية والتفاصيل الدقيقة أمكن تلافيها باستخدام الفئة المفتوحة £120.00 وأكبر . أحد عيوب هذا الأسلوب أن الجدول أصبح لاقيمة له عند إجراء بعض العمليات الرياضية . وعلى سبيل المثال أصبح من المستحيل تحديد الأجور الكلية المدفوعة فى أسبوع حيث £120.00 وأكبر من الممكن أن تتضمن أن الأفراد يمكن أن يحصلوا على أجور قد تصل إلى £1200.00 فى الشهر .

فى (جـ) كون الجدول باستخدام طول الفئة £20.00 أحد العيوب فى ذلك أن كثيراً من المعلومات قد فقدت فى الحدود الدنيا لهيكل الأجور والتفاصيل مازالت دقيقة فى الحد الأعلى لهيكل الأجور .

فى (د) أطوال الفئات غير متساوية . أحد العيوب فى ذلك هو أن عمليات رياضية سوف تتم فيما بعد تفقد السهولة المتاحة فى حالة ما إذا كانت الفئات متساوية . كذلك فكلما زاد طول الفئة زادت أخطاء التجميع .

(أ)

الأجــور	التكرار
£50·00 – £59·99	8
60·00 – 69·99	10
70·00 – 79·99	16
80·00 – 89·99	15
90·00 – 99·99	10
100·00 – 109·99	5
110·00 – 119·99	3
120·00 – 129·99	0
130·00 – 139·99	1
140·00 – 149·99	0
150·00 – 159·99	1
160·00 – 169·99	0
170·00 – 179·99	1
المجموع	70

(ب)

الأجور	التكرار
£50·00 – £59·99	8
60·00 – 69·99	10
70·00 – 79·99	16
80·00 – 89·99	15
90·00 – 99·99	10
100·00 – 109·99	5
110·00 – 119·99	3
120·00 and over	3
المجموع	70

(جـ)

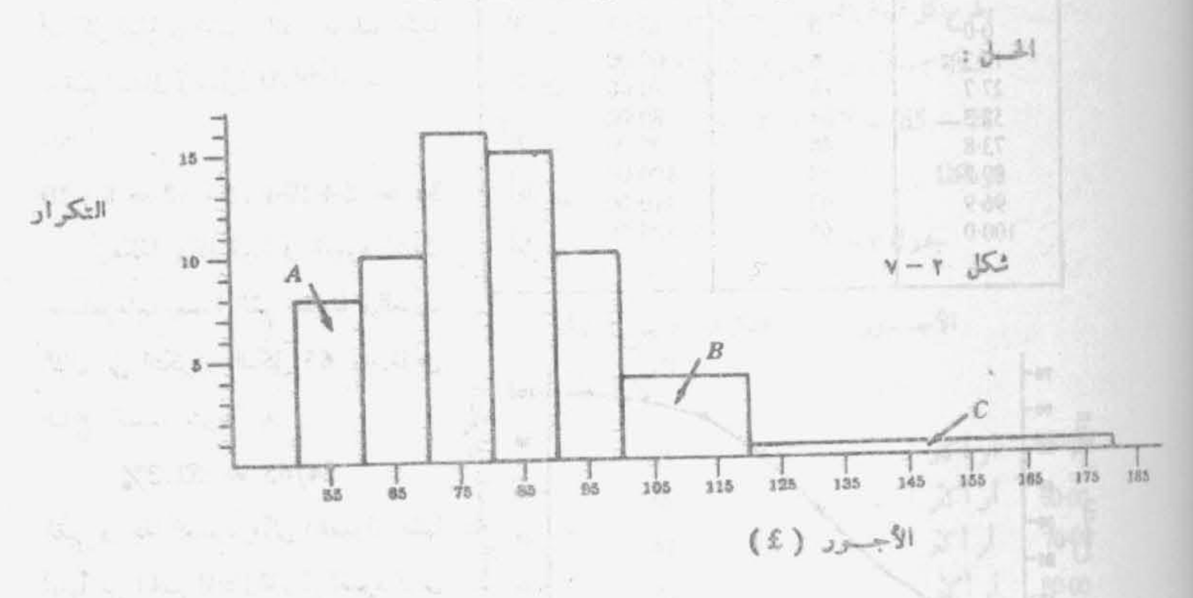
التكرار	الأجور
18	£50·00 - £69·99
31	70·00 - 89·99
15	90·00 - 109·99
3	110·00 - 129·99
1	130·00 - 149·99
1	150·00 - 169·99
1	170·00 - 189·99
70 المجموع	

(د)

التكرار	الأجور
8	£50·00 - £59·99
10	60·00 - 69·99
16	70·00 - 79·99
15	80·00 - 89·99
10	90·00 - 99·99
8	100·00 - 119·99
3	120·00 - 179·99
70 المجموع	

٢ - ١٣ كون مدرجاً تكرارياً للتوزيع التكرارى الموضح فى الجدول (د) بالمسألة ٢ - ١٢

الحــل :



شكل ٢ - ٧

المدرج التكرارى المطلوب يظهر بالشكل ٢ - ٧ . لتكوين هذا المدرج نستخدم القاعدة أن المساحة تتناسب مع التكرار . إذا افترضنا أن المستطيل A يقابل الفئة الأولى (أنظر الجدول (د) فى المسألة ٢-١٢) بتكرار قدره 8. وبما أن الفئة السادسة بالجدول (د) لها نفس التكرار 8 ، فإن المستطيل B والذى يمثل هــذه الفئة يجب أن تكون مساحته هى نفسها مساحة المستطيل A . بما أن طول B ضعف طول A فإن ارتفاعه يجب أن يكون نصــف ارتفاع A كما هو موضح .

وكذلك فإن المستطيل C الممثل للفئة الأخيرة فى الجدول (د) له ارتفاع نصف وحدة على المحور الرأسى .

التوزيع التكرارى المتجمــع والمنحنى التكرارى المتجمع

٢ – ١٤ كون : (أ) التوزيع التكرارى المتجمع .

(ب) التوزيع التكرارى المتجمع النسبى .

(ج) المنحنى التكرارى المتجمع .

(د) المنحنى التكرارى المتجمع النسبى .

وذلك من التوزيع التكرارى بالمسألة ٢ – ٣ .

الحــل :

(أ) ، (ب) التوزيع التكرارى المتجمع والتوزيع التكرارى المتجمع للنسب المئوية (أو التوزيع التكرارى المتجمع النسبى) موضحان بالجدول ٢ – ٩ . لاحظ أن كل قيمة فى العمود الثانى حصلنا عليها بالجمع المتتالى فى جدول المسألة ٢ – ٣ . مثلا

34 = 8+10+16 ، 18 = 8+10

وهكذا ، كل قيمة فى العمود الثالث حصلنا عليها بقسمة القيم المقابلة فى العمود الثانى على التكرار الكلى 65 وعبرنا عن الناتج كنسبة مئوية مثلا

$$34/65 = 52.3\%$$

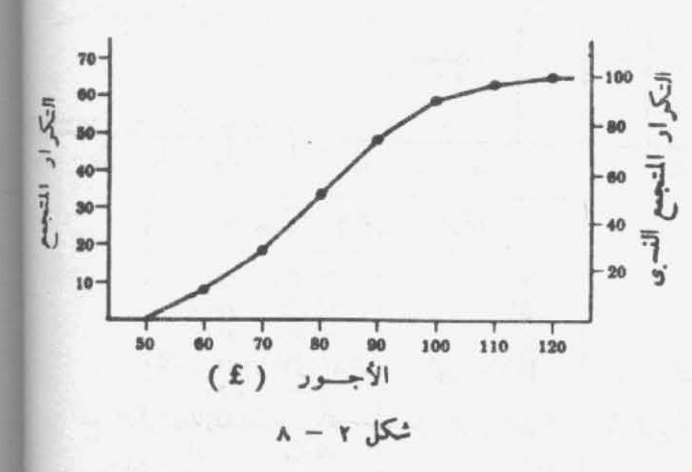
القيم فى هذا العمود يمكن الحصول عليها أيضاً من الجمع المتتالى للقيم فى العمود الثانى من جدول المسألة ٢ – ١٠ (أ) . مثلا

52.3 = 12.3 + 15.4 + 24.6

27.7 = 12.3 + 15.4 ، وهكذا

جدول ٢ – ٩

الأجور	التكرار المتجمع	التكرار المتجمع النسبى
أقل من £50·00	0	0·0
أقل من 60·00	8	12·3
أقل من 70·00	18	27·7
أقل من 80·00	34	52·3
أقل من 90·00	48	73·8
أقل من 100·00	58	89·2
أقل من 110·00	63	96·9
أقل من 120·00	65	100·0



شكل ٢ – ٨

(ج) ، (د) المنحنى التكرارى المتجمع (أو المضلع التكرارى المتجمع) والمنحنى التكرارى المتجمع النسبى (أو المضلع التكرارى المتجمع النسبى) مرسومان معاً بالشكل ٢–٨ المقياس الرأسى إلى اليسار مبين عليه التكرار المتجمع بينما المقياس الرأسى إلى اليمين مبين عليه التكرار المتجمع النسبى . وتسمى هــذه الحالة . بالمنحنى التكرارى المتجمع الصاعد أو المنحنى التكرارى النسبى الصاعد أو للاساس « أقل من » وذلك نظراً للطريقة التى تتجمع بها التكرارات .

٢ – ١٥ كون (أ) التوزيع التكرارى المتجمع النازل «أو أكثر»

(ب) المنحنى التكرارى المتجمع النسبى النازل «أو أكثر»

وذلك من بيانات التوزيع التكرارى للمسألة ٢ – ٣

الحـــل :

(أ) لاحظ أن القيم الموجودة بالعمود الثانى بالجدول ٢ – ١٠ قد حصلنا عليها بالإضافة المتتالية للقيم الموجودة بالعمود التالى بالجدول ٢ – ٥ بالمسألة ٢ – ٣ بادئين بأسفل هذا الجدول . مثلا

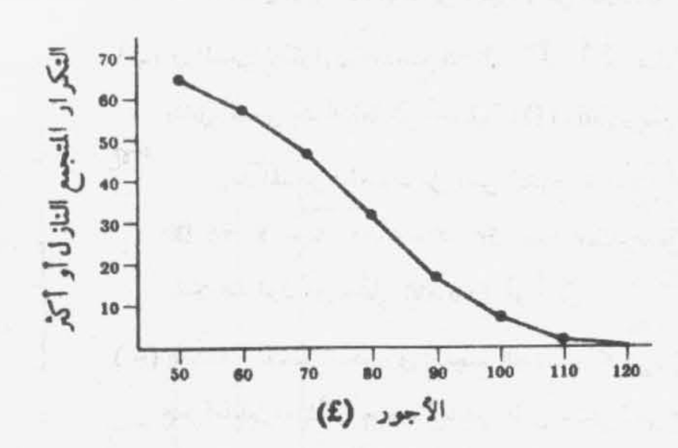
$7 = 2+5$ ، $17 = 2+5+10$

وهكذا .

ويمكن الحصول على هذه القيم أيضاً بطرح كل قيمة بالعمود الثانى من جدول المسألة ٢–١٤ من التكرار الكلى 65. مثلا

$57 = 65 - 8$ ، $47 = 65 - 18$

وهكذا .



شكل ٢ – ٩

جدول ٢ – ١٠

الأجـــور	التكرار المتجمع النازل «أو أكثر»
£50·00 أو أكثر	65
60·00 أو أكثر	57
70·00 أو أكثر	47
80·00 أو أكثر	31
90·00 أو أكثر	17
100·00 أو أكثر	7
110·00 أو أكثر	2
120·00 أو أكثر	0

٢ – ١٦ من المنحنى التكرارى المتجمع بالمسألة ٢ – ١٤ أو ٢ – ١٥ قدر عدد العاملين الذين يحصلون على دخل .

(أ) أقل من £88.00 شهرياً .

(ب) £96.00 أو أكثر شهرياً .

(جـ) على الأقل £63.00 ولكن لا يقل عن £75.00 شهرياً .

الحـــل :

(أ) بالرجوع إلى المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد « أقل من » للمسألة ٢–١٤ ، ارسم خطاً رأسياً يتقاطع مع محور الأجور عند £88.00 . هذا الخط يقابل المنحنى المتجمع الصاعد عند النقطة التى أحداثياتها (88,45) وبهذا فإن عدد العاملين الذين يحصلون على دخل أقل من 88.00 £ شهرياً هو 45 .

(ب) فى المنحنى التكرارى المتجمع النازل أو أكثر بالمسألة ٢ – ١٥ ارسم خطاً رأسياً عند £96.00 . هذا الخط يقابل المنحنى عند النقطة التى أحداثياتها (96،11) وبهذا فإن هناك 11 عاملا يحصلون على دخل £96.00 أو أكثر .

ومن الممكن الحصول على نفس النتيجة باستخدام المنحنى المتجمع الصاعد « أقل من » برسم خط رأسى عنـد 96.00 £ حيث نجد أن هناك 54 عاملا يحصلون على دخل أقل من £96.00 وبهذا فإن 11 = 54 — 65 عاملا يحصلون على دخل £96.00 أو أكثر .

(ج) باستخدام المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد « أقل من » بالمسألة ٢ – ١٤ نجد أن :

عدد العاملين المطلوب = عدد العاملين الذين يحصلون على دخل أقل من £75.00

– عدد العاملين الذين يحصلون على دخل أقل من £63.00 : 15 = 11 – 26

لاحظ أن النتيجة السابقة يمكن الحصول عليها بالاستكمال فى جدول التكرارات المتجمعة ، على سبيل المثال فإن النتيجة التى حصلنا عليها فى (أ) يمكن الحصول عليها كالآتى : بما أن £88.00 هى 8/10 أو 4/5 المسافة بين £80 و £90 فإن رقم العاملين المطلوب يجب أن يكون 4/5 المسافة بين القيم المقابلة وهى 34 و 48 (أنظر جدول المسألة ٢ – ١٤) . ولكن 4/5 الطريق بين 34 ,48 هو $\frac{4}{5}(48-34) = 11.$ فإن رقم العاملين المطلوب هو 45 = 11 + 34 .

٢ – ١٧ خمسة بنسات رميت 1000 مرة وفى كل مرة يسجل عدد البنسات التى تظهر الصورة . يسجل عدد الرميات التى تظهر فيها 5 ,4 ,3 ,2 ,1 ,0 صورة بالجدول ٢ – ١١ .

(أ) ارسم هذه البيانات .

(ب) كون جدولا تظهر فيه النسبة المئوية للرميات التى تظهر بها الصورة أقل من 6 ,5 ,4 ,3 ,2 ,1 ,0

(ج) ارسم بيانات الجدول الذى حصلت عليه فى (ب) .

جدول ٢ – ١١

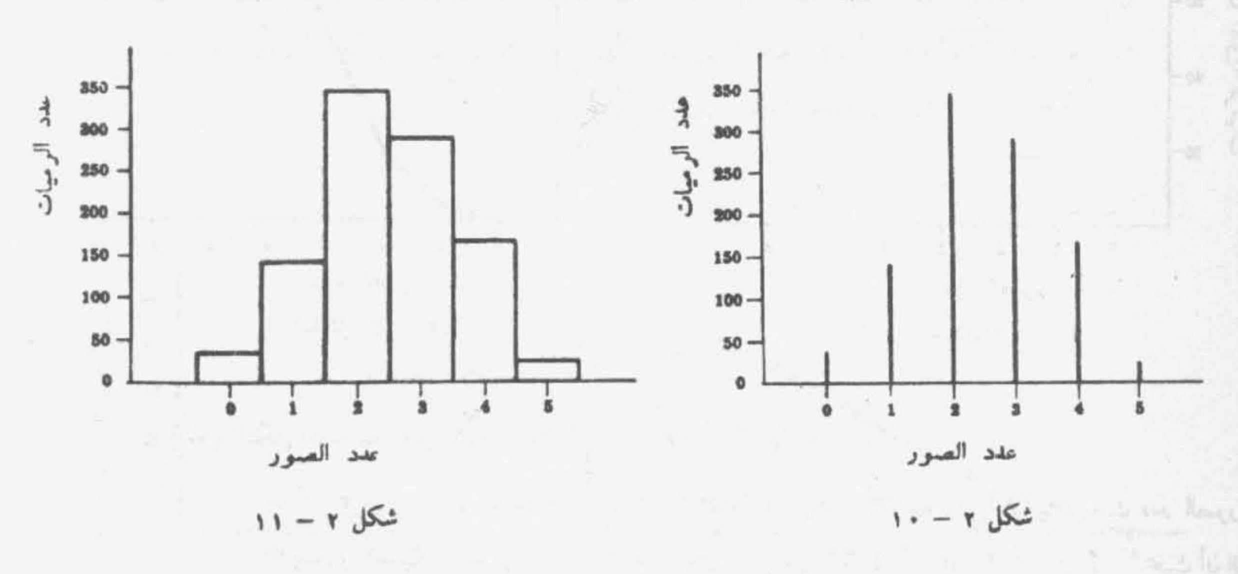
عدد الصور	عدد الرميات (التكرار)
0	38
1	144
2	342
3	287
4	164
5	25
المجموع	1000

الحـل :

(أ) يمكن التعبير بيانياً عن هذه البيانات كما فى الشكل ٢ – ١٠ أو ٢ – ١١ .

الشكل ٢ – ١٠ يبدو أنه أكثر ملاءمة لتمثيل هذه البيانات حيث ان عدد الصور لايمـكن ان يكون 1.5 أو 3.2 مثلا . وهذا الشكل هو صورة من صور الأعمدة البيانية حيث عرض العمود هو الصفر . ويسمى أحياناً بالشكل القضيبى . ويستخدم على وجه الخصوص عندما تكون البيانات متقطعة .

الشكل ٢ – ١١ يمثل المدرج التكرارى للبيانات . لاحظ أن المساحة الكلية للمدرج التكرارى هو التكرارات الكلية 1000 كما يجب أن تكون . عند التمثيل البيانى باستخدام المدرج التكرارى أو المضلع التكرارى فإنه من الضرورى معالجة البيانات كما لو كانت متصلة . وسوف يتضح فيما بعد أن هذه الطريقة مفيدة . لاحظ أننا قد سبق أن استخدمنا المدرج التكرارى والمضلع التكرارى لبيانات متقطعة فى بيانات المسألة ٢ – ١٠ .



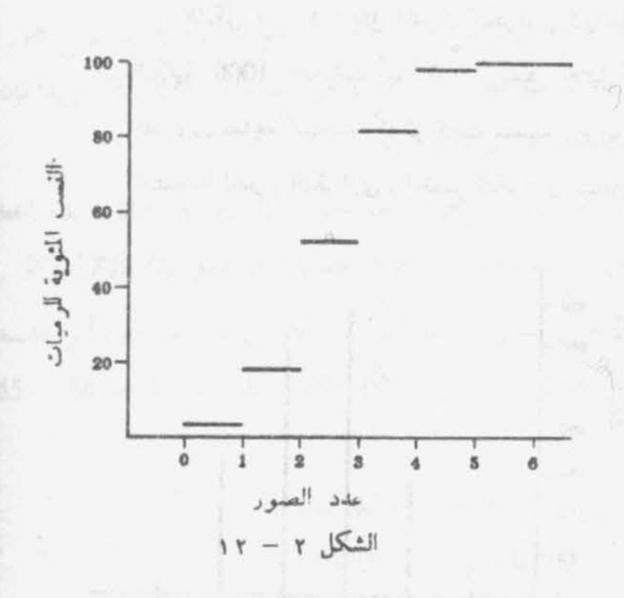
شكل ٢ – ١١   شكل ٢ – ١٠

(ب) بالرجوع إلى بيانات الجدول ٢ – ١٢ نجد أنه يوضح التوزيع التكرارى المتجمع والتوزيع التكرارى المتجمع النسبى (نسب مئوية) لعدد الصور .

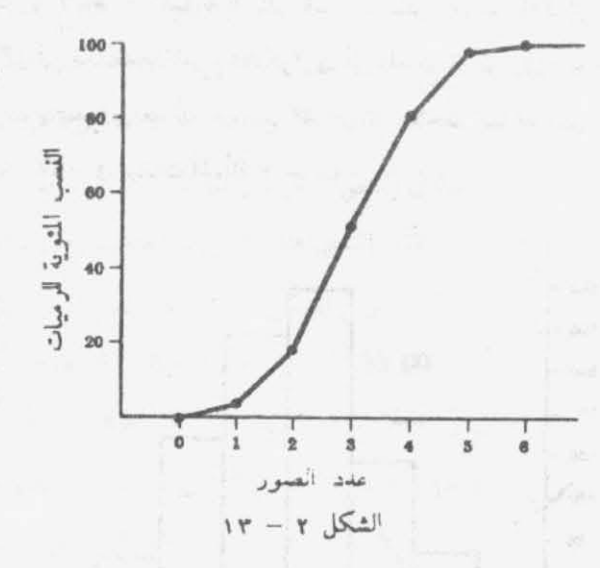
يجب أن نلاحظ أن البيانات « أقل من 1 » ، « أقل من 2 » ..... وهكذا من الممكن أن تكتب « أقل من أو يساوى 0 » « أقل من أو يساوى 1 » .... . وهكذا

جدول ٢ – ١٢

عدد الصور	عدد الرميات (تكرار متجمع)	النسبة المئوية لعدد الرميات والتكرار المتجمع للنسب المئوية
0	0	0·0
أقل من 1	38	3·8
أقل من 2	182	18·2
أقل من 3	524	52·4
أقل من 4	811	81·1
أقل من 5	975	97·5
أقل من 6	1000	100·0



الشكل ٢ – ١٢



الشكل ٢ – ١٣

(جـ) الشكل المطلوب يمكن تمثيله إما بالشكل ٢ – ١٢ أو الشكل ٢ – ١٣ .

الشكل ٢ – ١٢ أكثر ملاءمة لتمثيل البيانات المتقطعة ، حيث أن النسب المئوية للرميات حيث عدد الصور أقل من 2 يساوى النسب المئوية للرميات حيث عدد الصور أقل من 1.75 أو 1.56 أو 1.23 . بحيث أن النسبة 18.2% يجب أن تظهر كتمثيل لهذه القيم . (موضحة بالخط الأفقى) .

الشكل ٢ – ١٣ يظهر المضلع التكرارى المتجمع أو المنحنى التكرارى المتجمع لهذه البيانات وبه تعالج البيانات كما لو كانت بيانات متصلة

لاحظ أن الأشكال ٢ – ١٢ و ٢ – ١٣ يقابلان على الترتيب الأشكال ٢ – ١٠ ، ٢ – ١١ فى الجزء (أ)

المنحنيات التكرارية والمنحنيات التكرارية المتجمعة الممهدة

٢ – ١٨ بيانات الـ 100 طالب فى جامعة XYZ (أنظر صفحة ٤٥) تمثل فى الواقع عينة مأخودة من 1546 طالب من طلبة هذه الجامعة . من البيانات المعطاة من العينة .

(أ) كون مضلعاً تكرارياً ممهداً للنسب المئوية (منحنى تكرارى) ، ثم

(ب) كون منحنى تكرارياً متجمعاً صاعداً « أقل من » للنسب المئوية بحيث يكون ممهداً

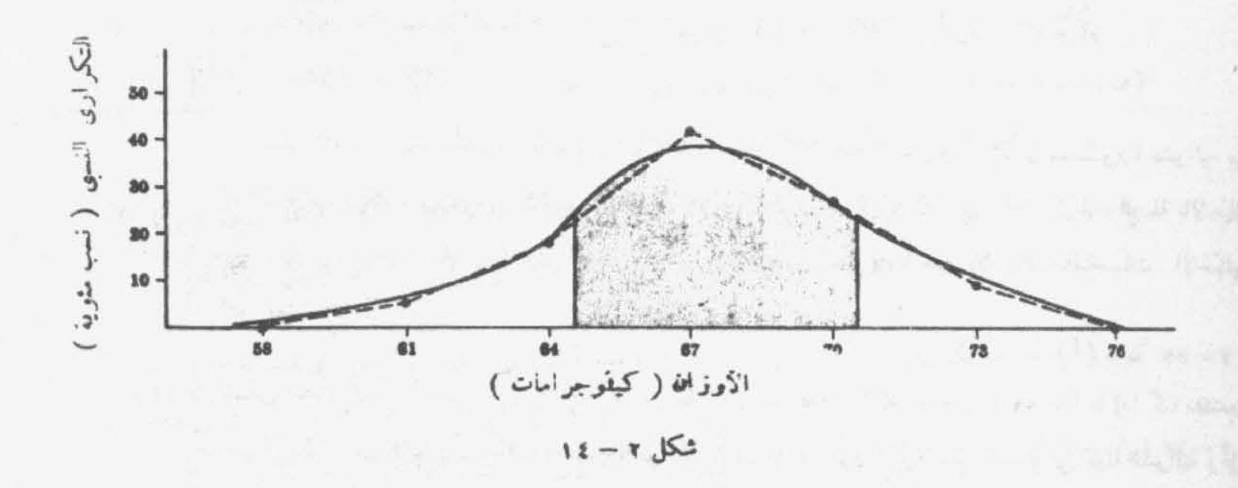
(جـ) من بيانات (أ) ، (ب) قدر عدد الطلبة فى الجامعة الذين تقع أوزانهم بين 70 kg و 65. ماهى الفروض التى يجب أن تضعها .

(د) هل من الممكن استخدام هذه النتائج لتقدير نسبة الذكور فى الولايات المتحدة الذين تقع أوزانهم بين 70 kg و 65 ؟

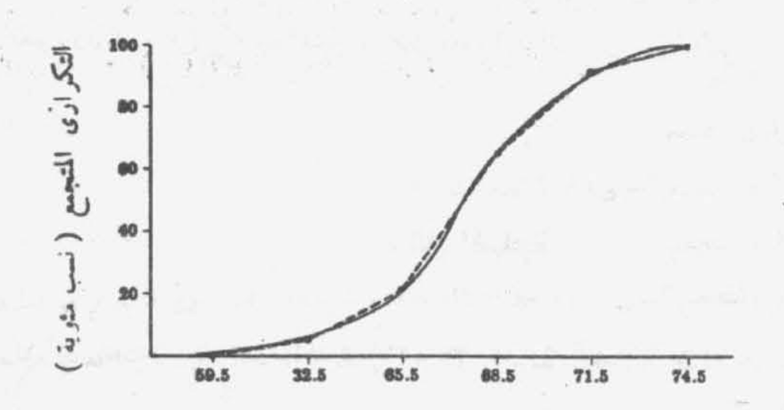
الحـل :

(أ) ، (ب) فى الشكلين ٢ – ١٤ ، ٢ – ١٥ نجد أن الخطوط المتقطعة تمثل المضلع التكرارى والمنحنى التكرارى المتجمع وقد حصلنا عليهما من المعطى فى صفحتى (٤٨، ٤٩) .

والمنحنى الممهد المطلوب يظهر فى الشكل بالخطوط الثقيلة وقد حصلنا عليه بتقريب الخطوط المتقطعة بخط ممهد . من الناحية العملية فن الأسهل تمهيد المنحنى التكرارى المتجمع بحيث نحصل عليه أولا ثم نحصل على المدرج التكرارى الممهد بقراءة القيم من المنحنى التكرارى المتجمع الممهد .



شكل ٢ – ١٤



الأوزان (كيلوجرامات)

شكل ٢ – ١٥

(ج) إذا كانت العينة المكونة من 100 طالب ممثلة للمجتمع المكون من 1546 طالب ، فإن المنحنيات الممهدة فى الأجزاء (أ) ، (ب) من الممكن اعتبارها المنحنى التكرارى النسبى والمنحنى المتجمع النسبى للمجتمع . هذا الفرض صحيح فقط فى حالة ما إذا كانت العينة عشوائية ، بمعنى أن فرصة كل طالب فى اختياره ضمن العينة مساوية لفرصة أى طالب آخر .

وبما أن الأوزان بين 65 kg و70 مسجلة إلى أقرب كيلوجرام فإنها تمثل مثلا الأوزان بين 64.5 و70.5 kg ، ونسبة الطلبة فى المجتمع الذين لهم هذه الأوزان من الممكن الحصول عليها بقسمة المساحة المظللة فى الشكل ٢ – ١٤ على المساحة الكلية المحصورة بين الخط الممهد ومحور السينات .

ومن السهل استخدام الشكل ٢ – ١٤ . ومنه نجد أن

نسبة الطلبة الذين تقل أوزانهم عن 70.5 kg = 82%

نسبة الطلبة الذين تقل اوزانهم عن 64.5 kg = 18%

ولهذا فإن أوزان الطلبة بين 65 و 70 kg وهى 64% = 18% − 82%

وبهذا فإن عدد الطلبة فى الجامعة الذين تقع أوزانهم بين 65 و 70kg إلى أقرب كيلوجرام

$$64\% \times 1546 = 989$$

ويمكن التعبير بصوره أخرى عما سبق بالقول بأن احتمال أو فرصة شخص فى أن يختار بصورة عشوائية من الـ 1546 طالب ويكون وزنه بين 65 و 70 kg هو 64% ,0.64 أو 64 من 100 ولهذه الصلة بالأحتمال (سندرسها فى الفصل السادس) فإن المنحنى التكرارى النسبى يسمى فى أغلب الأحيان بالمنحنيات الاحتمالية أو التوزيعات الاحتمالية .

(د) من الممكن اعتبار النسبة المطلوبة هى 64% (بدرجة أكبر من عدم التأكد عما سبق) فى حالة ما إذا كنا مقتنعين بأن العينة المكونة من الـ 100 طالب المسحوبة من المجتمع الكلى للذكور بالولايات المتحدة هى عينة عشوائية وعلى أية حال فإن هذا يبدو غير محتمل لعدة أسباب منها (١) من الممكن أن يكون بعض طلبة الكليات لم يصلوا إلى أقصى وزن لهم (٢) الأجيال الجديدة قد تميل لأن تكون أثقل وزناً من آبائهم .

مسائل اضافية

٢ – ١٩ (أ) رتب الأرقام 24 ,65 ,34 ,61 ,3 ,10 ,18 ,5 ,21 ,42 ,56 ,12 فى منظومة ، ثم

(ب) حدد المدى

ج : (ب) 62

٢ – ٢٠ الجدول ٢ – ١٣ يبين التوزيع التكرارى للعمر الانتاجى لـ 400 من لمبات الراديو التى أختبرت فى شركة L&M للمبات . بالرجوع لهذا الجدول . عين

(أ) الحد الأعلى للفئة الخامسة

(ب) الحد الأدنى للفئة الثامنة

(جـ) مركز الفئة السابعة

(د) الحدود الحقيقية للفئة الأخيرة

(هـ) طول الفئة

(و) تكرار الفئة الرابعة

(ز) التكرار النسبى للفئة السادسة

(ح) النسبة المئوية للمبات التى عمرها الانتاجى لايتجاوز 600 ساعة

(ط) النسبة المئوية للمبات التى يزيد عمرها الانتاجى أو يساوى 900 ساعة .

(ى) النسبة المئوية للمبات التى لايقل عمرها الانتاجى عن 500 ولكن يقل عن 1000 ساعة .

جدول ٢ – ١٣

العمر الإنتاجى (بالساعات)	عدد اللمبات
300 – 399	14
400 – 499	46
500 – 599	58
600 – 699	76
700 – 799	68
800 – 899	62
900 – 999	48
1000 – 1099	22
1100 – 1199	6
الإجمالى	400

ج : (أ) 799 (ب) 1000 (جـ) 949.5 (د) 1099.5, 1199.5 (هـ) 100 ساعة (و) 76
(ز) 62/400 = 0.155 or 15.5% (ح) 29.5% (ط) 19.0% (ى) 78.0%

٢ – ٢١ كون (أ) مدرجاً تكرارياً . (ب) مضلعاً تكرارياً للتوزيع التكرارى للمسألة السابقة .

٢ – ٢٢ لبيانات المسألة ٢ – ٢٠ كون (أ) التوزيع التكرارى النسبى (ب) المدرج التكرارى النسبى
(جـ) المضلع التكرارى النسبى .

٢ – ٢٣ لبيانات المسألة ٢ – ٢٠ كون

(أ) التوزيع التكرارى المتجمع .

(ب) التوزيع التكرارى المتجمع النسبى (أو النسب المئوية) .

(جـ) المنحنى التكرارى المتجمع .

(د) المنحنى التكرارى المتجمع النسبى . (لاحظ أن المقصود عادة بالمنحنى التكرارى المتجمع هو المنحنى المستخدم فيه الأساس « أقل من » أى المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد هذا مالم يذكر خلاف ذلك) .

٢ – ٢٤ حل المسألة السابقة عندما تتجمع التكرارات على الأساس « أو أكثر » .

٢ – ٢٥ قدر نسبة اللمبات فى المسألة ٢ – ٢٠ التى أعمارها الإنتاجية :

(أ) أقل من 560 ساعة .

(ب) 970 أو أكثر ساعة .

(جـ) بين 620 و 890 ساعة .

ج : (أ) 24% (ب) 11% (ت) 46% .

٢ – ٢٦ القطر الداخلى لجلبة مستديرة منتجة بواسطة إحدى الشركات يمكن قياسها إلى أقرب وحدة من مائة من المليمترات . إذا كانت مراكز الفئات للتوزيع التكرارى لهذه الأقطار معطاه بالمليمترات هى

3.21, 3.24, 3.27, 3.30, 3.33, 3.36

أوجد :

(أ) طول الفئة . (ب) الحدود الحقيقية للفئات (جـ) حدود الفئة .

ج : (أ) 0.03 mm

(ب) 3.195, 3.225, 3.255, ..., 3.375 mm

(جـ) 3.20 — 3.22, 3.23 — 3.25, 3.26 — 3.28,..., 3.35 — 3.37

٢ – ٢٧ الجدول التالى يبين الأقطار بالمليمترات لعينه من 60 من رلمان البلى مصنوعة فى شركة ما . كون التوزيع التكرارى للأقطار مستخدماً طول فئة ملائم .

7·38	7·29	7·43	7·40	7·36	7·41	7·35	7·31	7·26	7·37
7·28	7·37	7·36	7·35	7·24	7·33	7·42	7·36	7·39	7·35
7·45	7·36	7·42	7·40	7·28	7·38	7·25	7·33	7·34	7·32
7·33	7·30	7·32	7·30	7·39	7·34	7·38	7·39	7·27	7·35
7·35	7·32	7·35	7·27	7·34	7·32	7·36	7·41	7·36	7·44
7·32	7·37	7·31	7·46	7·35	7·35	7·29	7·34	7·30	7·40

٢ – ٢٨ لبيانات المسألة السابقة كون (أ) مدرج تكرارى (ب) مضلع تكرارى نسبى
(جـ) منحنى تكرارى نسبى (د) مدرج تكرارى نسبى (هـ) مضلع تكرارى نسبى
(و) التوزيع التكرارى المتجمع (ز) التوزيع التكرارى المتجمع النسبى
(ح) المنحنى التكرارى المتجمع (ط) المنحنى التكرارى المتجمع النسبى .

٢ – ٢٩ من نتائج المسألة ٢ – ٢٨ أوجد نسبة رولمان البلى الذى قطره

(أ) يزيد عن 0.732 mm (ب) ليس أكبر من 0.736 mm

(جـ) بين 0.730 mm و 0.738 .

قارن نتائجك بالنتائج التى تحصل عليها مباشرة من البيانات الخام للمسألة ٢ – ٢٧

٢ – ٣٠ حل المسألة ٢ – ٢٨ مستخدما بيانات المسألة ٢ – ٢٠ .

٢ – ٣١ يظهر الجدول ٢ – ١٤ التوزيع النسبى لإجمالى دخول الذكور الذين أعمارهم 14 سنة فأكثر فى الولايات المتحدة فى سنة 1956 باستخدام هذا الجدول أجب عن الأسئلة التالية :

(أ) ماهو طول الفئة الثانية ؟ الفئة السابعة ؟

(ب) ماهو عدد أطوال الفئات المختلفة بالجدول ؟

(جـ) ما هو عدد الفئات المفتوحة ؟

(د) كيف يمكن كتابة الفئة الأولى بحيث
يكون طولها مساوياً لطول الفئة الثانية ؟
(هـ) ما هو مركز الفئة الثانية ؟ الفئة السابعة ؟
(و) ماهى الحدود الحقيقية للفئة الرابعة ؟
(ز) ما هى نسبة الذكور الذين يحصلون على
دخل $4000 أو أكثر ؟ أقل من $3000 ؟
(ح) ماهى نسبة الذكور الذين يحصلون على
دخل على الأقل $3000 ولكن لايزيد على $5000 ؟

الدخل بالدولارات	النسبة المئوية
Under $1000	17·2
1000 – 1999	11·7
2000 – 2999	12·1
3000 – 3999	14·8
4000 – 4999	15·9
5000 – 5999	11·9
6000 – 9999	12·7
10000 and over	3·6

المصدر : مكتب التعداد

(ط) ماهى نسبة الذكور الذين يحصلون على دخل بين $6300 ، $3000. ماهى الفروض المستخدمة فى هذا الحساب ؟
(ى) لماذا لايساوى مجموع النسب 100% ؟

ج : (أ) $4000 ، $1000 (ب) أربعة (على الرغم من أنه من حيث الدقة فإن الفئة الأولى ليس لها طول محدد)
(جـ) واحد (على الرغم من أن الفئـة الأولى تظهر كفئة مفتوحة ، ولكنها فى الواقع بديل عن كتابة (0—$999.99) (د) 0–$999 (هـ) $1499.50 ، ولكثير من الأغراض العملية يمكن كتابتها
$ 8000 ، $1500 على التوالى . (و) $3999.50 ، $2999.50
(ز) 44.1%, 41.0% . (ح) 30.7% . (ط) 42.0%
(ى) نظراً لأخطاء التقريب فى حساب النسب المئوية .

٢ – ٣٢ (أ) لماذا يستحيل تكوين مدرج تكرارى نسبى أو مضلع تكرارى للتوزيع الموضح بالمسألة السابقة
(ب) كيف يمكن تعديل التوزيع بحيث يمكن تكوين المدرج التكرارى النسبى أو المضلع التكرارى النسبى ؟
(جـ) نفذ التكوين باستخدام التعديلات الموضحة فى (د) .

٢ – ٣٣ (أ) كون المدرج التكرارى النسبى الممهد والمنحنى التكرارى النسبى الممهد المقابلين لبيانات المسألة ٢ – ٢٠ .
(ب) من النتائج (أ) قدر احتمال أن تحترق لمبة قبل 600 ساعة
(جـ) ناقش المخاطرة أو الفرصة التى يتحملها المصنع إذا ضمن أن اللمبة ستستمر صالحة 425 ساعة ؟ 875 ساعة ؟
(د) إذا قدم المصنع ضماناً برد ثمن اللمبة إذا تلفت خلال 90 يوماً . ما هو احتمال أنه سيقوم برد الثمن إذا افترضنا أن اللمبة تستخدم 4 ساعات يومياً ؟ 8 ساعات يومياً ؟

ج : (ب) 0.30 (جـ) 0.52 ، 0.008 .

٢ – ٣٤ (أ) ارم أربع عملات خمسين مرة وسجل فى جدول عدد الصور فى كل رمية (ب) كون توزيعاً تكرارياً يظهر به عدد الرميات التى ظهر بها 0, 1, 2, 3, 4 صورة . (جـ) كون توزيعاً نسبياً يقابل (ب) . (د) قارن النسب التى حصلت عليها فى (جـ) بالتوزيع النظرى 6.25%, 25%, 37.5%, 25%, 6.25% (بالتناسب مع (1, 4, 6, 4, 1) والتى يمكن الحصول عليها باستخدام قواعد الاحتمالات .

الفصل الثالث

الوسط والوسيط والمنوال
والمقاييس الأخرى للنزعة المركزية

رمز الدليل او الرقم الجانبى الأسفل

الرمز X_j (يقرأ "X دليل j") يمثل أى من القيم $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_N$ التى يأخذها المتغير X وعددها N. الحرف j فى X_j الذى يمكن أن يكون أى رقم $1, 2, 3, \ldots, N$ يسمى الدليل أو الرقم الجانبى الأسفل . ومن الواضح أن أى حرف آخر غير j مثل i, k, p, q, s يمكن أيضا استخدامه .

رقم التجميع

الرمز $\sum_{j=1}^{N} X_j$ يستخدم للدلالة على مجموع كل الـ X_j's ابتداء من $j = 1$ إلى $j = N$ بالتعريف .

$$\sum_{j=1}^{N} X_j = X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_N$$

وإذا لم يكن هناك أى غموض محتمل فإننا نعبر عن هذا المجموع بشكل أبسط بالرمز $\Sigma X, \Sigma X_j$ or $\sum_j X_j$

الرمز Σ هو حرف التاج اليونانى سيجما ونعنى به هنا المجموع .

مثال ١ — $\sum_{j=1}^{N} X_j Y_j = X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + X_3 Y_3 + \ldots + X_N Y_N$

مثال ٢ — $\sum_{j=1}^{N} aX_j = aX_1 + aX_2 + \ldots + aX_N = a(X_1 + X_2 + \ldots + X_N) = a\sum_{j=1}^{N} X_j$

حيث a ثابت – وبشكل أبسط $\Sigma aX = a\Sigma X$.

مثال ٣ — إذا كانت a, b, c ثوابت $\Sigma(aX + bY - cZ) = a\Sigma X + b\Sigma Y - c\Sigma Z$

أنظر المسألة ٣ – ٣

المتوسطات ومقاييس النزعة المركزية

المتوسط هو القيمة النموذجية أو الممثلة لمجموعة من البيانات – وحيث أن مثل هذه القيمة النموذجية تميل إلى الوقوع في المركز داخل مجموعة بيانات مرتبة حسب قيمها ، فإن المتوسطات تسمى أيضا بمقاييس النزعة المركزية . ويمكن أن نعرف صورا عديدة للمتوسطات وإن كان الأكثر شيوعا الوسط الحسابي أو باختصار الوسط ، الوسيط ، المنوال ، الوسط الهندسي والوسط التوافقي – وكل منهما له مميزاته وعيوبه وهذا يعتمد على البيانات والهدف من استخدامه .

الوسط الحسابي

الوسط الحسابي أو الوسط للمجموعة N من الأرقام $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_N$ ويرمز له بالرمز $\bar{X}$ (ويقرأ "X bar") ويعرف كالآتي

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_N}{N} = \frac{\sum_{j=1}^{N} X_j}{N} = \frac{\Sigma X}{N} \quad (١)$$

مثال : الوسط الحسابي للأرقام 8, 3, 5, 12, 10 هو

$$\bar{X} = \frac{8 + 3 + 5 + 12 + 10}{5} = \frac{38}{5} = 7.6$$

إذا كانت الأرقام $X_1, X_2, \ldots, X_K$ تحدث $f_1, f_2, \ldots, f_K$ مرة على الترتيب (بمعنى أنها تحدث بتكرارات $f_1, f_2, \ldots, f_K$) فإن الوسط الحسابي سيكون

$$\bar{X} = \frac{f_1X_1 + f_2X_2 + \ldots + f_KX_K}{f_1 + f_2 + \ldots + f_K} = \frac{\sum_{j=1}^{K} f_jX_j}{\sum_{j=1}^{K} f_j} = \frac{\Sigma fX}{\Sigma f} = \frac{\Sigma fX}{N} \quad (٢)$$

حيث $N = \Sigma f$ هو مجموع التكرارات أي مجموع عدد الحالات .

مثال : إذا كانت 5, 8, 6, 2 تحدث بتكرارات 3, 2, 4, 1 على الترتيب فإن الوسط الحسابي سيكون

$$\bar{X} = \frac{(3)(5) + (2)(8) + (4)(6) + (1)(2)}{3 + 2 + 4 + 1} = \frac{15 + 16 + 24 + 2}{10} = 5.7$$

الوسط الحسابي المرجح

في بعض الأحيان نقرن بعض الأرقام $X_1, X_2, \ldots, X_K$ بمعاملات ترجيح أو أوزان $w_1, w_2, \ldots, w_K$ وهذه تعتمد على الدلالة أو الأهمية المرتبطة بهذا الأرقام . في هذه المسألة .

$$\bar{X} = \frac{w_1X_1 + w_2X_2 + \ldots + w_KX_K}{w_1 + w_2 + \ldots + w_K} = \frac{\Sigma wX}{\Sigma w} \quad (٣)$$

يسمى بالوسط الحسابي المرجح . لاحظ أوجه الشبه بالمعادلة (٢) التي يمكن اعتبارها وسطا حسابيا مرجحا بأوزان $f_1, f_2, \ldots, f_K$.

مثال إذا كان الامتحان النهائي في مقرر أعطى وزنا ثلاثة أمثال الامتحانات الشفهية وإذا حصل طالب في الامتحان النهائي على 85 وفي الامتحانات الشفهية على 70,90 فإن متوسط تقديره هـو

$$\bar{X} = \frac{(1)(70) + (1)(90) + (3)(85)}{1+1+3} = \frac{415}{5} = 83$$

خصائص الوسط الحسابي

(ا) المجموع الجبري لانحرافات القيم عن وسطها الحسابي يساوي صفرا .

مثال :

انحرافات الأرقام 8, 3, 5, 12, 10 عن وسطها الحسابي 7.6 هو $8 - 7.6, 3 - 7.6, 5 - 7.6$
$12 - 7.6, 10 - 7.6$ or $4.0, -4.6, -2.6, 4.4, 2.4$ ومجموعه الجبري
$0.4 - 4.6 - 2.6 + 4.4 + 2.4 = 0$.

(ب) مجموع مربعات انحرافات مجموعة من الأرقام X_j عن أي رقم a يكون أصغر ما يمكن في حالة واحدة فقط إذا كانت $a = \bar{X}$. أنظر المسألة ٤ – ٢٧ الفصل الرابع .

(جـ) إذا كان متوسط f_1 من الأرقام هـو m_1 و f_2 من الأرقام هو m_2 ، ... و f_K من الأرقام متوسطها m_K فإن متوسط جميع الأرقام هـو

$$\bar{X} = \frac{f_1m_1 + f_2m_2 + \ldots + f_Km_K}{f_1 + f_2 + \ldots + f_K} \qquad (٤)$$

أي الوسط الحسابي المرجح لجميع الأوساط . أنظر المسألة ٣–١٢ .

(د) إذا كانت A أي وسط حسابي افتراضي أو مخمن (والذي يمكن أن يكون أي رقم) وإذا كان $d_j = X_j - A$ هو انحرافات X_j عن A فإن المعادلات (١) ، (٢) سيصبحان على الترتيب .

$$\bar{X} = A + \frac{\sum_{j=1}^{N} d_j}{N} = A + \frac{\Sigma d}{N} \qquad (٥)$$

$$\bar{X} = A + \frac{\sum_{j=1}^{K} f_j d_j}{\sum_{j=1}^{K} f_j} = A + \frac{\Sigma fd}{N} \qquad (٦)$$

حيث $N = \sum_{j=1}^{K} f_j = \Sigma f$ لاحظ أن (٥) و (٦) يمكن تلخيصهما بالمعادلة $\bar{X} = A + \bar{d}$ (أنظر المسألة ٣-١٨) .

الوسط الحسابى محسوبا من بيانات مجمعة

عندما تعرض البيانات فى توزيع تكرارى ، فإن جميع القيم التى تقع داخل فئة معينة تعتبر أنها مطابقة لمركز الفئة أو منتصف مدى الفئة . الصيغ (٢) ، (٦) يمكن استخدامها للبيانات المجمعة إذا اعتبرنا X_j مركز الفئة و f_j التكرار المقابل لها ، A أى مركز فئة إفتراضى أو تخمين $d_j = X_j - A$ انحرافات X_j عن A.

الحساب باستخدام الصيغ (٢) ، (٦) يسميان أحيانا بالطريقة المطولة والطريقة المختصرة على الترتيب . (أنظر المسائل ٣ - ١٥ و ٣ - ٢٠) . إذا كانت أطوال الفئات متساوية وتساوى C ، والانحرافات $d_j = X_j - A$ يمكن التعبير عنها بالصورة cu_j حيث u_j يمكن أن يكون عددا صحيحا موجبا أو سالبا أو صفرا ، أى $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, وبهذا فان الصيغة (٦) تصبح

$$\bar{X} = A + \left(\frac{\sum_{j=1}^{K} f_j u_j}{N}\right)c = A + \left(\frac{\Sigma fu}{N}\right)c \qquad (٧)$$

والتى تكافئ المعادلة $\bar{X} = A + c\bar{u}$. (أنظر المسألة ٣ - ٢١) . وهذه تسمى بطريقة الترميز عند حساب الوسط الحسابى . وهذه الطريقة مختصرة جداً ويجب استخدامها دائما للبيانات المجمعة عندما تكون أطوال الفئات متساوية . (أنظر المسائل ٣ - ٢٢ و ٣ - ٢٣) . لاحظ أنه فى طريقة الترميز فإن قيم المتغير X تحول إلى قيم المتغير u بالعلاقة $X = A + cu$.

الوسيط

الوسيط لمجموعة من الأرقام مرتبة حسب قيمها (فى منظومة) هى القيمة التى فى المنتصف أو الوسط الحسابى للقيمتين بالمنتصف .

مثال ١ — مجموعة الأرقام 3, 4, 4, 5, 6, 8, 8, 8, 10 وسيطها هو 6.

مثال ٢ — مجموعة الأرقام 5, 5, 7, 9, 11, 12, 15, 18 وسيطها هو $\frac{1}{2}(9 + 11) = 10$.

وفى البيانات المجمعة فإن الوسيط نحصل عليه بالاستكمال ويحسب كالآتى :

$$\text{الوسيط} = L_1 + \left(\frac{\frac{N}{2} - (\Sigma f)_1}{f_{\text{median}}}\right)c \qquad (٨)$$

حيث

L_1 = الحد الأدنى للفئة الوسيطية (أى الفئة التى يقع فيها الوسيط) .

N = عدد العناصر فى البيانات (مجموع التكرارات) .

$(\Sigma f)_1$ = مجموع التكرارات لجميع الفئات قبل الفئة الوسيطية .

f_{median} = تكرار الفئة الوسيطية .

c = طول الفئة الوسيطية .

ويمكن التعبير هندسيا عن الوسيط بأنه القيمة X على الاحداثى السينى التى إذا رسم عندها عمود رأسى فإنه يقسم المدرج التكرارى إلى جزءين متساويين . يعبر عن هذه القيمة لـ X أحيانا بـ $\tilde{X}$.

المنوال

المنوال لمجموعة من القيم هى القيمة التى تتكرر أكثر من غيرها أو القيمة الأكثر شيوعا . وقد لايكون للقيم منوال وقد يوجد للقيم منوال ولكنه غير وحيد .

مثال ١ — المجموعة 18 ,12 ,11 ,10 ,10 ,9 ,9 ,9 ,7 ,5 ,2 ,2 لها منوال 9

مثال ٢ — المجموعة 16 ,15 ,12 ,10 ,8 ,5 ,3 ليس لها منوال .

مثال ٣ — المجموعة 9 ,7 ,7 ,7 ,5 ,5 ,4 ,4 ,4 ,3 ,2 لها منوالان هما 7,4 وتسمى مجموعة ذات منوالين .

التوزيع الذى له منوال واحد يسمى وحيد المنوال

فى حالة البيانات المجمعة حيث يعبر عن البيانات بمنحنى تكرارى فإن المنوال هو قيمة (أو قيم) X المقابلة لنقطة (او نقط) النهاية العظمى للمنحنى . ويعبر أحيانا عن هذه القيمة لـ X بالرمز $\hat{X}$

ونحصل على المنوال من التوزيع التكرارى أو المدرج التكرارى بالصيغة :

$$\text{المنوال} = L_1 + \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}\right) c \qquad (٩)$$

حيث

L_1 = الحد الأدنى للفئة المنوالية (أى الفئة التى يقع فيها المنوال) .

Δ_1 = زيادة تكرار الفئة المنوالية عن تكرار الفئة قبل المنوالية .

Δ_2 = زيادة تكرار الفئة المنوالية عن تكرار الفئة بعـد المنوالية .

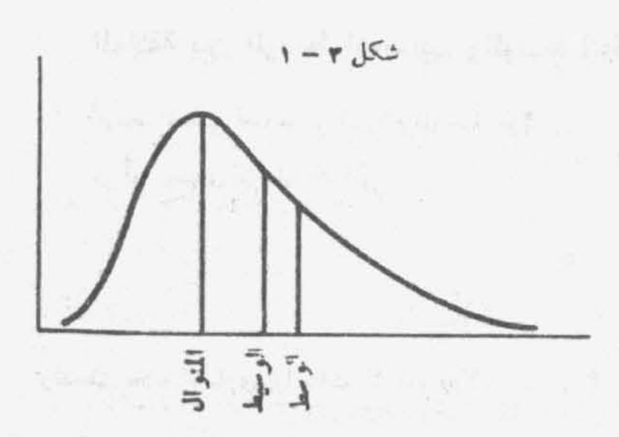
c = طول الفئة المنوالية .

علاقة اعتبارية بين الوسط والوسيط والمنوال

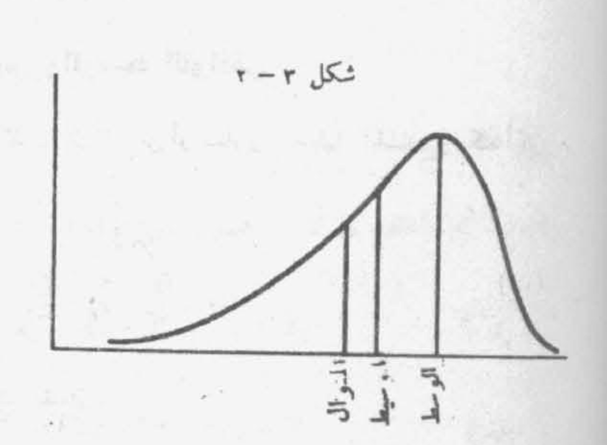
المنحنيات التكرارية وحيدة المنوال والبسيطة الالتواء (غير متماثلة) تحقق العلاقة الاعتبارية .

المتوسط – المنوال = ٣ (المتوسط – الوسيط) (١٠)

فى الأشكال ٣ – ١ و ٣ – ٢ أدناه يوضح الموضع النسبى للوسط والوسيط والمنوال للمنحنيات التكرارية الملتوية إلى اليمين والمنحنيات الملتوية إلى اليسار على الترتيب . فى المنحنيات المتماثلة يتطابق الوسط والوسيط والمنوال .



شكل ٣ – ١



شكل ٣ – ٢

الوسط الهندسى

الوسط الهندسى G لمجموعة من N رقم $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_N$ هـو الجذر النونى لحاصل ضرب هذه الأرقام .

$$G = \sqrt[N]{X_1 X_2 X_3 \ldots X_N} \qquad (11)$$

مثال : الوسط الهندسى للأرقام 2, 4, 8 هـو $G = \sqrt[3]{(2)(4)(8)} = \sqrt[3]{64} = 4$.

ومن الناحية العملية فإن الوسط الهندسى G يحسب باستخدام اللوغاريتمات (أنظر المسألة ٣ - ٣٥) . لحساب الوسط الهندسى لبيانات المجمعة أنظر المسائل ٣ – ٣٦ ، ٣ – ٩١ .

الوسط التوافقى H :

الوسط التوافقى H لمجموعة من N رقم . $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_N$ هو مقلوب الوسط الحسابى لمقلوبات هذه القيم .

$$H = \frac{1}{\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{X_j}} = \frac{N}{\Sigma\frac{1}{X}} \qquad (١٢)$$

ومن الناحية العملية فقد يكون من الأسهل أن نتذكر أن

$$\frac{1}{H} = \frac{\Sigma\frac{1}{X}}{N} = \frac{1}{N}\Sigma\frac{1}{X} \qquad (١٣)$$

مثال : الوسط التوافقى للأرقام 2, 4, 8 هو $H = \frac{3}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}} = \frac{3}{\frac{7}{8}} = 3{\cdot}43$

لحساب الوسط التوافقى للبيانات المجمعة ، أنظر المسائل ٣-٩٩ ، ٣ - ١٠٠ .

العلاقة بين الوسط الحسابى والوسط الهندسى والوسط التوافقى :

الوسط الهندسى لمجموعة من الأرقام الموجبة $X_1, X_2, \ldots, X_N$ أقل من أو يساوى وسطها الحسابى ولكنه أكبر من أو يساوى وسطها التوافقى .

$$H \leqq G \leqq \bar{X} \qquad (١٤)$$

وتتحقق علامة التساوى إذا كانت الأرقام $X_1, X_2, \ldots, X_N$ متساويه

مثال : المجموعة 2, 4, 8 وسطها الحسابى 4.67 ووسطها الهندسى 4 ووسطها التوافقى 3.43

جذر متوسط المربعات : (R.M.S)

جذر متوسطات المربعات (R.M.S) أو الوسط التربيعى لمجموعة من الأرقام $X_1, X_2, \ldots, X_N$ يرمز له أحيانا بالرمز $\sqrt{\bar{X}^2}$ ويعرف كالآتى :

$$\text{R.M.S.} = \sqrt{\overline{X^2}} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{N}X_j^2}{N}} = \sqrt{\frac{\Sigma X^2}{N}} \qquad (١٥)$$

هذا النوع من المتوسط يستخدم بكثرة فى التطبيقات الطبيعية .

مثال : جذر متوسط المربعات للأرقام 1, 3, 4, 5, 7 هو

$$\sqrt{\frac{1^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 - 7^2}{5}} = \sqrt{20} = 4{\cdot}47$$

(جـ) $\sum_{j=1}^{20} f_j X_j^3$ $\quad f_1X_1^3 + f_2X_2^3 + \ldots + f_{20}X_{20}^3$

(د) $\sum_{j=1}^{N} a_j b_j$ $\quad a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \ldots + a_Nb_N$

(هـ) $\sum_{j=1}^{4} f_j X_j Y_j$ $\quad f_1X_1Y_1 + f_2X_2Y_2 + f_3X_3Y_3 + f_4X_4Y_4$

٣-٣ أثبت أن $\sum_{j=1}^{N} (aX_j + bY_j - cZ_j) = a\sum_{j=1}^{N} X_j + b\sum_{j=1}^{N} Y_j - c\sum_{j=1}^{N} Z_j$ حيث a, b and C أى ثوابت .

الحـل :

$$\sum_{j=1}^{N}(aX_j + bY_j - cZ_j) = (aX_1 + bY_1 - cZ_1) + (aX_2 + bY_2 - cZ_2) + \ldots + (aX_N + bY_N - cZ_N)$$

$$= (aX_1 + aX_2 + \ldots + aX_N) + (bY_1 + bY_2 + \ldots + bY_N) - (cZ_1 + cZ_2 + \ldots + cZ_N)$$

$$= a(X_1 + X_2 + \ldots + X_N) + b(Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_N) - c(Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_N)$$

$$= a\sum_{j=1}^{N} X_j + b\sum_{j=1}^{N} Y_j - c\sum_{j=1}^{N} Z_j$$

أو باختصار $\quad \Sigma(aX + bY - cZ) = a\Sigma X + b\Sigma Y - c\Sigma Z$

٣-٤ المتغيران X ، Y يأخذان القيم

$$X_1 = 2, X_2 = -5, X_3 = 4, X_4 = -8 \text{ and } Y_1 = -3, Y_2 = -8, \quad Y_3 = 10, Y_4 = 6$$

على الترتيب . أحسب

(ا) ΣX (ب) ΣY (جـ) ΣXY (د) ΣX^2 (هـ) ΣY^2 (و) $(\Sigma X)\ (\Sigma Y)$ (ز) ΣXY^2
(ح) $\Sigma(X + Y)(X - Y)$

الحـل :

لاحظ أنه فى كل حالة قد حذف الدليل j فى X و Y ومن المفهوم أن Σ تعنى $\sum_{j=1}$

فمثلا ΣX هى اختصار لـ $\sum_{j=1}^{4} X_j$

(ا) $\Sigma X = (2) + (-5) + (4) + (-8) = 2 - 5 + 4 - 8 = -7$

(ب) $\Sigma Y = (-3) + (-8) + (10) + (6) = -3 - 8 + 10 + 6 = 5$

(جـ) $\Sigma XY = (2)(-3) + (-5)(-8) + (4)(10) + (-8)(6) = -6 + 40 + 40 - 48 = 26$

(د) $\Sigma X^2 = (2)^2 + (-5)^2 + (4)^2 + (-8)^2 = 4 + 25 + 16 + 64 = 109$

(هـ) $\Sigma Y^2 = (-3)^2 + (-8)^2 + 10^2 + (6)^2 = 9 + 64 + 100 + 36 = 209$

(و) $(\Sigma X)(\Sigma Y) = (-7)(5) = -35.$ باستخدام (أ) ، (ب) . لاحظ أن $(\Sigma X)(\Sigma Y) \neq \Sigma XY$

(ز) $\Sigma XY^2 = (2)(-3)^2 + (-5)(-8)^2 + (4)(10)^2 + (-8)(6)^2 = -190$

(ح) باستخدام (جـ) ، (هـ) $\Sigma(X+Y)(X-Y) = \Sigma(X^2 - Y^2) = \Sigma X^2 - \Sigma Y^2 = 109 - 209 = -100$

٣-٥ إذا كانت $\sum_{j=1}^{6} X_j = -4$ ، $\sum_{j=1}^{6} X_j^2 = 10$ احسب (أ) $\sum_{j=1}^{6}(2X_j+3)$ (ب) $\sum_{j=1}^{6} X_j(X_j-1)$

(جـ) $\sum_{j=1}^{6}(X_j-5)^2$

الحـــل :

(أ) $\sum_{j=1}^{6}(2X_j+3) = \sum_{j=1}^{6}2X_j + \sum_{j=1}^{6}3 = 2\sum_{j=1}^{6}X_j + (6)(3) = 2(-4) + 18 = 10$

(ب) $\sum_{j=1}^{6}X_j(X_j-1) = \sum_{j=1}^{6}(X_j^2 - X_j) = \sum_{j=1}^{6}X_j^2 - \sum_{j=1}^{6}X_j = 10 - (-4) = 14$

(جـ) $\sum_{j=1}^{6}(X_j-5)^2 = \sum_{j=1}^{6}(X_j^2 - 10X_j + 25) = \sum_{j=1}^{6}X_j^2 - 10\sum_{j=1}^{6}X_j + 25(6) = 10 - 10(-4) + 25(6) = 200$

ومن الممكن حذف الدليل j إذا رغبنا فى ذلك واستخدام Σ بدلا من $\sum_{j=1}^{6}$ مادام هذا الاختصار مفهوما .

الوسط الحسابى :

٣-٦ درجات طالب فى ستة امتحانات هى 84, 91, 72, 68, 87 and 78 . أوجد الوسط الحسابى لهذه الدرجات

الحـــل :

$$\bar{X} = \frac{\Sigma X}{N} = \frac{84 + 91 + 72 + 68 + 87 + 78}{6} = \frac{480}{6} = 80$$

فى كثير من الأحيان يستخدم الاصطلاح المتوسط كرادف للوسط الحسابى . ومن حيث الدقة فهذا الاستخدام غير سليم حيث أن هناك متوسطات أخرى غير الوسط الحسابى .

٣-٧ سجل أحد العلماء العشرة قياسات التالية لأقطار أسطوانة فكانت :

38.8, 40.9, 39.2, 39.7, 40.2, 39.5, 40.3, 39.2, 39.8 and 40.6 millimetres أوجد الوسط الحسابى للقياسات .

الحـــل :

$$\bar{X} = \frac{\Sigma X}{N} = \frac{38{\cdot}8 + 40{\cdot}9 + 39{\cdot}2 + 39{\cdot}7 + 40{\cdot}2 + 39{\cdot}5 + 40{\cdot}3 + 39{\cdot}2 + 39{\cdot}8 + 40{\cdot}6}{10} = \frac{398{\cdot}2}{10} = 39{\cdot}8 \text{ mm}$$

٣-٨ الأجر السنوى لأربعة رجال هو $5000, $6000, $6500 and $30 000. (أ) أوجد الوسط الحسابى للأجور

(ب) هل يمكن القول بأن هذا الوسط يمثل لهذه الأجور ؟

الحـل :

(أ)

$$\bar{X} = \frac{\$5000 + \$6000 + \$6500 + \$30\,000}{4} = \frac{\$45\,500}{4} = \$11\,875$$

(بافتراض أن جميع الأرقام فى الأجور المعطاة معنوية) .

(ب) المتوسط $11 875 ليس ممثلا للأجور بالتأكيد واعتبار هذا الرقم كوسط بدون تعليق أكثر عليه يؤدى إلى كثير من الخطأ . فأحد العيوب الكبيرة فى المتوسط هو شدة تأثره بالقيم المتطرفة .

٣-٩ أوجد الوسط الحسابى للأرقام 5, 3, 6, 5, 4, 5, 2, 8, 6, 5, 4, 8, 3, 4, 5, 4, 8, 2, 5, 4

الطريقة ١ :

$$\bar{X} = \frac{\Sigma X}{N} = \frac{5+3+6+5+4+5+2+8+6+5+4+8+3+4+5+4+8+2+5+4}{20} = \frac{96}{20} = 4{\cdot}8$$

الطريقة ٢ :

هناك ست خمسات وثلاثتان وستتان وخمس أربعات واثنتان وثلاثة ثمانيات . إذن

$$\bar{X} = \frac{\Sigma fX}{\Sigma f} = \frac{\Sigma fX}{N} = \frac{(6)(5) + (2)(3) + (2)(6) + (5)(4) + (2)(2) + (3)(8)}{6+2+2+5+2+3} = \frac{96}{20} = 4{\cdot}8$$

٣-١٠ من مائة رقم 20 أربعة ، 40 خمسة ، 30 ستة والباقى كانوا سبعات . أوجد الوسط الحسابى لهذه الأرقام .

$$\bar{X} = \frac{\Sigma fX}{\Sigma f} = \frac{\Sigma fX}{N} = \frac{(20)(4) + (40)(5) + (30)(6) + (10)(7)}{100} = \frac{530}{100} = 5{\cdot}30$$

٣-١١ إذا كانت درجات طالب فى الرياضة والطبيعة واللغة الانجليزية والصحة العامة هى على الترتيب 82 , 86 , 90, 70 . إذا كانت معاملات الترجيح (عدد ساعات المحاضرات الأسبوعية) لهذه المقررات هى 3 ,5 ,3 ,1 أوجد متوسط الدرجات بالتقريب .

الحـل :

نستخدم الوسط الحسابى المرجح والأوزان المستخدمة لكل درجة هى معاملات الترجيح لكل مادة . إذن

$$\bar{X} = \frac{\Sigma wX}{\Sigma w} = \frac{(3)(82) + (5)(86) + (3)(90) + (1)(70)}{3+5+3+1} = 85$$

٣-١٢ فى شركة بها 80 عاملا ، 60 يحصلون على $3.0 فى الساعة ، 20 يحصلون على $2.00 فى الساعة .

(أ) أوجد متوسط دخولهم فى الساعة (ب) هل الاجابة على (أ) لن تتغير إذا كان الـ 60 عاملا متوسط دخلهم فى الساعة هــو $3.00 والـ 20 عاملا متوسط دخلهم فى الساعة هــو $2.00 ؟ حقق اجابتك ؟

(ج) هل تعتقد أن متوسط أجر الساعة ممثل للأجور ؟

الحــل :

(أ)
$$\bar{X} = \frac{\Sigma fX}{N} = \frac{(60)(\$3{\cdot}00) + (20)(\$2{\cdot}00)}{60 + 20} = \frac{\$220{\cdot}00}{80} = \$2{\cdot}75$$

(ب) نعم ، النتيجة واحدة . لإثبات ذلك افرض أن f_1 رقم لها وسط m_1 و f_2 رقم لها وسط m_2. يجب أن نثبت أن وسط جميع الأرقام هــو

$$\bar{X} = \frac{f_1m_1 + f_2m_2}{f_1 + f_2}$$

إذاكان مجموع الـ f_1 رقم هو M_1 والـ f_2 رقم هو M_2 . فإنه من تعريف الوسط الحسابى .

$$m_1 = \frac{M_1}{f_1} \qquad m_2 = \frac{M_2}{f_2}$$

أو $M_1 = f_1m_1, M_2 = f_2m_2$ وبما أن مجموع الـ $(f_1 + f_2)$ رقم هو $(M_1 + M_2)$ فإن الوسط الحسابى لجميع الأرقام هــو

$$\bar{X} = \frac{M_1 + M_2}{f_1 + f_2} = \frac{f_1m_1 + f_2m_2}{f_1 + f_2}$$

وهو المطلوب . ومن السهل تعميم النتيجة .

(ج) من الممكن أن نقول أن $2.75 « ممثل » لأجر الساعة بمعنى أن أغلب العاملين يحصلون على $3.00 فى الساعة والذى لا يبعد كثيرا عن $2.75 ويجب أن نذكر أنه عند تلخيص البيانات الرقية فى رقم واحد (كما هو الحال فى الوسط) فإننا معرضين للوقوع فى بعض الخطأ ومن المؤكد أن النتيجة ليست مضللة كما فى المسألة ٣ — ٨

والواقع وحتى نكون فى جانب الحرص فإن بعض التقدير « للتشتت » أو « التغير » فى البيانات حول الوسط (أو الأوساط الأخرى) يجب أن يعطى . وهذا يسمى بالتشتت فى البيانات . وسوف يعطى فى الفصل الرابع مقاييس مختلفة له .

٣-١٣ أربع مجموعات من الطلبة مكونة من 18 ,10 ,20 ,15 شخصا وكان متوسط أطوالهم 1.62, 1.48, 1.53, 1.40 metres على الترتيب أوجد متوسط الطول لكل الطلبة .

الحـل :

$$\bar{X} = \frac{\Sigma fX}{\Sigma f} = \frac{(15)(1{\cdot}62) + (20)(1{\cdot}48) + (10)(1{\cdot}53) + (18)(1{\cdot}40)}{15 + 20 + 10 + 18} = 1{\cdot}50 \text{ m}$$

٣-١٤ إذا كان متوسط الدخل السنوى للعمال الزراعيين والعمال غير الزراعيين فى الولايات المتحدة هــو $4500 ,$3500 على الترتيب ، فهل متوسط الدخل السنوى للمجموعتين معا يمكن أن يكون $4000 ؟

الحـل :

من الممكن أن يكون $4000 فى حالة ما إذا كان عدد العمال الزراعيين والعمال غير الزراعيين متساويا . لتحديد متوسط الدخل السنوى الحقيقى فيجب أن نعرف عدد العمال فى كل مجموعة . فإذا كان ، على سبيل المثال مقابل كل عامل زراعى ١١ عاملا غير زراعى فإن المتوسط يصبح :

$$\bar{X} = \frac{(1)(\$3500) + (11)(\$4500)}{1 + 11} = \$4400$$

إلى أقرب $100 . وهذا هو الوسط الحسابى المرجح .

٣-١٥ استخدم التوزيع التكرارى للأوزان الموضح بالجدول فى صفحة ٤٥ لإيجاد متوسط أوزان الـ 100 طالب فى جامعة *XYZ*

الحـل :

الحـل موضح بالجدول ٣-١ . لاحظ أن كل الطلبة الذين أوزانهم 60—62 kg, 63—65 kg, etc. اعتبروا أن أوزانهم 61و64 kg, etc. وبهذا فإن المشكلة اختصرت لتصبح الحصول على متوسط وزن 100 طالب إذا كان 5 طلبة أوزانهم 61 kg ، 18 أوزانهم 64 kg وهكذا .

جدول ٣ - ١

الأوزان (kg)	مراكز الفئات (X)	التكرار (f)	(fX)
60 - 62	61	5	305
63 - 65	64	18	1152
66 - 68	67	42	2814
69 - 71	70	27	1890
72 - 74	73	8	584
		$N = \Sigma f = 100$	$\Sigma fX = 6745$

$$\bar{X} = \frac{\Sigma fX}{\Sigma f} = \frac{\Sigma fX}{N} = \frac{6745}{100} = 67{\cdot}45 \text{ kg}$$

والعمليات الحسابية المطلوبة لحل قد تصبح مملة وخاصة إذا كانت الأرقام كبيرة والفئات كثيرة . وتوجد أساليب للتقليل من العمل المطلوب فى مثل هذه الحالات . أنظر المسائل ٣–٢٠ و ٣–٢١ كأمثلة .

خصائص الوسط الحسابى :

٣–١٦ أثبت أن مجموع انحرافات $X_1, X_2, \ldots, X_N$ عن وسطها $\bar{X}$ يساوى صفرا .

الحـل :

إذا كان $d_1 = X_1 - \bar{X}, d_2 = X_2 - \bar{X}, \ldots, d_N = X_N - \bar{X}$ انحرافات $X_1, X_2, \ldots, X_N$ عن وسطها $\bar{X}$ فإن

$$\text{مجموع الانحرافات} = \Sigma d_j = \Sigma(X_j - \bar{X}) = \Sigma X_j - N\bar{X}$$

$$= \Sigma X_j - N\left(\frac{\Sigma X_j}{N}\right) = \Sigma X_j - \Sigma X_j = 0$$

حيث استخدمنا Σ بدلا من $\sum_{j=1}^{N}$ ومن الممكن إذا أردنا حذف الدليل j فى X_j على شرط أن يكون ذلك مفهوما .

٣–١٧ إذا كان $Z_1 = X_1 + Y_1, Z_2 = X_2 + Y_2, \ldots, Z_N = X_N + Y_N$ أثبت أن $\bar{Z} = \bar{X} + \bar{Y}$

الحـل :

بالتعريف $\bar{X} = \frac{\Sigma X}{N}, \bar{Y} = \frac{\Sigma Y}{N}, \bar{Z} = \frac{\Sigma Z}{N}$ إذن

$$\bar{Z} = \frac{\Sigma Z}{N} = \frac{\Sigma(X + Y)}{N} = \frac{\Sigma X + \Sigma Y}{N} = \frac{\Sigma X}{N} + \frac{\Sigma Y}{N} = \bar{X} + \bar{Y}$$

حيث حذفنا الدليل j فى X, Y, Z و Σ تعنى $\sum_{j=1}^{N}$

٣–١٨ (أ) إذا كان N من الأعداد $X_1, X_2, \ldots X_N$ لها انحرافات عن أى رقم A معطاة على الترتيب كالآتى :

$$d_1 = X_1 - A, d_2 = X_2 - A, \ldots, d_N = X_N - A$$

أثبت أن

$$\bar{X} = A + \frac{\sum_{j=1}^{N} d_j}{N} = A + \frac{\Sigma d}{N}$$

(ب) إذا كانت تكرارات $X_1, X_2, \ldots, X_K$ هى على الترتيب $f_1, f_2, \ldots, f_K$ وكانت $d_1 = X_1 - A, \ldots, d_K = X_K - A,$ أثبت أن النتيجة فى (أ) يحل بدلا منها

$$\bar{X} = A + \frac{\sum_{j=1}^{K} f_j d_j}{\sum_{j=1}^{K} f_j} = A + \frac{\Sigma fd}{N} \qquad \text{حيث} \qquad \sum_{j=1}^{K} f_j = \Sigma f = N$$

الطريقة ١ :

بما أن $d_j = X_j - A$ فإن $X_j = A + d_j,$

$$\bar{X} = \frac{\Sigma X_j}{N} = \frac{\Sigma(A + d_j)}{N} = \frac{\Sigma A + \Sigma d_j}{N} = \frac{NA + \Sigma d_j}{N} = A + \frac{\Sigma d_j}{N}$$

حيث استخدمنا Σ بدلا من $\sum_{j=1}^{N}$ للاختصار

الطريقة ٢ :

بما أن $d = X - A$ أو $X = A + d,$ حيث حذفنا الدليل فى الـ d والـ X. وبهذا ، باستخدام المسألة ٣ – ١٧ .

$$\bar{X} = \bar{A} + \bar{d} = A + \frac{\Sigma d}{N}$$

حيث أن متوسط عدد من الثوابت كلها تساوى A هو A.

(ب)
$$\bar{X} = \frac{\sum_{j=1}^{K} f_j X_j}{\sum_{j=1}^{K} f_j} = \frac{\Sigma f_j X_j}{N} = \frac{\Sigma f_j(A + d_j)}{N} = \frac{\Sigma A f_j + \Sigma f_j d_j}{N} = \frac{A\Sigma f_j + \Sigma f_j d_j}{N}$$
$$= \frac{AN + \Sigma f_j d_j}{N} = A + \frac{\Sigma f_j d_j}{N} = A + \frac{\Sigma f d}{N}$$

لاحظ أن النتيجة حصلنا عليها أساسا من (ا) باحلال $f_j d_j$ بدلا من d_j والتجميع من $j = 1$ إلى K بدلا من $j = 1$ إلى N . النتيجة مكافأة لـ $\bar{X} = A + \bar{d}$ حيث $\bar{d} = (\Sigma fd)/N$.

حساب الوسط الحسابى من بيانات مجمعة :

٣–١٩ استخدم طريقة المسألة ٣–١٨ (ا) لإيجاد الوسط الحسابى للأرقام 5, 8, 11, 9, 12, 6, 14, 10 مستخدما «وسط» تخمينى A قيمته (ا) 9 (ب) 20 .

الحـل :

(ا) انحرافات الأرقام المعطاة عن 9 هى 1 و 5 و 3 — ,3 ,0 ,2 و 1 — و 4— ومجموع الانحرافات هو $\Sigma d = -4 - 1 + 2 + 0 + 3 + 3 + 5 + 1 = 3$. إذن

$$\bar{X} = A + \frac{\Sigma d}{N} = 9 + \frac{3}{8} = 9{\cdot}375$$

(ب) انحرافات الأرقام المعطاة عن 20 هى 10 — ,6 — ,14 — ,8 — ,11 — ,9 — ,12 — ,15 — و $\Sigma d = -85$. إذن .

$$\bar{X} = A + \frac{\Sigma d}{N} = 20 + \frac{(-85)}{8} = 9{\cdot}375$$

٣ – ٢٠ استخدم طريقة المسألة ٣ – ١٨ (أ) لإيجاد الوسط الحسابى لأوزان الـ 100 طالب فى جامعة XYZ (أنظر المسألة ٣ – ١٥).

الحـــل :

يمكن أن ينظم الحل كما فى الجدول ٣ – ٢ . أخذنا كوسط تخمينى A مركز الفئة 67 (المقابل لأكبر تكرار)، على الرغم من أن أى مركز فئة يمكن استخدامه كوسط تخمينى . لاحظ أن الحسابات أسهل مما فى المسألة ٣ – ١٥ . ولاختصار العمل فمن الممكن أن نسير كما فى المسألة ٣ – ١٢ حيث استفدنا من أن الانحرافات (العمود الثانى فى الجدول) هى أرقام صحيحة مضاعفة لطول الفئة

جدول ٣ – ٢

مركز الفئة X	انحرافات $d = X - A$	تكرارات f	fd
61	−6	5	−30
64	−3	18	−54
$A \rightarrow$ 67	0	42	0
70	3	27	81
73	6	8	48
		$N = \Sigma f = 100$	$\Sigma fd = 45$

$$\bar{X} = A + \frac{\Sigma fd}{N} = 67 + \frac{45}{100} = 67{\cdot}45 \text{ kg}$$

٣ – ٢١ إذا كانت $d_j = X_j - A$ هى انحرافات مركز أى فئة X_j فى توزيع تكرارى عن مركز فئة ما A . أثبت أنه إذا كانت كل الفئات لها نفس الطول c فإن (أ) الانحرافات مضاعفات لـ c بمعنى $d_j = cu_j$ حيث $u_j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ (ب) الوسط الحسابى يمكن حسابه من الصيغة

$$\bar{X} = A + \left(\frac{\Sigma fu}{N}\right)c$$

الحـــل :

يمكن تمثيل النتيجة بجدول المسألة ٣ – ٢٠ حيث نلاحظ أن الانحرافات فى العمود الثانى كلها مضاعفات لطول الفئة $c = 3$ kg.

ولتثبت أن النتيجة صحيحة على وجه العموم ، لاحظ أنه إذا كانت $X_1, X_2, X_3, \ldots$ مراكز فئات متتالية فإن الفرق المشترك فى هذه الحالة يساوى c . بحيث $X_2 = X_1 + c,\ X_3 = X_1 + 2c$ وبشكل عام $X_j - X_1 = (j-1)c$. وبهذا فالفرق بين مركزى فئتين X_p ، X_q على سبيل المثال هو

$$X_p - X_q = [X_1 + (p-1)c] - [X_1 + (q-1)c] = (p-q)c$$

وهو مضاعف للرقم c .

(ب) باستخدام النتيجة فى (أ) فإن انحرافات كل مراكز الفئات عن مركز فئة ما هى مضاعفات c بمعنى $d_j = cu_j$ وباستخدام المسألة ٣ – ١٨ (أ) فإن

$$\bar{X} = A + \frac{\Sigma f_j d_j}{N} = A + \frac{\Sigma f_j (cu_j)}{N} = A + c\frac{\Sigma f_j u_j}{N} = A + \left(\frac{\Sigma fu}{N}\right)c$$

لاحظ أن هذا يكافىء النتيجة $\bar{X} = A + c\bar{u}$ والتى يمكن الحصول عليها من $\bar{X} = A + \bar{d}$ بوضع $d = cu$ وملاحظة أن $\bar{d} = c\bar{u}$ (أنظر المسألة ٣ – ١٨) .

٣ – ٢٢ استخدم نتائج المسألة ٣ – ٢١ (ب) لإيجاد متوسط أوزان الـ 100 طالب فى جامعة XYZ (أنظر المسألة ٣ – ٢٠) .

الحــل :

يمكن ترتيب الحل كما فى الجدول ٣ – ٣ هذه الطريقة تسمى « طريقة الترميز » ويجب استخدامها كلما كان ذلك ممكناً

جدول ٣ – ٣

X	u	f	fu
61	−2	5	−10
64	−1	18	−18
$A \rightarrow$ 67	0	42	0
70	1	27	27
73	2	8	16
		$N = 100$	$\Sigma fu = 15$

$$\bar{X} = A + \left(\frac{\Sigma fu}{N}\right)c = 67 + \left(\frac{15}{100}\right)(3) = 67{\cdot}45 \text{ kg}$$

٣ – ٢٣ احسب متوسط الأجر الشهرى للخمسة وستين عاملا فى شركة P and R من التوزيع التكرارى فى صفحة ٥٤ باستخدام (أ) الطريقة المطولة (ب) طريقة الترميز .

الحــل :

(أ) جدول ٣ – ٤

X	f	fX
£55·00	8	£440·00
65·00	10	650·00
75·00	16	1200·00
85·00	14	1190·00
95·00	10	950·00
105·00	5	525·00
115·00	2	230·00
	$N = 65$	$\Sigma fX = £5185{\cdot}00$

$$\bar{X} = \frac{\Sigma fX}{N} = \frac{£5185{\cdot}00}{65} = £79{\cdot}77$$

(ب) جدول ٣ – ٥

X	u	f	fu
£55·00	−2	8	−16
65·00	−1	10	−10
$A \rightarrow$ 75·00	0	16	0
85·00	1	14	14
95·00	2	10	20
105·00	3	5	15
115·00	4	2	8
		$N = 65$	$\Sigma fu = 31$

$$\bar{X} = A + \left(\frac{\Sigma fu}{N}\right)c = £75{\cdot}00 + \left(\frac{31}{65}\right)(£10{\cdot}00) = £79{\cdot}77$$

قد يكون من الممكن افتراض أن هناك خطأ أدخل فى الجداول السابقة حيث أن مراكز الفئات الفعلية هى £54.995, £64.995, بدلا من £55.00, £65.00, وإذا استخلصنا فى الجدول ٣ – ٤ مراكز الفئات الحقيقية فإن $\bar{X}$ سيصير 79.76 £ بدلا من £79.77 والفرق يمكن إهماله .

٣ – ٢٤ أوجد متوسط أجور الـ 70 عاملا فى شركة P and R باستخدام الجدول (ث) فى صفحة ٦١ .

الحـل :

فى هذه الحالة أطوال الفئات غير متساوية وعليه يجب أن نستخدم الطريقة المطولة كما هو موضح بالجدول ٣ – ٦

الجدول ٣ – ٦

X	f	fX
£55·00	8	£440·00
65·00	10	650·00
75·00	16	1200·00
85·00	15	1275·00
95·00	10	950·00
110·00	8	880·00
150·00	3	450·00
	$N = 70$	$\Sigma fX = £5845·00$

$$\bar{X} = \frac{\Sigma fX}{N} = \frac{£5845·00}{70} = £83·50$$

الوسـيط :

٣ – ٢٥ درجات طالب فى ستة امتحانات كانت 84, 91, 72, 68. 87, 78 . أوجد وسيط هذه الدرجات .

الحـل :

بترتيب الدرجات فى منظومة تصبح 68, 72, 78, 84, 87, 91 .

وبما أن عدد الدرجات زوجى فإن هناك قيمتين فى المنتصف 84, 78 وسطهما الحسابى $81 = ½(78 + 84)$ هو الوسيط المطلوب . قارن بالمسألة ٣ – ٦ حيث الوسط الحسابى = 80

٣ – ٢٦ الأجر بالساعة لخمسة عاملين فى مكتب هو $2.52, $3.96, $3.28, $9.20, $3.75 أوجد .

(أ) وسيط أجر الساعة (ب) متوسط أجر الساعة .

الحـل :

(أ) بترتيب الأجور فى منظومة تصبح $2.52, $3.28, $3.75, $3.96, $9.20 وبما أن هناك عدداً فردياً من القيم فإن هناك قيمة واحدة فى المنتصف وهى $3.75 وهى الوسيط المطلوب .

(ب) الوسط الحسابى هو $\frac{2·52 + \$3·96 + \$3·28 + \$9·20 + \$3·75}{5} = \$4·54.$

لاحظ أن الوسيط لم يتأثر بالقيمة المتطرفة $9.20 بينما تأثر الوسط بها . وفى هذه الحالة فإن الوسيط يعطى دلالة أفضل على معدل أجر الساعة عن الوسط .

٣ – ٢٧ إذا رتب (أ) 85 ، (ب) 150 رقماً فى منظومة ، كيف يمكن الحصول على وسيط هذه الأرقام ؟

الحـــل :

(أ) بما أن هناك 85 عنصراً ، وهو رقم فردى ، فإن هناك قيمة وسطى وحيدة حيث يوجد قبلها 42 رقم وبعدها 42 رقم . وبهذا فإن الوسيط هو الرقم الذى ترتيبه الثالث والأربعين فى المنظومة .

(ب) بما أن هناك 150 عنصراً ، وهو رقم زوجى ، فإن هناك قيمتين فى الوسط حيث يوجد قبلهما 74 رقم وبعدهما 74 رقماً . وهاتان القيمتان ترتيبهما الخامس والسبعون والسادس والسبعون فى المنظومة ووسطها الحسابى هو الوسيط المطلوب .

٣ – ٢٨ أوجد وسيط أطوال 40 من أوراق نبات الغار (أنظر المسألة ٢ – ٨ ، صفحة ٥٧) باستخدام (أ) التوزيع الثانى المسألة ٢ – ٨ والذى أعدنا كتابته هنا (ب) البيانات الأصلية

الحـــل :

(أ) الطريقة الأولى ، باستخدام الاستكمال :

الأطوال فى الجدول التكرارى المبين على اليمين يفترض فيها أنها تتوزع توزيعاً متصلا . فى هذه الحالة فإن الوسيط هو هذا الطول الذى يقع نصف التكرار الكلى أعلاه $(20 = 40/2)$ والنصف الآخر بعده .

جدول ٣ – ٧

الطول (mm)	التكرار
118–126	3
127–135	5
136–144	9
145–153	12
154–162	5
163–171	4
172–180	2
	المجموع 40

وحيث أن مجموع تكرارات الفئات الثلاث الأولى هو $17 = 9 + 5 + 3$ وحتى نحصل على الرقم المطلوب 20 فإننا نريد 3 أرقام من الـ 12 حالة الموجودة فى الفئة الرابعة .

وبما أن الفئة الرابعة 153 — 145 هى فى الحقيقة تقابل الأطوال 144.5 to 153.5 فإن الوسيط يقع فى $^3/_{12}$ المسافة بين 153.5, 144.5 أى أن الوسيط هو

$$144{\cdot}5 + \frac{3}{12}(153{\cdot}5 - 144{\cdot}5) = 144{\cdot}5 \quad \frac{3}{12}(9) = 146{\cdot}8 \text{ mm}$$

الطريقة ٢ ، باستخدام القانون :

بما أن مجموع التكرارات المقابلة للفئات الثلاث الأولى والفئات الأربع الأولى هى على الترتيب $17 = 9+5+3$ ، $29 = 12 + 9 + 5 + 3$ فإن الوسيط يقع فى الفئة الرابعة والتى هى بالتالى الفئة الوسيطية . وبهذا :

L_1 = الحد الأدنى الحقيقى للفئة الوسيطية = 144.5

N = عدد العناصر فى البيانات = 40

$(\Sigma f)_1$ = مجموع التكرارات لجميع الفئات قبل الفئة الوسيطية = $3 + 5 + 9 = 17$

f_{median} = تكرار الفئة الوسيطية = 12

c = طول الفئة الوسيطية = 9

و بهذا فإن

$$\text{الوسيط} = L_1 + \left(\frac{N/2 - (\Sigma f)_1}{f_{median}}\right)c = 144{\cdot}5 + \left(\frac{40/2 - 17}{12}\right)(9) = 146{\cdot}8 \text{ mm}$$

(ب) بترتيب الأطوال الأصلية فى منظومة تصبح

119, 125, 126, 128, 132, 135, 135, 135, 136, 138, 138, 140, 140, 142, 142, 144, 144, 145, 145, 146,
146, 147, 147, 148, 149, 150, 150, 152, 153, 154, 156, 157, 158, 161, 163, 164, 165, 168, 173, 176

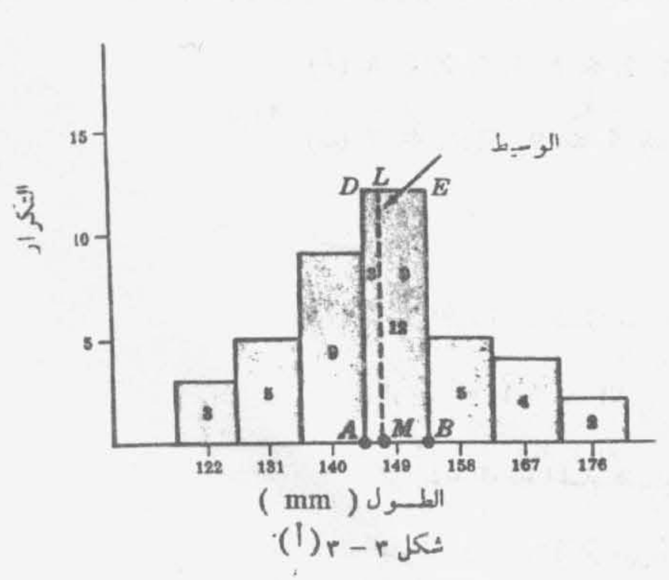
الوسيط هو الوسط الحسابى للطول العشرين والواحد والعشرين فى المنظومة ويساوى 146 mm .

٣ – ٢٩ وضح كيف يمكن الحصول على وسيط الطول فى المسألة السابقة باستخدام
(أ) المدرج التكرارى (ب) المنحنى التكرارى المتجمع النسبى .

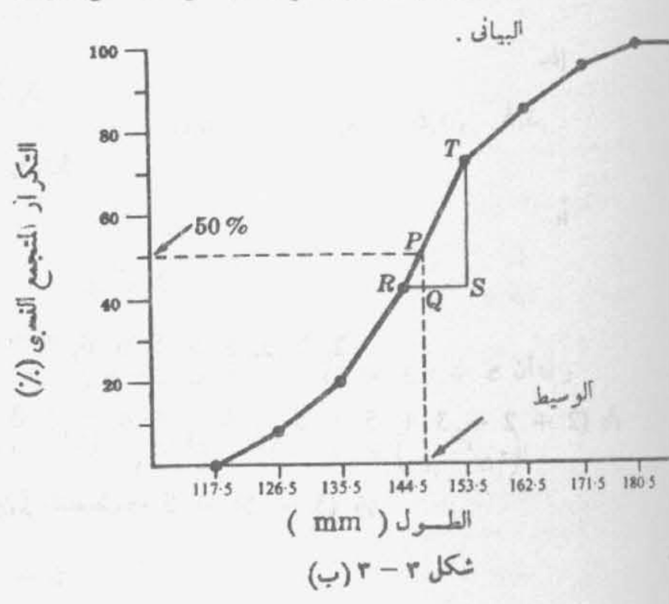
الحـــل :

(أ) فى الشكل ٣ – ٣ (أ) يوضح المدرج التكرارى المقابل للأطوال فى المسألة السابقة . والوسيط هو الأحداثى السينى لخط LM الذى يقسم المدرج التكرارى إلى مساحتين متساويتين وحيث أن المساحة تقابل التكرار فى المدرج التكرارى ، فإن الخط LM يقسم المساحة الكلية بحيث يكون التكرارت على يمينه والتكرارات على يساره مساوية لنصف التكرار الكلى أو 20 . مثلا المساحة $AMLD$ تناظر التكرار 3 والمساحة $MBEL$ تناظر التكرار 9 .

و بهذا فإن $AM = \frac{3}{12}AB \quad \frac{3}{12}(9) \quad 2{\cdot}25$ ، وقيمة الوسيط هى $144.5+2.25 = 146.75$ أو 146.8 mm إلى أقرب نسبة من عشرة من المليمتر . ويمكن قراءة القيمة بشكل تقريبى مباشرة من الرسم البيانى .



شكل ٣ – ٣ (أ)



شكل ٣ – ٣ (ب)

(ب) الشكل ٣ – ٣ (ب) يوضح المضلع التكرارى المتجمع النسبى المقابل للأوزان فى المسألة السابقة . والوسيط ه
الأحداثى السينى للنقطة P على المنحنى التكرارى المتجمع والتى أحداثها الصادى 50% . وللحصول ع
قيمتها فإننا نلاحظ من المثلثات المماثلة PQR و RST أن

$$\frac{RQ}{RS} = \frac{PQ}{ST} \text{ or } \frac{RQ}{9} = \frac{50\% - 42.5\%}{72.5\% - 42.5\%} = \frac{1}{4} \text{ so that } RQ = \frac{9}{4} = 2.25$$

وبهذا فإن

$$\text{الوسيط} = 144.5 + RQ = 144.5 + 2.25 = 146.75 \text{ mm}$$

أو 146.8 mm إلى أقرب عشر المليمتر . وهذه القيمة يمكن قراءتها بالتقريب من الرسم البيانى .

٣ – ٣٠ أوجد وسيط أجور الـ 65 عاملا فى شركة P and R (أنظر الفصل الثانى والمسألة ٢ – ٣ صفحة ٥٣)

الحــل :

هنا $N = 65,\ N/2 = 32.5$. وبما أن مجموع الفئتين الأولى والثانية هما $8 + 10 = 18$ ومجمو
الفئات الثلاث الأولى هو $8 + 10 + 16 = 34$ فإن الفئة الوسيطية هى الفئة الثالثة . باستخدام الصيغة .

$$\text{الوسيط} = L_1 + \left(\frac{N/2 - (\Sigma f)_1}{f_{\text{median}}}\right) c = £69{\cdot}995 + \left(\frac{32{\cdot}5 - 18}{16}\right)(£10{\cdot}00) = £79{\cdot}06$$

المنــوال :

٣ – ٣١ أوجد الوسط والوسيط والمنوال لمجموعة الأرقام :

(أ) 3, 5, 2, 6, 5, 9, 5, 2, 8, 6

(ب) 50.3, 49.5, 48.9, 51.6, 48.7

الحــل :

(أ) بترتيب الأرقام فى منظومة لتصير 2, 2, 3, 5, 5, 5, 6, 6, 8, 9

الوسط = $\frac{1}{10}(2 + 2 + 3 + 5 + 5 + 5 + 6 + 6 + 8 + 9) = 5.1$

الوسيط= الوسط الحسابى للقيمتين فى المنتصف = $\frac{1}{2}(5 + 5) = 5$

المنوال = الرقم الأكثر شيوعاً = 5.

(ب) بترتيب الأرقام فى منظومة لتصير 48.7, 48.9, 49.5, 50.3, 51.6

الوسط = $(48.7 + 48.9 + 49.5 + 50.3 + 51.6) = 49.8$

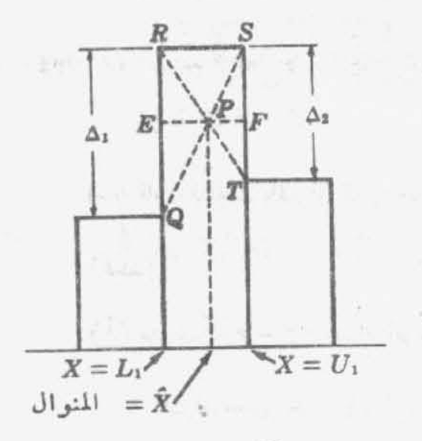
الوسيط = الرقم فى الوسط = 49.5

المنوال = الرقم الأكثر شيوعاً ، ولا يوجد فى هذه الحالة

٣ – ٣٢ أوجد صيغة لتحديد المنوال من بيانات معبر عنها فى توزيع تكرارى .

الحـــل :

افترض أن الشكل ٣–٤ يمثل ثلاثة مستطيلات من المدرج التكرارى لهذا التوزيع التكرارى ويمثل المستطيل الأوسط الفئة المنوالية . افترض أيضاً أن طول الفئات متساو .



شكل ٣ – ٤

ويعرف المنوال بأنه النقطة $\hat{X}$ على المحور السينى المقابلة للنقطة P وهى نقطة تقاطع الخطين RT, QS إذا كانت $X = U_1, X = L_1$ تمثل الحدود الدنيا والعليا للفئة المنوالية وΔ_1, Δ_2 يمثلان على الترتيب الفرق بين تكرار الفئة المنوالية وتكرار الفئـــة التى على يسارها والفئة التى على يمينها فإنه من المثلثات المتشابهة PST و PQR نجد

$$\frac{EP}{RQ} = \frac{PF}{ST}, \qquad \frac{\hat{X} - L_1}{\Delta_1} = \frac{U_1 - \hat{X}}{\Delta_2}.$$

إذن

$$\Delta_2 (\hat{X} - L_1) = \Delta_1 (U_1 - \hat{X}), \quad \Delta_2 \hat{X} - \Delta_2 L_1 = \Delta_1 U_1 + \Delta_1 \hat{X}, \quad (\Delta_1 + \Delta_2)\hat{X} = \Delta_1 U_1 + \Delta_2 L_1$$

أو

$$\hat{X} = \frac{\Delta_1 U_1 + \Delta_2 L_1}{\Delta_1 + \Delta_2}$$

وبما أن $U = L_1 + c$ حيث c هو طول الفئة ، فإننا نجد أن

$$\hat{X} = \frac{\Delta_1 (L_1 + c) + \Delta_2 L_1}{\Delta_1 + \Delta_2} = \frac{(\Delta_1 + \Delta_2) L_1 + \Delta_1 c}{\Delta_1 + \Delta_2} = L_1 + \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}\right) c$$

وهذه النتيجة لها تفسير ذو أهمية فإذا رسمنا قطعاً مكافئاً بحيث يمر بمنتصف قمة المستطيلات في الشكل فإن النقطة على المحور الرأسي المقابلة لنقطة النهاية العظمى لهذا القطع المكافىء هي المنوال كما حصلنا عليه أعلاه .

٣ – ٣٣ أوجد منوال أجور الـ 65 عاملا في شركة P and R (أنظر المسألة المسألة ٣ – ٢٣) باستخدام الصيغة التي حصلنا عليها في المسألة ٣ – ٣٢ .

الحــل :

هنا $L_1 = £69{\cdot}995,\ \Delta_1 = 16 - 10 = 6,\ \Delta_2 = 16 - 14 = 2,\ c = £10{\cdot}00$ وبهذا فإن

$$\text{المنوال} = L_1 + \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}\right)c = £69{\cdot}995 + \left(\frac{6}{2+6}\right)(£10{\cdot}00) = £77{\cdot}50$$

علاقة اعتبارية بين الوسط والوسيط والمنوال :

٣ – ٣٤ (أ) استخدم العلاقة الاعتبارية : الوسط – المنوال = ٣ (الوسط – الوسيط) لإيجاد منوال أجور الـ 65 عاملا في شركة P and R .

(ب) قارن نتائجك بالمنوال الذى حصلت عليه في المسألة ٣ – ٣٣ .

الحــل :

(أ) من المسألة ٣ – ٣٣ نجد أن الوسط = 77 £79 والوسيط = £79.06 إذن

المنوال = الوسط – ٣ (الوسط – الوسيط)

$$= £79{\cdot}77 - 3(£79{\cdot}77 - £79{\cdot}06) = £77{\cdot}64$$

(ب) من المسألة ٣ – ٣٣ منوال الأجور £77.50 بحيث يتفق بشكل جيد مع العلاقة الاعتبارية في هذه الحالة .

الوسط الهندسى :

٣ – ٣٥ أوجد (أ) الوسط الهندسى (ب) الوسط الحسابى للأرقام 3, 5, 6, 6, 7, 10, 12 مفترضاً أن هذه الأرقام دقيقة .

(أ) الوسط الهندسى = $G = \sqrt[7]{(3)(5)(6)(6)(7)(10)(12)} = \sqrt[7]{453\,600}$. باستخدام اللوغاريتمات المعتادة

$\log G = \frac{1}{7}\log 453\,600 = \frac{1}{7}(5{\cdot}6567) = 0{\cdot}8081$ and $G = 6{\cdot}43$ (إلى أقرب جزء من المائة)

طريقة أخرى :

$$\begin{aligned}\log G &= \tfrac{1}{7}(\log 3 + \log 5 + \log 6 + \log 6 + \log 7 + \log 10 + \log 12)\\ &= \tfrac{1}{7}(0{\cdot}4771 + 0{\cdot}6990 + 0{\cdot}7782 + 0{\cdot}7782 + 0{\cdot}8451 + 1{\cdot}0000 + 1{\cdot}0792)\\ &= 0{\cdot}8081, \quad G = 6{\cdot}43\end{aligned}$$

(ب) الوسط الحسابي = $\bar{X} = \frac{1}{7}(3 + 5 + 6 + 6 + 7 + 10 + 12) = 7$

وهذا يوضح الحقيقة أن الوسط الهندسي لمجموعة من أرقام موجبة غير متساوية أقل من وسطها الحسابي .

٣-٣٦ الأرقام $X_1, X_2, \ldots, X_K$ تحدث بتكرارات $f_1, f_2, \ldots, f_K$ حيث $f_1 + f_2 + \ldots + f_K = N$ هو التكرار الكلي .

(أ) أوجد الوسط الهندسي G للأرقام

(ب) استنتج صيغة لـ $\log G$

(ج) كيف يمكن استخدام النتائج للحصول على الوسط الهندسي لبيانات مجمعة في توزيع تكراري ؟

الحـــل .

(أ)
$$G = \sqrt[N]{\underbrace{X_1X_1\ldots X_1}_{f_1\ times}\ \underbrace{X_2X_2\ldots X_2}_{f_2\ times}\ \ldots\ \underbrace{X_KX_K\ldots X_K}_{f_K\ times}} = \sqrt[N]{X_1^{f_1}X_2^{f_2}\ldots X_K^{f_K}}$$

حيث $N = \Sigma f$ ، هو يسمى حيناً بالوسط الهندسي المرجح .

(ب)
$$\log G = \frac{1}{N}\log(X_1^{f_1}X_2^{f_2}\ldots X_K^{f_K}) = \frac{1}{N}(f_1 \log X_1 + f_2 \log X_2 + \ldots + f_K \log X_K)$$
$$= \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{K} f_j \log X_j = \frac{\Sigma f \log X}{N}$$

حيث افترضنا أن جميع الأرقام موجبة ، عدا ذلك فإن اللوغاريتم غير معرف .

لاحظ أن لوغاريتم الوسط الهندسي لمجموعة من الأرقام الموجبة هو الوسط الحسابي للوغاريتمات هذه الأرقام .

(ج) يمكن استخدام النتيجة لإيجاد الوسط الهندسي للبيانات المجمعة بأخذ $X_1, X_2, \ldots, X_K$ كمراكز الفئات و $f_1, f_2, \ldots, f_K$ كالتكرارات المقابلة لها .

٣ - ٣٧ في خلال أحد السنين كانت نسبة سعر لتر اللبن إلى سعر رغيف الخبز هو 3.00 ، بينما خلال العام التالي كانت النسبة 2.00 .

(أ) أوجد الوسط الحسابي لهذه النسب لفترة العامين .

(ب) أوجد الوسط الحسابي لنسب أسعار الخبز إلى أسعار اللبن لفترة العامين .

(ج) ناقش التوصية باستخدام الوسط الحسابي للحصول على متوسط النسب .

(د) ناقش ملاءمة الوسط الهندسي للحصول على متوسط النسب .

الحــل :

(أ) متوسط نسبة سعر اللبن إلى سعر الخبز = $\frac{1}{2}(3.00 + 2.00) = 2.50$

(ب) بما أن نسبة سعر اللبن إلى سعر الخبز فى السنة الأولى هى 3.00 فإن نسبة سعر الخبز إلى سعر اللبن هو $1/3.00 = 0.333$ كذلك فإن نسبة سعر الخبز إلى سعر اللبن فى السنة الثانية هى $1/2.00 = 0.500$ وبهذا فإن

متوسط نسبة سعر الخبز إلى سعر اللبن $\frac{1}{2}(0.333 + 0.500) = 0.417$

(جـ) من الملائم أن نتوقع أن متوسط نسبة سعر اللبن إلى سعر الخبز هو مقلوب متوسط نسبة سعر الخبز إلى سعر اللبن وذلك إذا كان المتوسط متوسطاً ملائماً . ولكن $2.50 \neq 2.40 = 1/0.417$.

وهنا يظهر ان الوسط الحسابى يعد متوسطاً غير جيد عند استخدام النسب .

(د) الوسط الهندسى لنسب سعر اللبن إلى سعر الخبز = $\sqrt{(3.00)(2.00)} = \sqrt{6.00}$

الوسط الهندسى لنسب سعر الخبز إلى سعر اللبن = $\sqrt{(0.333)(0.500)} = \sqrt{0.0167} = 1/\sqrt{6.00}$

وبما أن هذه المتوسطات كل منها مقلوب الآخر ، فإننا نستنتج ان الوسط الهندسى أكثر ملاءمة من الوسط الحسابى للحصول على وسط النسب فى مثل هذا النوع من المسائل .

٣ – ٣٨ عدد البكتريا فى مزرعة معينة تزايدت من 1000 إلى 4000 خلال ثلاثة أيام . ما هو متوسط الزيادة النسبية فى اليوم ؟

الحــل :

بما أن الزيادة من 1000 إلى 4000 هى 300% ، فإن هذا قد يؤدى إلى استنتاج أن متوسط نسبة الزيادة اليومية يجب أن يكون $300\%/3 = 100\%$ وهذا يتضمن أنه فى خلال اليوم الأول فإن العدد ارتفع من 1000 إلى 2000 وفى خلال اليوم الثانى ارتفع من 2000 إلى 4000 . وفى خلال اليوم الثالث من 4000 إلى 8000 وهذا يناقض الحقيقة .

ولتحديد متوسط الزيادة النسبية ، ونرمز لها بالرمز r . فإن

مجموع عدد البكتريا بعد يوم = $1000 + 1000r = 1000(1 + r)$

مجموع عدد البكتريا بعد يومين = $1000(1 + r) + 1000(1 + r)r = 1000(1 + r)^2$

مجموع عدد البكتريا بعد ثلاثة أيام = $1000(1 + r)^2 + 1000(1 + r)^2r = 1000(1 + r)^3$

والتعبير الأخير يجب أن يساوى 4000 بحيث

$$1000(1 + r)^3 = 4000, \quad (1 + r)^3 = 4, \quad 1 + r = \sqrt[3]{4} \text{ and } r = \sqrt[3]{4} - 1$$

باستخدام اللوغاريتمات نجد أن $\sqrt[3]{4} = 1.587$ بحيث أن $r = 0.587 = 58.7\%$.

وبشكل عام إذا بدأنا بكية P وزدناها بمعدل ثابت r لكل وحدة زمن فإننا سوف نحصل بعد n وحدة زمن على الكية :

$$A = P(1+r)^n$$

وهذه تسمى بصيغة الفائدة المركبة . أنظر المسائل ٣ – ٩٤ و ٣ – ٩٥

الوسط التوافقى :

٣ – ٣٩ أوجد الوسط التوافقى H للأرقام $3, 5, 6, 6, 7, 10, 12$.

الحل :

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{N}\Sigma\frac{1}{X} = \frac{1}{7}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}\right) = \frac{1}{7}\left(\frac{140+84+70+70+60+42+35}{420}\right)$$

$$= \frac{501}{2940} \quad \text{and} \quad H = \frac{2940}{501} = 5{\cdot}87$$

وغالباً ما يكون من الأسهل التعبير عن الكسور فى الصورة العشرية أولا

$$\frac{1}{H} = \tfrac{1}{7}(0{\cdot}3333 + 0{\cdot}2000 + 0{\cdot}1667 + 0{\cdot}1667 + 0{\cdot}1429 + 0{\cdot}1000 + 0{\cdot}0833)$$

$$= \tfrac{1}{7}(1{\cdot}1929) \text{ and } H = 7/1{\cdot}1929 = 5{\cdot}87$$

بالمقارنة بالمسألة ٣ – ٣٥ تتضح حقيقة أن الوسط التوافقى لمجموعة من الأرقام الموجبة والتى لاتتساوى كلها فى القيمة أقل من الوسط الهندسى والذى بدوره أقل من الوسط الحسابى .

٣ – ٤٠ فى خلال أربع سنوات متتالية اشترى صاحب منزل بترول لتدفئة المنزل بتكلفة $1.6, 1.8, 2.1, 2.5$ لتر ، على الترتيب . فاهو متوسط تكلفة البترول فى خلال مدة السنوات الأربع ؟

الحل :

الحالة ١ :

إذا افترضنا أن صاحب المنزل اشترى نفس الكية فى كل عام وليكن 1000 لتر .

إذن .

$$\text{متوسط التكلفة} = \frac{\text{التكلفة الكلية}}{\text{الكية الكلية المشتراه}} = \frac{\pounds16 + \pounds18 + \pounds21 + \pounds25}{4000 \text{ litres}} = 2{\cdot}00\text{p/l}$$

وهذا يساوى الوسط الحسابى لتكلفة اللتر ، بمعنى ، $\tfrac{1}{4}(16 + 18 + 18 + 21 + 25) = 2.0$ p/l ولن تختلف النتيجة حتى ولو كان x من اللترات استخدم فى كل سنة .

الحالة ٢ :

إذا افترضنا أن صاحب المنزل انفق نفس المبلغ كل سنة ، وليكن 200 £

إذن :

$$\text{متوسط التكلفة} = \frac{\text{التكلفة الكلية}}{\text{الكمية الكلية المشتراه}} = \frac{£800}{12\,500 + 11\,111 + 9524 + 8000 \text{ litres}} = 1{\cdot}94\text{p/h}$$

وهذا يساوى الوسط التوافقى لتكلفة اللتر ، بمعنى ، $\frac{4}{\frac{1}{16} + \frac{1}{18} + \frac{1}{21} + \frac{1}{25}} = 1{\cdot}94\text{p/h}$.

ولن تختلف النتيجة ولو كان $£y$ قد انفق فى كل سنة .

وعملية الحصول على المتوسط فى الحالتين سليمة ، وقد حسب كل متوسط تحت شروط من الشائع استخدامها . ويجب ملاحظة أنه فى حالة ما إذا اختلف عدد اللترات المستخدمة من سنة إلى أخرى بدلا من بقائها ثابتة ، يستبدل الوسط الحسابى العادى فى الحالة ١ بالوسط الحسابى المرجح . كذلك فإنه إذا تغيرت القيمة الكلية المنفقة من سنة إلى أخرى ، يستبدل الوسط التوافقى العادى فى الحالة ٢ بالوسط التوافقى المرجح .

٣ – ٤١ إذا انتقل شخص من A إلى B بمتوسط سرعة 30 km/h وعاد من B إلى A مستخدماً نفس الطريق بمتوسط سرعة 60 km/h . أوجد متوسط السرعة للمرحلة كلها .

الحـل :

افترض أن المسافة من A إلى B هى 60 km (على الرغم من أنه يمكن فرض أى مسافة أخرى) . وبهذا

$$\text{وقت الذهاب من } A \text{ إلى } B = \frac{60\text{ km}}{30\text{ km/h}} = 2\text{ h},$$

$$\text{الوقت من } B \text{ إلى } A = \frac{60\text{ km}}{60\text{ km/h}} = 1\text{ h}$$

$$\text{متوسط السرعة لرحلة ذهاب وإياب} = \frac{\text{المسافة الكلية}}{\text{الوقت الكلى}} = \frac{120\text{ km}}{3\text{ h}} = 40\text{ km/h}.$$

والوسط السابق هو الوسط التوافقى للرقمين 30 ,60 . بمعنى $40\text{ km/h} = \frac{2}{1/30 + 1/60}$ إذا كانت المسافات المقطوعة ليست كلها متساوية . فإنه يمكن استخدام الوسط التوافقى المرجح لسرعات حيث الاوزان هى المسافات .

(أنظر المسألة ٣ – ١٠٢) لاحظ أن استخدام الوسط الحسابى للرقمين 30 و 60 km/h وهو 45 km/h, خطأ .

الوسط التربيعى او جذر متوسط المربعات :

٣ - ٤٢ أوجد الوسط التربيعى للأرقام 12 ,10 ,7 ,6 ,6 ,5 ,3 .

الحـــل :

$$\text{الجذر التربيعى} = \text{R.M.S.} = \sqrt{\frac{3^2+5^2+6^2+6^2+7^2+10^2+12^2}{7}} = \sqrt{57} = 7{\cdot}55$$

٣ - ٤٣ أثبت أن الوسط التربيعى لرقين موجبين غير متساويين b, a أكبر من وسطهما الهندسى .

الحـــل :

المطلوب إثبات أن $\sqrt{ab}$. $\sqrt{\frac{1}{2}(a^2+b^2)}$. إذا كان ذلك صحيحاً فإنه بتربيع الطرفين $\frac{1}{2}(a^2+b^2) > ab$ بحيث أن $a^2+b^2 > 2ab, a^2-2ab+b^2 > 0, \text{or } (a-b)^2 > 0$ ولكن المتباينة الأخيرة سليمة بما أن مربع أى مقدار حقيق لايســـاوى الصفر يجب أن يكون موجباً . يتضمن الإثبات إثبـــات عكس الخطوات السابقة . نبدأ بـ $(a-b)^2 > 0$ وهذه من المعروف أنها صحيحة ومنها $a^2+b^2 > 2ab, \frac{1}{2}(a^2 \cdot b^2) > at$ وفى النهاية $\sqrt{\frac{1}{2}(a^2+b^2)} > \sqrt{ab}.$ وهو المطلوب .

لاحظ أن $\sqrt{\frac{1}{2}(a^2+b^2)} = \sqrt{ab}$ فى حالة وحيدة إذا كانت $a = b$

الربيعات والعشيرات والمئينات :

٣ - ٤٤ أوجد (أ) الربيعات Q_1, Q_2, Q_3 و (ب) العشيرات $D_1, D_2, \ldots, D_9$ لأجور الـ 65 عاملا فى شركة Pand R (أنظر المسألة ٢ - ٣ والفصل الثانى) .

الحـــل :

(أ) الربيع الأول Q_1 هو هذا الأجر الذى يمكن الحصول عليه بعملية حصر $N/4 = 65/4 = 16.25$ من الحالات بادئين بالفئة الأولى (أو الدنيا) بما أن الفئة الأولى تحتوى على 8 حالات فإنه يجب أن نأخذ $8.25 = (16.25 - 8)$ من الـ 10 حالات بالفئة الثانية . باستخدام طريقة الاستكمال الخطى ، نجد :

$$Q_1 = £59{\cdot}995 + \frac{8{\cdot}25}{10}(£10{\cdot}00) = £68{\cdot}25$$

الربيع الثانى Q_2 نحصل عليه بحصر الـ $2N/4 = N/2 = 65/2 = 32.5$ الأول من الحالات . بما أن الفئتين الأولى والثانية تحتوى على 18 حالة ، فإننا يجب أن نأخذ $32.5 - 18 = 14.5$ من الـ 16 حالة بالفئة الثالثة إذن :

$$Q_2 = £69{\cdot}995 + \frac{14{\cdot}5}{16}(£10{\cdot}00) = £79{\cdot}06$$

لاحظ أن Q_2 هو الوسيط

الربيع الثالث Q_3 نحصل عليه بحصر الـ $3N/4 = \frac{3}{4}(65) = 48.75$ الأولى من الحالات . بما أن الفئات الأولى تحتوى على 48 حالة ، فإننا يجب أن نأخذ 0.75 = 48—48.75 من الـ 10 حالات بالفئة الخامسة إذن .

$$Q_3 = £89{\cdot}995 + \frac{0{\cdot}75}{10}(£10{\cdot}00) = £90{\cdot}75$$

ومن ثم فإن 25% من العاملين يحصلون على دخل 68.25£ أو أقل ، 50% يحصلون على دخل 79.06£ أو أقل و 75% يحصلون على دخل 90.75£ أو أقل .

(ب) العشير الأولى والثانى . . . والتاسع نحصل عليه بحصر $N/10, 2N/10, \ldots, 9N/10$ من الحالات بادئين بالفئة الأولى (الدنيا) . وبهذا فإن

$$D_1 = £49{\cdot}995 + \frac{6{\cdot}5}{8}(£10{\cdot}00) = £58{\cdot}12$$

$$D_2 = £59{\cdot}995 + \frac{5}{10}(£10{\cdot}00) = £65{\cdot}00$$

$$D_3 = £69{\cdot}995 + \frac{1{\cdot}5}{16}(£10{\cdot}00) = £70{\cdot}94$$

$$D_4 = £69{\cdot}995 + \frac{8}{16}(£10{\cdot}00) = £75{\cdot}00$$

$$D_5 = £69{\cdot}995 + \frac{14{\cdot}5}{16}(£10{\cdot}00) = £79{\cdot}06$$

$$D_6 = £79{\cdot}995 + \frac{5}{14}(£10{\cdot}00) = £83{\cdot}57$$

$$D_7 = £79{\cdot}995 + \frac{11{\cdot}5}{14}(£10{\cdot}00) = £88{\cdot}21$$

$$D_8 = £89{\cdot}995 + \frac{4}{10}(£10{\cdot}00) = £94{\cdot}00$$

$$D_9 = £99{\cdot}995 + \frac{0{\cdot}5}{5}(£10{\cdot}00) = £101{\cdot}00$$

ومن ثم فإن 10% من العاملين دخلهم 58.12£ أو أقل ، 20% دخلهم 65.00£ أو أقل ، ...... ، 90% دخلهم 101.00£ أو أقل .

لاحظ أن العشير الخامس هو الوسيط والعشير الثانى والرابع والسادس والثامن والذين يقسمون التوزيع إلى خمسة أجزاء متساوية تسمى بالخميسات والتى تستخدم فى بعض الأحيان من الناحية العملية .

٣ – ٤٥ حدد (أ) المئين الـ 35 (ب) المئين الـ 60 . للتوزيع بالمسألة السابقة .

الحـــل :

(أ) المئين الـ 35 ويرمز له بالرمز P_{35} نحصل عليه بحصر الـ $35N/100 = 35\,(65)/100 = 22.75$ الأولى من الحالات اعتباراً من الفئة الأولى (الدنيا) . إذن ، كما فى المسألة ٣ – ٤٤ ،

$P_{35} = £69{\cdot}995 + \frac{4{\cdot}75}{16}(£10{\cdot}00) = £72{\cdot}97$. وهذا يعنى أن 35% من العاملين يحصلون على دخل 72.97£ أو أقل .

(ب) المئين الـ 60 وهو $P_{60} = £79{\cdot}995 + \frac{5}{14}(£10{\cdot}00) = £83{\cdot}57$. لاحظ أنه يساوى العشير السادس أو الخميس الثالث .

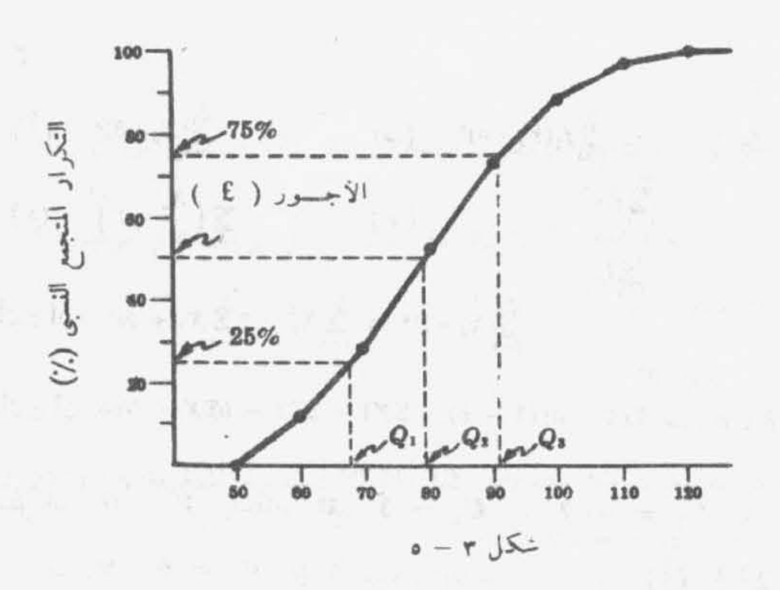
٣ - ٤٦ وضح كيف يمكن الحصول على نتائج المسائل ٣ - ٤٤ ، ٣ - ٤٥ من المنحنى التكرارى المتجمع النسبى .

الحـل :

المنحنى التكرارى المتجمع النسبى لبيانات المسائل ٣ - ٤٤ ، ٣ - ٤٥ معطى أدناه .

الربيع الأول هو الاحداثى السينى للنقطة على المنحنى التى أحداثها الصادى هو 25% . كذلك فإن الربيع الثانى والثالث هو الاحداثى السينى للنقط على المنحنى والتى أحداثها الصادى هو 50% و 75% على الترتيب .

العشيرات والمثينات يمكن الحصول عليها بطريقة مماثلة . وعلى سبيل المثال فالعشير السابع والمثين الخامس والثلاثين هما الاحداثى السينى للنقط على المنحنى والتى أحداثها الصادى هو 70% و 35% على الترتيب .



شكل ٣ - ٥

مسائل اضافية

رمز التجميع :

٣ - ٤٧ اكتب الحدود لكل من رموز التجميع التالية

(أ) $\sum_{j=1}^{4}(X_j+2)$ (ب) $\sum_{j=1}^{5} f_j X_j^2$ (جـ) $\sum_{j=1}^{3} U_j(U_j+6)$

(د) $\sum_{k=1}^{N}(Y_k^2-4)$ (هـ) $\sum_{j=1}^{4} 4X_jY_j$

ج :

(أ) $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + 8$

(ب) $f_1X_1^2 + f_2X_2^2 + f_3X_3^2 + f_4X_4^2 + f_5X_5^2$ (جـ) $U_1(U_1 + 6) + U_2(U_2 + 6) + U_3(U_3 + 6)$

(د) $Y_1^2 + Y_2^2 + \ldots + Y_N^2 - 4N$ (هـ) $4X_1Y_1 + 4X_2Y_2 + 4X_3Y_3 + 4X_4Y_4$

٣ – ٤٨ عبر عمايل باستخدام رموز التجميع :

(أ) $(X_1 + 3)^3 + (X_2 + 3)^3 + (X_3 + 3)^3$ (ب) $f_1(Y_1 - a)^2 + f_2(Y_2 - a)^2 + \ldots + f_{15}(Y_{15} - a)^2$

(جـ) $(2X_1 - 3Y_1) + (2X_2 - 3Y_2) + \ldots + (2X_N - 3Y_N)$

(د) $(X_1/Y_1 - 1)^2 + (X_2/Y_2 - 1)^2 + \ldots + (X_8/Y_8 - 1)^2$ (هـ) $\frac{f_1a_1^2 + f_2a_2^2 + \ldots + f_{12}a_{12}^2}{f_1 + f_2 + \ldots + f_{12}}$

ج :

(أ) $\sum_{j=1}^{3}(X_j+3)^3$ (ب) $\sum_{j=1}^{15} f_j(Y_j-a)^2$ (جـ) $\sum_{j=1}^{N}(2X_j-3Y_j)$

(د) $\sum_{j=1}^{8}\left(\frac{X_j}{Y_j}-1\right)^2$ (هـ) $\frac{\sum_{j=1}^{12} f_j a_j^2}{\sum_{j=1}^{12} f_j}$

٣ – ٤٩ أثبت أن $\sum_{j=1}^{N}(X_j-1)^2 = \sum_{j=1}^{N} X_j^2 - 2\sum_{j=1}^{N} X_j + N$

٣ – ٥٠ أثبت أن $\Sigma(X + a)(Y + b) = \Sigma XY + a\Sigma Y + b\Sigma X + Nab$ حيث a ، b ثوابت . ماهو رمز الدليل المتضمن هنا؟

٣ – ٥١ متغيران U ، V يأخذان القيم $U_1 = 3$ ، $U_2 = -2$ ، $U_3 = 5$ ، $V_1 = -4$ ، $V_2 = -1$, $V_3 = 6$ على الترتيب . احسب (أ) ΣUV (ب) $\Sigma(U + 3)(V - 4)$ (جـ) ΣV^2 (د) $(\Sigma U)(\Sigma V)^2$ (هـ) ΣUV^2 (و) $\Sigma(U^2 - 2V^2 - 2)$. (ز) $\Sigma(U/V)$.

ج :

(أ) 20 (ب) – 37 (جـ) 53 (د) 6 (هـ) 226 (و) – 62

(ز) 25/12

٣ – ٥٢ إذا كان $\sum_{j=1}^{4} X_j = 7,\ \sum_{j=1}^{4} = -5$ and $\sum_{j=1}^{4} X_jY_j = 5,$ أوجد

(أ) $\sum_{j=1}^{4}(2X_j + 5Y_j)$ و(ب) $\sum_{j=1}^{4}(X_j - 3)(2Y_j + 1)$

ج :

(أ) –1 (ب) 23

الوسط الحسابى :

٣ – ٥٣ حصل طالب على الدرجات 96, 82, 93, 76, 85 فى خمس مواد أوجد الوسط الحسابى للدرجات .

ج : 86

٣ – ٥٤ زمن رد الفعل لشخص ما لمثير خارجى قيس بواسطة محلل نفسى وكان 0.52, 0.49, 0.50, 0.46, 0.53, 0.44 and 0.55 ثانية على الترتيب . أوجد متوسط زمن رد فعل الشخص للمثير الخارجى .

ج : 0.50 s

٣ – ٥٥ مجموعة من الأرقام مكونة من ست ستات وسبع سبعات وثمانى ثمانيات وتسع تسعات وعشر عشرات . ما هو الوسط الحسابى للأرقام ؟

ج : 8.25

٣ – ٥٦ درجات طالب فى المعمل ، المحاضرات والشفوى فى مقرر الطبيعة هى 89, 78, 71 على الترتيب .

(أ) إذا كانت الأوزان المقررة لهذه الأجزاء هى 2, 4, 5 على الترتيب ماهو الوسط الملائم للدرجات ؟

(ب) ما هو وسط الدرجات إذا استخدمنا أوزاناً متساوية ؟

ج : (أ) 82 . (ب) 79

٣ – ٥٧ ثلاثة من مدرسى الاقتصاد أعطوا متوسط درجات امتحاناتهم 82, 79,74 فى فصولهم المكونة من 17 ,25 ,32 طالباً على الترتيب . أوجد متوسط الدرجات فى جميع الفصول .

ج : 78

٣ – ٥٨ متوسط الأجر السنوى لجميع العاملين فى شركة هو £1500 . وكان متوسط الأجر السنوى الممنوح للذكور والإناث العاملين فى الشركة هو £1260 و £1560 على الترتيب . أوجد نسبة الذكور إلى الإناث العاملين بالشركة .

ج : 80%, 20%

٣ – ٥٩ الجدول ٣ – ٨ يبين توزيع الحمل الأعظم بالكيلو المنقول خلال كابلات من إنتاج شركة . أوجد متوسط الحمل الأعظم باستخدام

(أ) الطريقة المطولة

(ب) طريقة الترميز

ج : 110.9 kN

٣ – ٦٠ أوجد $\overline{X}$ للبيانات بالجدول ٣ – ٩ باستخدام

(أ) الطريقة المطولة

(ب) طريقة الترميز .

ج : 501.0

جدول ٣ – ٨

الحمل الأعظم (kN)	عدد الكابلات
93 - 97	2
98 - 102	5
103 - 107	12
108 - 112	17
113 - 117	14
118 - 122	6
123 - 127	3
128 - 132	1
المجموع	60

جدول ٣ – ٩

X	462	480	498	516	534	552	570	588	606	624
f	98	75	56	42	30	21	15	11	6	2

٣ – ٦١ الجدول ٣ – ١٠ أدناه يظهر توزيع أقطار رؤوس مسامير برشام منتجة بواسطة شركة . إحسب متوسط القطر .

ج : 7.2642 mm

جدول ٣ – ١٠

القطر (mm)	التكرارات
10 – under 15	3
15 – under 20	7
20 – under 25	16
25 – under 30	12
30 – under 35	9
35 – under 40	5
40 – under 45	2
المجموع	54

جدول ٣ – ١١

الفئات	التكرارات
7·247 – 7·249	2
7·250 – 7·252	6
7·253 – 7·255	8
7·256 – 7·258	15
7·259 – 7·261	42
7·262 – 7·264	68
7·265 – 7·267	49
7·268 – 7·270	25
7·271 – 7·273	18
7·274 – 7·276	12
7·277 – 7·279	4
7·280 – 7·282	1
المجموع	250

٣ – ٦٢ احسب المتوسط من بيانات الجدول ٣ – ١١ أعلاه

ج : 26.2

٣ – ٦٣ احسب متوسط العمر الانتاجي للأنابيب المنتجة بواسطة شركة L and M للأنابيب بالمسألة ٢ – ٢٠ الفصل الثانى .

ج : 715 ساعة

٣ - ٦٤ (أ) استخدام التوزيع التكرارى الذى حصلت عليه فى المسألة ٢ - ٢٧ ، الفصل الثانى ، لحساب متوسط قطر رولمان البلى
(ب) احسب المتوسط مباشرة من البيانات الأصلية وقارن بـ (أ) ، فسر أى اختلاف يمكن حدوثه .

ج : 7.349 mm

الوسيط :

٣ - ٦٥ : أوجد الوسط والوسيط لمجموعة الأرقام :
(أ) 5, 4, 8, 3, 7, 2, 9 (ب) 18.3, 20.6, 19.3, 22.4, 20.2, 18.8, 19.7, 20.0

ج : (أ) الوسط = 5.4 ، الوسيط = 5.
(ب) الوسط = 19.19 ، الوسيط = 19.85

٣ - ٦٦ أوجد وسيط الدرجات للمسألة ٣ - ٥٣

ج : 85 .

٣ - ٦٧ أوجد وسيط زمن رد الفعل بالمسألة ٣ - ٥٤

ج : 0.51 ثانية

٣ - ٦٨ أوجد وسيط الأرقام فى المسألة ٣ - ٥٥ .

ج : 8

٣ - ٦٩ أوجد وسيط الحمل الأعظم للكابلات فى المسألة ٣ - ٥٩

ج : 110.7 kN

٣ - ٧٠ أوجد الوسيط $\widetilde{X}$ للتوزيع فى المسألة ٣ - ٦٠

ج : 490.6

٣ - ٧١ أوجد وسيط أقطار مسامير البرشام فى المسألة ٣ - ٦١

ج : 7.2638 mm

٣ - ٧٢ أوجد وسيط التوزيع فى المسألة ٣ - ٦٢

ج : 25.4

٣ - ٧٣ الجدول ٣ - ١٢ يمثل توزيع أعمار أرباب العائلات فى الولايات المتحدة خلال السنة 1957

(أ) أوجد وسيط العمر

(ب) لماذا يعد الوسيط أكثر ملاءمة من الوسط كمقياس للنزعة المركزية فى هذه الحالة ؟

ج : 45.1

٣ – ٧٤ أوجد وسيط الدخل للبيانات بالمسألة ٢ – ٣١ ، الفصل الثانى

ج : $3608

٣ – ٧٥ أوجد وسيط العمر الانتاجى للأنابيب فى المسألة ٢ – ٢٠ ، الفصل الثانى

ج : 708.3 ساعة

جدول ٣ – ١٢

سن رب العائلة (بالسنين)	العدد (بالمليون)
Under 25	2·22
25–29	4·05
30–34	5·08
35–44	10·45
45–54	9·47
55–64	6·63
65–74	4·16
75 and over	1·66
	المجموع 43·72

المصدر : مكتب التعدادات

المنــوال :

٣ – ٧٦ أوجد الوسط والوسيط والمنوال لمجموعة الأرقام :

(أ) 7, 9, 7, 12, 15, 9, 10, 4, 7

(ب) 7, 5, 6, 12, 8, 10, 1, 4, 6, 10, 5, 2, 3, 4, 11, 8

ج : (أ) الوسط = 8.9 ، الوسيط = 9 والمنوال = 7

(ب) الوسط = 6.4 ، الوسيط = 6 . وبما أن كلا من الأرقام 10 ,8 ,6 ,5 ,4 يتكرر مرتين فمن الممكن اعتبار أن هناك خمسة مناويل . وقد يكون من الأصوب الانتباه فى مثل هذه الحالة إلى القول بعدم وجود منوال .

٣ – ٧٧ أوجد منوال الدرجات فى المسألة ٣ – ٥٣

ج : لايوجد .

٣ – ٧٨ أوجد منوال وقت رد الفعل فى المسألة ٣ – ٥٤

ج : 0.53

٣ – ٧٩ أوجد منوال مجموعة الأرقام فى المسألة ٣ – ٥٥

ج : 10

٣ – ٨٠ أوجد منوال الحمل الأعظم للكابلات فى المسألة ٣ – ٥٩

ج : 110.6 kN

٣ - ٨١ أوجد المنوال $\hat{X}$ للتوزيع فى المسألة ٣ - ٦٠

ج : 462

٣ - ٨٢ أوجد منوال أقطار مسامير البرشام فى المسألة ٣ - ٦١

ج : 7.2632 mm

٣ - ٨٣ أوجد منوال التوزيع بالمسألة ٣ - ٦٢

ج 23.5

٣ - ٨٤ أوجد منوال العمر الانتاجى للأنابيب فى المسألة ٢ - ٢٠ ، الفصل الثانى

ج 7 668 ساعة

٣-٨٥ هل من الممكن تحديد المنوال للتوزيعات فى :

(ا) المسألة ٣-٧٣ فى هذا الفصل .

(ب) المسألة ٢-٣١ فى الفصل الثانى ؟ أذكر الأسباب فى إجابتك .

٣-٨٦ استخدم العلاقة الاعتبارية ؛ الوسط - المنوال = ٣ (الوسط - الوسيط) لحساب المنوال لتوزيعات (ا) المسألة ٣-٥٩ (ب) المسألة ٣-٦٠ (جـ) المسألة ٣-٦١ (د) المسألة ٣-٦٢ (هـ) المسألة ٢-٢٠ فى الفصل الثانى .

قارن النتائج بتلك التى تحصل عليها من الصيغة (٩) ، صفحة ٧٦ ، فسر أى اتفاق أو عدم اتفاق .

٣-٨٧ أثبت التعبير الذى أعطى فى نهاية المسألة ٣-٣٢ .

الوسطى الهندسى :

٣-٨٨ أوجد الوسط الهندسى للأرقام (ا) 4.2, 16.8 (ب) 6.00 ، 3.00

ج (ا) 8.4 (ب) 4.23

٣-٨٩ أوجد (ا) الوسط الهندسى G (ب) الوسط الحسابى $\bar{X}$ للأرقام 2, 4, 8, 16, 32

ج (أ) $G = 8$ (ب) $\bar{X} = 12.4$

٣-٩٠ أوجد الوسط الهندسى للأرقام (ا) 3, 5, 8, 3, 7, 2 (ب) 28.5, 73.6, 47.2, 31.5, 64.8

ج (ا) 4.14 (ب) 45.8

٣-٩١ أوجد الوسط الهندسى للتوزيعات فى (ا) المسألة ٥٩ و (ب) المسألة ٦٠ . أثبت أن الوسط الهندسى أقل من أو يساوى الوسط الحسابى فى هذه الحالات .

ج : (ا) 110.7 kN (ب) 499.5

٣-٩٢ إذا كانت أسعار سلعة تتضاعف فى فترة 4 سنوات ، ما هو متوسط نسبة الزيادة فى السنة .

ج : 18.9 %

٣-٩٣ فى سنة 1950, 1960 كان عدد سكان الولايات المتحدة (متضمنة الاسكا وهاواى) 151.3, 179.3 مليون على الترتيب .

(ا) ما هو متوسط نسبة الزيادة فى السنة ؟

(ب) قدر عدد السكان فى 1954

(ج) إذا كان متوسط نسبة الزيادة من سنة 1960 إلى 1970 كما فى (ا) ماذا يكون عليه عدد السكان 1970 ؟

ج : (ا) 1.71% (ب) 161.9 مليون (ج) 212.5 مليون .

٣-٩٤ رأسمال قدره £1000 استثمر بمعدل فائدة 4% سنويا . ما هو المبلغ الإجمالى بعد 6 سنوات إذا لم يسحب رأس المال الأصلى ؟

ج : £1265.30

٣-٩٥ فى المسألة السابقة إذا كانت الفائدة تضاف إلى رأس المال كل ربع سنة (بمعنى أن هناك 1% زيادة فى المبلغ كل ٣ شهور) ، ما هو المبلغ الإجمالى بعد 6 سنوات

ج : £1269.70

٣-٩٦ أوجد رقمين وسطهما الحسابى 9.0 ووسطهما الهندسى 7.2

ج : 3.6, 14.4

الوسط التوافقى :

٣-٩٧ أوجد الوسط التوافقى للأرقام (ا) 2, 3, 6 (ب) 3.2, 5.2, 4.8, 6.1, 4.2

ج : (ا) 3.0 (ب) 4.48

٣-٩٨ أوجد (ا) الوسط الحسابى (ب) الوسط الهندسى . (ج) الوسط التوافقى للأرقام 6, 4, 0, 0

ج : (ا) 3 ، (ب) 0 ، (ج) 0

٣-٩٩ إذا كانت $X_1, X_2, X_3, \ldots$ تمثل مراكز الفئات فى توزيع تكرارى ويقابلها التكرارات $f_1, f_2, f_3, \ldots$ على الترتيب ، أثبت أن الوسط التوافقى H للتوزيع يعطى من العلاقة .

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{N}\left(\frac{f_1}{X_1} + \frac{f_2}{X_2} + \frac{f_3}{X_3} + \ldots\right) = \frac{1}{N}\Sigma\frac{f}{X}$$

حيث

$$N = f_1 + f_2 + \ldots = \Sigma f$$

٣-١٠٠ باستخدام المسألة السابقة أوجد الوسط التوافقى للتوزيعات فى (أ) المسألة ٣-٥٩ (ب) المسألة ٣-٦٠ . قارن بالمسألة ٣-٩١

ج (أ) 110.4 (ب) 498.2

٣-١٠١ المدن A, B, C متساوية فى بعدها عن بعضها . سافر راكب دراجة من A إلى B بسرعة 30 km/h ومن B إلى C بسرعة 40 km/h ومن C إلى A بسرعة 50 km/h . حدد متوسط سرعته فى الرحلة كلها .

ج 38.3 km/h

٣-١٠٢ (أ) طائرة تسافر المسافات d_1, d_2, d_3 km بسرعات v_1, v_2, v_3 km/h على الترتيب . أثبت أن متوسط السرعة يعطى بـ V حيث $\frac{d_1 + d_2 + d_3}{V} = \frac{d_1}{v_1} + \frac{d_2}{v_2} + \frac{d_3}{v_3}$ ، هذا هو الوسط التوافقى المرجح .

(ب) أوجد V إذا كانت $d_1 = 2500, d_2 = 1200, d_3 = 500, v_1 = 500, v_2 = 400, v_3 = 250$

ج (ب) 420 km/h

٣-١٠٣ أثبت أن الوسط الهندسى للرقمين الموجبين a, b هى :

(أ) أقل من أو يساوى الوسط الحسابى .

(ب) أكبر من أو يساوى الوسط التوافقى لهذه الأرقام

هل يمكن تعميم الإثبات ليشمل أكثر من رقمين ؟

الوسط التربيعى او وسط جذر المربعات :

٣-١٠٤ أوجد الوسط التربيعى أو وسط جذر المربعات للأرقام .

(أ) 11, 23, 35 (ب) 2.7, 3.8, 3.2, 4.3

ج (أ) 25 (ب) 3.55

٣-١٠٥ أثبت أن جذر متوسط المربعات لرقمين موجبين a, b هو

(أ) أكبر من أو يساوى الوسط الحسابى .

(ب) أكبر من أو يساوى الوسط التوافقى .

هل يمكن تعميم الاثبات لأكثر من رقمين ؟

٣-١٠٦ أستنتج صيغة يمكن إستخدامها للحصول على الوسط التربيعى للبيانات المجمعة . طبق هـــذه الصيغة على أحد التوزيعات التكرارية التى سبق دراستها .

الربيعات والعشيرات والمئينات :

٣-١٠٧ جدول ٣-١٣ يوضح التوزيع التكرارى للدرجات التى حصل عليها الطلبة فى امتحان الكلية النهائى فى الجبر .

(ا) أوجـــد ربيعات التوزيع .

(ب) فسر بوضوح دلالة كل منها .

الدرجـــة	عدد الطلبة
90–100	9
80–89	32
70–79	43
60–69	21
50–59	11
40–49	3
30–39	1
المجموع	120

جدول ٣-١٣

ج : (ا) الربيع الأدنى = Q_1 = 67

الربيع الأوسط = Q_2 = الوسيط = 75

الربيع الأعلى = Q_3 = 83

(ب) 25% سجلوا 67 أو أقل (أو 75% سجلوا 67 أو أكبر)

50% سجلوا 75 أو أقل (أو 50% سجلوا 75 أو أكبر)

75% سجلوا 83 أو أقل (أو 25% سجلوا 83 أو أكبر)

٣-١٠٨ أوجد الربيعات Q_1، Q_2، Q_3 للتوزيعات فى (ا) المسألة ٣-٥٩
(ب) مسألة ٣-٦٠ (جـ) المسألة ٢-٣١ فى الفصل الثانى .

فسر بوضوح دلالة كل منها

ج : (ا) $Q_1 = 105.5,\ Q_2 = 110.7,\ Q_3 = 115.7$ kN

(ب) $Q_1 = 469.3,\ Q_2 = 490.6,\ Q_3 = 523.3$

(جـ) $Q_1 = \$1667,\ Q_2 = \$3608,\ Q_3 = \$5268$

٣-١٠٩ أوجد (ا) العشير الثانى (ب) العشير الرابع (جـ) المئين التسعين (د) المئين الثامن والستون لبيانات المسألة ٣-٣٧ ، فسر بوضوح دلالة كل منها .

ج : (ا) 32.4 (ب) 40.9 (جـ) 68.5 (د) 53.4

٣-١١٠ أوجد (ا) P_{10} (ب) P_{90} (جـ) P_{25} (د) P_{75} لبيانات المسألة ٣-٥٩ ، فسر بوضوح دلالة كل منها .

(ا) 10.15 (ب) 11.78 (جـ) 10.55 (د) 11.57 kN

٣-١١١ (ا) هل يمكن التعبير عن الربيعات والعشيرات بدلالة المئينات ؟

(ب) هل يمكن التعبير عن جميع قيم التقسيمات الجزئية بدلالة المئينات ؟ وضح .

٣-١١٢ لبيانات المسألة ٣-١٠٧ أوجد (ا) أصغر درجة سجلت بواسطة الـ 25% الأول فى الفصل (ب) أعلى درجة سجلت بواسطة الـ 20% الأقل درجات فى الفصل . فسر إجابتك باستخدام المئينات .

ج : (ا) 83 (ب) 64

٣-١١٣ عبر عن نتائج المسألة ٣-١٠٧ بالرسم البيانى باستخدام .

(ا) المدرج التكرارى النسبى .

(ب) المضلع التكرارى النسبى .

(ج) المنحنى التكرارى المتجمع النسبى .

٣-١١٤ أجب على السؤال ٣-١١٣ باستخدام نتائج المسألة ٣-١٠٨ .

٣-١١٥ (ا) أوجد صيغة مشابهة لتلك المعرفة بالمعادلة (٨) صفحة ٧٥ ، لحساب المئينات لأى توزيع تكرارى .

(ب) وضح استخدام الصيغة بتطبيقها للحصول على نتائج المسألة ٣-١٠٠ .

الفصل الرابع

الانحراف المعيارى
والمقاييس الأخرى للتشتت

التشتت او التغير :

الدرجة التى تتجه بها البيانات الرقمية للانتشار حول قيمة وسطى تسمى تشتت أو تغير البيانات . وهناك عديد من مقاييس التشتت أو التغير يمكن استخدامها وإن كان الأكثر شيوعاً هو المدى ، الانحراف المتوسط ، نصف المدى الربيعى ، مدى المئينات والانحراف المعيارى .

المدى :

مدى مجموعة من الأرقام هو الفرق بين أكبر رقم وأقل رقم فى المجموعة .

مثـــال : مدى المجموعة $2, 3, 3, 5, 5, 5, 8, 10, 12$ هو $12 - 2 = 10$. فى بعض الأحيان يعطى المدى بذكر أقل واكبر رقم . فى المثال السابق على سبيل المثال يمكن تحديد المدى من 2 إلى 12 أو $12 - 2$.

الانحراف المتوسط او متوسط الانحرافات :

الانحراف المتوسط أو متوسط الانحرافات لمجموعة N من الأرقام $X_1, X_2, \ldots, X_N$ يعرف بما يلى

$$\text{الانحراف المتوسط} = M.D. = \frac{\sum_{j=1}^{N} |X_j - \bar{X}|}{N} = \frac{\Sigma |X - \bar{X}|}{N} = \overline{|X - \bar{X}|} \quad (1)$$

حيث $\bar{X}$ هو الوسط الحسابى للأرقام و $|X_j - \bar{X}|$ هو القيمة المطلقة لانحراف القيمة X_j عن $\bar{X}$ (القيمة المطلقة لرقم هو الرقم بدون الإشارة المرافقة له ويعبر عن ذلك بخطين رأسيين يوضعان حول الرقم) وعلى هذا فإن

$$|-4| = 4, |+3| = 3, |6| = 6, |-0.84| = 0.84.)$$

مثال : أوجد متوسط الانحرافات لمجموعة الأرقام $2, 3, 6, 8, 11$.

$$\text{الوسط الحسابى} = \bar{X} = \frac{2+3+6+8+11}{5} = 6$$

$$\text{الانحراف المتوسط} = M.D. = \frac{|2-6| + |3-6| + |6-6| + |8-6| + |11-6|}{5}$$

$$= \frac{|-4| + |-3| + |0| + |2| + |5|}{5} = \frac{4+3+0+2+5}{5} = 2.8$$

إذا كانت $X_1, X_2, \ldots, X_K$ تحدث بتكرارات $f_1, f_2, \ldots, f_K$ على الترتيب ، فان الانحراف المتوسط يمكن كتابته على صورة

$$\text{الانحراف المتوسط} = \text{M.D.} = \frac{\sum_{j=1}^{K} f_j |X_j - \bar{X}|}{N} = \frac{\Sigma f |X - \bar{X}|}{N} = \overline{|X - \bar{X}|} \qquad (٢)$$

حيث $N = \sum_{j=1}^{K} f_j = \Sigma f$. وهذه الصيغة مفيدة للبيانات المجمعة حيث X_j's تمثل مراكز الفئات و f_j's يمثل التكرارات المقابلة لها .

فى بعض الأحيان يعرف الانحراف المتوسط بدلالة القيمة المطلقة للانحرافات عن الوسيط أو غيره من المتوسطات بدلا من الوسط . خاصية هامة للمجموع $\sum_{j=1}^{N} |X_j - a|$ أنه يكون أقل ما يمكن عندما تكون a هى الوسيط ، بمعنى أن متوسط انحرافات القيم عن الوسيط يكون أقل ما يمكن .

لاحظ أنه قد يكون من الأنسب استخدام التعبير ، متوسط القيم المطلقة للانحرافات عن التعبير الانحراف المتوسط .

نصف المدى الربيعى او الانحراف الربيعى : لمجموعة من البيانات يعرف كالآتى :

$$\text{نصف المدى الربيعى} = Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2} \qquad (٣)$$

حيث Q_1 هو الربيع الأول و Q_3 هو الربيع الثالث للبيانات . أنظر المسائل ٤ — ٦ ، ٤ — ٧ . ويستخدم المدى الربيعى $Q_3 - Q_1$ فى بعض الأحيان بدلا من نصف المدى الربيعى كمقياس شائع للتشتت .

مدى المئينات 90 — 10 لمجموعة من البيانات يعرف كالآتى :

$$\text{مدى المئينات } 10 - 90 = P_{90} - P_{10} \qquad (٤)$$

حيث P_{10} و P_{90} المئين العاشر والمئين التسعين للبيانات (أنظر المسألة ٤ — ٨) . نصف المدى المئينى 10-90 ، $\frac{1}{2}(P_{90} - P_{10})$ يمكن أيضاً استخدامه ولكنه ليس شائع الاستخدام .

الانحراف المعيارى : لمجموعة من N رقم $X_1, X_2, \ldots, X_N$ ويعبر عنها بالرمز s تعرف بما يلى

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{N} (X_j - \bar{X})^2}{N}} = \sqrt{\frac{\Sigma (X - \bar{X})^2}{N}} = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{N}} = \sqrt{\overline{(X - \bar{X})^2}} \qquad (٥)$$

حيث x تمثل انحرافات كل رقم X_j عن المتوسط $\bar{X}$.

وعلى هذا فإن s هى جذر متوسط مربعات انحرافات القيم عن وسطها ، ويسمى أحياناً جذر متوسط مربع الانحراف (أنظر صفحة ٧٧)

إذا كانت $X_1, X_2, \ldots, X_K$ تحدث بتكرارات $f_1, f_2, \ldots, f_K$ على الترتيب فإن الانحراف المعيارى يمكن كتابته على صورة :

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{K} f_j (X_j - \bar{X})^2}{N}} = \sqrt{\frac{\Sigma f(X - \bar{X})^2}{N}} = \sqrt{\frac{\Sigma f x^2}{N}} = \sqrt{\overline{(X - \bar{X})^2}} \quad (٦)$$

حيث $N = \sum_{j=1}^{K} f_j = \Sigma f$. وهذه الصيغة مفيدة فى حالة البيانات المجمعة .

فى بعض الأحيان يعرف الانحراف المعيارى لبيانات من عينة بالقسمة على $(N - 1)$ بدلا من N فى الصيغ (٥) ، (٦) لأن هذا يؤدى لحصول على تقدير أحسن للانحراف المعيارى للمجتمع الذى سحبت منه العينة . ولقيم N الكبيرة (بالتأكيد $N > 30$) فإنه من الناحية العملية لا يوجد فرق حقيقى بين التعريفين . وكذلك فى حالة ما إذا كنا فى حاجة إلى التقدير الأحسن فإنه يمكن الحصول علية بضرب الانحراف المعيارى المحسوب بالتعريف الأول فى $\sqrt{N/(N-1)}$. وبهذا فإننا سنثبت على استخدام التعريف المعطى أعلاه .

التباين :

تباين مجموعة من البيانات يعرف بأنه مربع الانحراف المعيارى . وبهذا يعرف بـ s^2 فى (٥) ، (٦) .

وعندما يكون ضرورياً التميز بين الانحراف المعيارى للمجتمع والانحراف المعيارى لعينة مسحوبة من هذا المجتمع ، فإننا نستخدم دائماً الرمز s للأخير والرمز σ للأول . وبهذا فإن s^2 ، σ^2 يمثلان تباين العينة وتباين المجتمع على الترتيب .

طريقة مختصرة لحساب الانحراف المعيارى :

المعادلات (٥) ، (٦) يمكن كتابتها على الترتيب فى الصيغ المكافئة .

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{N} X_j^2}{N} - \left(\frac{\sum_{j=1}^{N} X_j}{N}\right)^2} = \sqrt{\frac{\Sigma X^2}{N} - \left(\frac{\Sigma X}{N}\right)^2} = \sqrt{\overline{X^2} - \bar{X}^2} \quad (٧)$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{K} f_j X_j^2}{N} - \left(\frac{\sum_{j=1}^{K} f_j X_j}{N}\right)^2} = \sqrt{\frac{\Sigma f X^2}{N} - \left(\frac{\Sigma f X}{N}\right)^2} = \sqrt{\overline{X^2} - \bar{X}^2} \quad (٨)$$

حيث $\overline{X^2}$ تمثل متوسط مربعات قيم X المختلفة ، بينما $\bar{X}^2$ يمثل مربع متوسط قيم X المختلفة . أنظر المسائل ٤ – ١٢ إلى ٤ – ١٤ .

إذا كانت $d_j = X_j - A$ هى انحرافات X_j عن ثابت اختيارى A ، فالنتائج (٧) ، (٨) تصبح على الترتيب .

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{N} d_j^2}{N} - \left(\frac{\sum_{j=1}^{N} d_j}{N}\right)^2} = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{N} - \left(\frac{\Sigma d}{N}\right)^2} = \sqrt{\overline{d^2} - \bar{d}^2} \quad (٩)$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{K} f_j d_j^2}{N} - \left(\frac{\sum_{j=1}^{K} f_j d_j}{N}\right)^2} = \sqrt{\frac{\Sigma f d^2}{N} - \left(\frac{\Sigma f d}{N}\right)^2} = \sqrt{\overline{d^2} - \bar{d}^2} \quad (١٠)$$

أنظر المسائل ٤ – ١٥ ، ٤ – ١٧ .

وعندما تجمع البيانات فى توزيع تكرارى طول فئاته متساوية وتساوى c ، فإن $d_j = cu_j$ or $X_j = A + cu_j$ و (١٠) تصبح

$$s = c\sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{K} f_j u_j^2}{N} - \left(\frac{\sum_{j=1}^{K} f_j u_j}{N}\right)^2} = c\sqrt{\frac{\Sigma fu^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fu}{N}\right)^2} = c\sqrt{\overline{u^2} - \bar{u}^2} \qquad (١١)$$

والصيغة الأخيرة تعطى طريقة مختصرة جداً لحساب الانحراف المعيارى ويجب استخدامها للبيانات المجمعة إذا كانت أطوال الفئات متساوية . وهذه تسمى بطريقة الترميز وهى مماثلة بالضبط للطريقة المستخدمة فى حساب الوسط الحسابى من البيانات المجمعة فى الفصل الثالث . أنظر المسائل ٤ – ١٦ إلى ٤ – ١٩ .

خصائص الانحراف المعيارى :

١ – الانحراف المعيارى يمكن تعريفه كالآتى

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{N}(X_j - a)^2}{N}}$$

حيث a أى وسط بالإضافة إلى الوسط الحسابى . ومن كل هذه الانحرافات المعيارية ، نجد أن أصغرها يمكن الحصول عليه عندما نأخذ $a = \bar{X}$ هذا نظراً للخاصية (ب) ، الفصل الثالث صفحة ٧٤ . هذه الخاصية تمدنا بالسبب المهم لتعريف الانحراف المعيارى كما سبق . لإثبات هذه الخاصية أنظر المسألة ٤ – ٢٧ .

٢ – فى التوزيع الطبيعى (أنظر الفصل السابع) نجد أن :

(أ) 68.27% من الحالات تقع بين $\bar{X} + s$ ، $\bar{X} - s$

(بمعنى ، انحراف معيارى واحد على كل جانب من الوسط)

(ب) 95.45 % من الحالات تقع بين $\bar{X} + 2s$ ، $\bar{X} - 2s$

(بمعنى انحرافين معياريين على كل جانب من الوسط) .

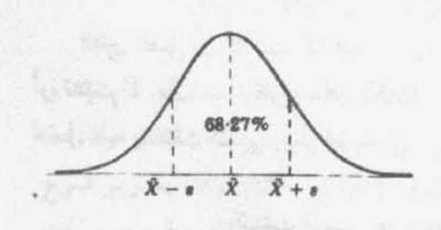
(ﺟ) 99.73% من الحالات تقع بين $\bar{X} + 3s$ ، $\bar{X} - 3s$

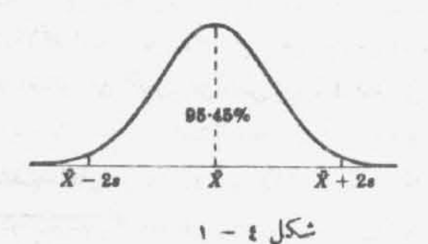
(بمعنى ثلاثة انحرافات معيارية على كل جانب من الوسط) .

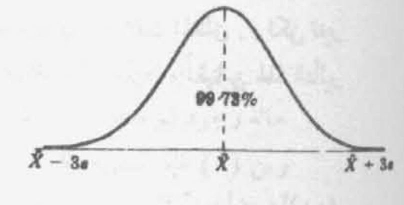
كما هو موضح بالشكل ٤ – ١

وللتوزيعات متوسطة الالتواء فالنسب السابقة تتحقق بشكل تقريبى .

(أنظر المسألة ٢ – ٢٤) .







شكل ٤ – ١

٣ – إذا افترضنا أن مجموعتين مكونتان من N_1 ، N_2 رقم (أو توزيعان تكراريان ومجموع تكراراتهما هى N_1 ، N_2) وتباينهما معطى بـ s_1^2 ، s_2^2 على الترتيب ولها نفس الوسط $\bar{X}$. فان التباين المشترك أو المجمع للمجموعتين (أو للتوزيعين التكراريين) هو

$$s^2 = \frac{N_1 s_1^2 + N_2 s_2^2}{N_1 + N_2} \qquad (١٢)$$

لاحظ أن هذا هو الوسط الحسابى المرجح للتباينات . وهذه النتيجة يمكن تعميمها لحالة ثلاثة أو أكثر من التباينات .

طريقة شارلير للمراجعة :

طريقة شارلير لمراجعة حساب الوسط والانحراف المعيارى باستخدام طريقة الترميز تستخدم المتطابقات :

$$\Sigma f(u+1) = \Sigma fu + \Sigma f = \Sigma fu + N$$

$$\Sigma f(u+1)^2 = \Sigma f(u^2+2u+1) = \Sigma fu^2 + 2\Sigma fu + \Sigma f = \Sigma fu^2 + 2\Sigma fu + N$$

أنظر المسألة ٤ – ٢٠ .

معامل شبرد لتصحيح التباين :

عند حساب الانحراف المعيارى فإنه يكون معرضاً لبعض الخطأ الناتج عن تجميع البيانات فى فئات (أخطاء التجميع) . ولتعديل هذا الخطأ فإننا نستخدم النتيجة .

التباين المعدل = التباين من البيانات المجمعة – $c^2/12$ $\qquad$ (١٣)

حيث c هو طول الفئة ومعامل التصحيح $c^2/12$ المطروح يسمى تصحيح شبرد ويستخدم فى توزيعات المتغيرات المتصلة حيث « الأطراف » تؤول تدريجياً إلى الصفر فى كلا الاتجاهين .

ويختلف الإحصائيون فى متى وما إذا كان تصحيح شبرد يجب تطبيقه .

وبالتأكيد فإنه يجب عدم استخدامه إلا بعد فحص دقيق للوضع . وهذا إلى أنه كثيراً ما يؤدى إلى مبالغة فى التصحيح وهذا يؤدى إلى استبدال الخطأ القديم بخطأ جديد .

علاقة اعتبارية بين مقاييس التشتت :

للتوزيعات متوسطة الالتواء فإننا نحصل على هذه العلاقة الاعتبارية

الانحراف المتوسط = $\frac{٤}{٥}$ (الانحراف المعيارى)

نصف المدى الربيعى = $\frac{٢}{٣}$ (الانحراف المعيارى)

وهذا ناتج من الحقيقة أنه بالنسبة للتوزيع الطبيعى فإن الانحراف المتوسط ونصف المدى الربيعى يساويان على الترتيب 0.7979 ، 0.6745 مضروباً فى الانحراف المعيارى .

التشتت المطلق والنسبى . معامل الاختلاف :

التغير الفعلى أو التشتت كما نحصل عليه من الانحراف المعيارى أو غيره من مقاييس التشتت يسمى بالتشتت المطلق . ولكن تغير أو تشتت 1 متر عند قياس مسافة 1000 متر يختلف فى تأثيره عن نفس تغير 1 متر فى مسافة 20 متر . ومقياس لهذا التأثير نحصل عليه بالتشتت النسبى ويعرف بما يلى .

$$\text{التشتت النسبى} = \frac{\text{التشتت المطلق}}{\text{المتوسط}} \qquad (١٤)$$

إذا كان التشتت المطلق هو الانحراف المعيارى s والمتوسط هو الوسط $\bar{X}$ فإن التشتت النسبى يسمى بمعامل الاختلاف أو معامل التشتت ويعرف كالآتى :

$$V = \frac{s}{\bar{X}} = \text{معامل الاختلاف} \qquad (١٥)$$

وبشكل عام يعبر عنه كنسبة . وهناك طرق ممكنة أخرى (أنظر المسألة ٤ – ٣) لاحظ أن معامل الاختلاف مستقل عن الوحدات المستخدمة . ولهذا السبب فإنه يفيد عند مقارنة توزيعات ذات وحدات مختلفة . أحد عيوب معامل الاختلاف هو أنه يصبح عديم الفائدة عندما تكون $\bar{X}$ قريبة من الصفر .

المتغير المعيارى والدرجات المعيارية :

المتغير

$$z = \frac{X - \bar{X}}{s} \qquad (١٦)$$

والذى يقيس الانحرافات عن الوسط بوحدات من الانحراف المعيارى يسمى بالمتغير المعيارى وهو كية لا حجم لها (بمعنى أنها مستقلة عن الوحدات المستخدمة) .

إذا كانت الانحرافات عن الوسط معطاة بوحدات من الانحراف المعيارى ، فإنه يقال أنه معبر عنها بوحدات معيارية أو درجات معيارية . وهذه لها قيمة كبيرة عند المقارنة بين التوزيعات (أنظر المسألة ٤ – ٣١) .

مسائل محلولة

المـــدى :

٤ – ١ أوجد مدى كل من مجموعات الأرقام :

(أ) 12, 6, 7, 3, 15, 10, 18, 5   (ب) 9, 3, 8, 8, 9, 8, 9, 18 .

الحـــل :

فى كلتا الحالتين ، المدى = الرقم الأكبر – الرقم الأصغر = 15 = 3 — 18 .

ولكن ، كما هو واضح من منظومة (أ) ، (ب)

(أ) 3, 5, 6, 7, 10, 12, 15, 18   (ب) 3, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 18

أن هناك تغيراً أو تشتتاً أكبر فى (أ) عنه فى (ب) . وفى الحقيقة (ب) تحتوى أساساً على 9's ، 8's

و بما أن المدى يظهر عدم وجود فروق بين المجموعتين فإنه لا يعد مقياساً جيداً فى هذه الحالة . وبشكل عام فإنه فى حالة وجود قيم متطرفة فإن المدى يعد مقياساً غير جيد للتشتت . ويمكن الوصول إلى تحسين له بإهمال الحالات المتطرفة 3،18 ومن (أ) فإن المدى سيكون (10 = 5 — 15) بينما فى (ب) فإن المدى سيكون 1=(8 — 9) وهذا يظهر بوضوح أن (أ) أكثر تشتتاً من (ب) ولكن ليست هذه هى الطريقة التى يعرف بها المدى . ويسمى نصف المدى الربيعى والمدى المئينى 90 — 10 لتحسين المدى بحذف الحالات المتطرفة .

٤ – ٢ أوجد مدى أوزان الطلبة فى جامعة XYZ كما هو موضح بالجدول ٢ – ١ صفحة ٤٥

الحـــل :

هناك طريقتان لتعريف المدى فى البيانات المجمعة .

الطريقة ١ :

المدى = مركز الفئة لأعلى فئة – مركز الفئة لأدنى فئة

$$73 - 61 = 12 \text{ kg}$$

الطريقة ٢ :

المدى = الحد الأعلى الحقيقى لأعلى فئة – الحد الأدنى الحقيقى لأدنى فئة .

$$74.5 - 59.5 = 15 \text{ kg}$$

الانحراف المتوسط :

٤ – ٣ أوجد الانحراف المتوسط لمجموعة الأرقام فى المسألة ٤ – ١ .

الحـــل :

(أ) الوسط الحسابى =

$$\bar{X} = \frac{12 + 6 + 7 + 3 + 15 + 10 + 18 + 5}{8} = \frac{76}{8} = 9{\cdot}5$$

الانحراف المتوسط =

$$\text{M.D.} = \frac{\Sigma |X - \bar{X}|}{N}$$

$$= \frac{|12 - 9{\cdot}5| + |6 - 9{\cdot}5| + |7 - 9{\cdot}5| + |3 - 9{\cdot}5| + |15 - 9{\cdot}5| + |10 - 9{\cdot}5| + |18 - 9{\cdot}5| + |5 - 9{\cdot}5|}{8}$$

$$= \frac{2{\cdot}5 + 3{\cdot}5 + 2{\cdot}5 + 6{\cdot}5 + 5{\cdot}5 + 0{\cdot}5 + 8{\cdot}5 + 4{\cdot}5}{8} \quad \frac{34}{8} \quad 4{\cdot}25$$

(ب) الوسط الحسابى =

$$\bar{X} = \frac{9 + 3 + 8 + 8 + 9 + 8 + 9 + 18}{8} = \frac{72}{8} = 9$$

الانحراف المتوسط =

$$\text{M.D.} = \frac{\Sigma |X - \bar{X}|}{N}$$

$$= \frac{|9 - 9| + |3 - 9| + |8 - 9| + |8 - 9| + |9 - 9| + |8 - 9| + |9 - 9| + |18 - 9|}{8}$$

$$= \frac{0 + 6 + 1 + 1 + 0 + 1 + 0 + 9}{8} = 2{\cdot}25$$

ويظهر الانحراف المتوسط أن المجموعة (ب) أقل تشتتاً من المجموعة (أ) ، كما هو بالفعل .

٤ – ٤ أوجد الانحراف المتوسط لأوزان الـ 100 طالب فى جامعة XYZ (أنظر الجدول ٣ – ٢ صفحة ٨٨) .

الحـــل :

من المسألة ٣ – ٢٠ الفصل الثالث ، الوسط الحسابى = $\bar{X}$ = 67.45 kg ويمكن ترتيب الحل كما هو فى الجدول ٤ – ١

جدول ٤ – ١

الأوزان (kg)	مركز الفئات X	$\lvert X - \bar{X}\rvert = \lvert X - 67{\cdot}45\rvert$	التكرار	$f\lvert X - \bar{X}\rvert$
60–62	61	6·45	5	32·25
63–65	64	3·45	18	62·10
66–68	67	0·45	42	18·90
69–71	70	2·55	27	68·85
72–74	73	5·55	8	44·40
			$N = \Sigma f = 100$	$\Sigma f\lvert X - \bar{X}\rvert = 226{\cdot}50$

$$\text{الانحراف المتوسط} = M.D. = \frac{\Sigma f\lvert X - \bar{X}\rvert}{N} = \frac{226{\cdot}50}{100} = 2{\cdot}26 \text{ kg}$$

ومن الممكن الوصول إلى طريقة للترميز لحساب الانحراف المتوسط (أنظر المسألة ٤ – ٤٧) .

٤ – ٥ حدد نسبة الطلبة فى المسألة ٤–٤ والذى تقع أوزانهم فى المدى

(أ) $\bar{X} \pm M.D$ (ب) $\bar{X} \pm 2\,MD$ (ت) $\bar{X} \pm 3\,M.D$

الحـــل

(أ) $67{\cdot}45 \pm 2{\cdot}26$ $\bar{X} \pm M.D.$ هو المدى من 65.19 kg إلى 69.71 kg

هذا المدى يتضمن كل الأشخاص فى الفئة الثالثة + $(65.5 - 65.19)/3$ من الطلبة فى الفئة الثانية + $(69.71 - 68.5)/3$ من الطلبة فى الفئة الرابعة (نظرا لأن طول الفئة = 3 kg ، الحد الأعلى الحقيقى للفئة الثانية = 65.5 kg ، والحد الأدنى الحقيقى للفئة الرابعة = 68.5 kg) .

عدد الطلبة فى المدى $\bar{X} + M.D$ هـــو

$$42 + \frac{0{\cdot}31}{3}(18) + \frac{1{\cdot}21}{3}(27) = 42 + 1{\cdot}86 + 10{\cdot}89 = 54{\cdot}75, \text{ or } 55$$

ويكون 55 % من المجموع

(ب) $\bar{X} \pm 2\,M.D. = 67{\cdot}45 \pm 2(2{\cdot}26) = 67{\cdot}45 \pm 4{\cdot}52$ هو المدى من 62.93 kg إلى 71.97 kg

عدد الطلبة فى المدى $\bar{X} \pm 2\,M.D.$ هـــو

$$18 - \left(\frac{62{\cdot}93 - 62{\cdot}5}{3}\right)(18) + 42 + 27 - \left(\frac{71{\cdot}97 - 71{\cdot}5}{3}\right)(8) = 85{\cdot}67, \text{ or } 86$$

ويكون 86% من المجموع .

(جـ) $\bar{X} \pm 3\ \text{M.D.} = 67.45 \pm 3(2.26) = 67.45 \pm 6.78$ هو المدى من 60.67 kg إلى 74.23 kg .

عدد الطلبه فى المدى $X \pm 3\ \text{M.D}$ هو

$$5 - \left(\frac{60.67 - 59.5}{3}\right)(5) + 18 + 42 + 27 + \left(\frac{74.5 - 74.23}{3}\right)(8) = 97.33, \text{ or } 97$$

ويكون 97% من المجموع .

نصف المدى الربيعى أو الانحراف الربيعى :

٤ – ٦ أوجد نصف المدى الربيعى لتوزيع أوزان الطلبة فى جامعة XYZ (أنظر الجدول ٤ – ١ فى المسألة ٤–٤) .

الحـــل :

قيم الربيعين الأدنى والأعلى هى $Q_1 = 65.5 + \frac{2}{42}(3) = 65.64\text{ kg}, Q_3 = 68.5 + \frac{10}{27}(3) = 69.61\text{ kg}$

نصف المدى الربيعى أو الانحراف الربيعى هـــو $Q = \frac{1}{2}(Q_3 - Q_1) = \frac{1}{2}(69.61 - 65.64) = 1.98\text{ kg}$

لاحظ أن 50% من الحالات تقع بين Q_3 و Q_1 بمعنى ان 50 طالبا أوزانهم بين 69.61 kg ، 65.64 kg

من الممكن أن نأخذ $\frac{1}{2}(Q_1 + Q_3) = 67.63\text{ kg}$ كمقياس للنزعة المركزية بمعنى ، متوسط الأوزان . ومن ذلك نجد أن 50% من الأوزان تقع فى المدى (67.63 ± 1.98) kg .

٤ – ٧ أوجد نصف المدى الربيعى لأجور الـ 65 عاملا فى شركة P and R . أنظر المسألة ٢ – ٣ الفصل الثانى ، صفحة ٥٢

الحـــل :

من المسألة ٣–٤٤ ، الفصل الثالث $Q_1 = £68.25 \text{ and } Q_3 = £90.75$

نصف المدى الربيعى $Q = \frac{1}{2}(Q_3 - Q_1) = \frac{1}{2}(£90.75 - £68.25) = £11.25$

وبما أن $\frac{1}{2}(Q_1 + Q_3) = £79.50$ فإنه يمكن أن نستنتج أن 50% من العاملين يحصلون على دخل يقع فى المدى $£79.50 \pm £11.25$.

المدى المئينى 90 — 10 :

٤ – ٨ أوجد المدى المئينى 90 — 10 لأوزان الطلبة فى جامعة XYZ. ارجع لجدول ٢ – ١ ، صفحة ٤٥ .

الحـــل :

بما أن $P_{10} = 62.5 + \frac{5}{18}(3) = 63.33\text{ kg and } P_{90} = 68.5 + \frac{25}{27}(3) = 71.27\text{ kg}$

إذن المدى المئينى 90 — 10 $= P_{90} - P_{10} = 71.27 - 63.33 = 7.94\text{ kg}$

وبما أن $\frac{1}{2}(P_{10} + P_{90}) = 67.30\text{ kg and } \frac{1}{2}(P_{90} - P_{10}) = 3.97\text{ kg}$

فإنه يمكننا أن نستنتج أن 80% من الطلبة تقع أوزانهم فى المدى (67.30 ± 3.97) kg .

الانحراف المعيارى :

٤ – ٩ أوجد الانحراف المعيارى لمجموعات الأرقام فى المسألة ٤ – ١

الحل

(ا) $\bar{X} = \frac{\Sigma X}{N} = \frac{12 + 6 + 7 + 3 + 15 + 10 + 18 + 5}{8} = \frac{76}{8} = 9.5$ = الوسط الحسابى

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma (X - \bar{X})^2}{N}}$$

$$= \sqrt{\frac{(12 - 9.5)^2 + (6 - 9.5)^2 + (7 - 9.5)^2 + (3 - 9.5)^2 + (15 - 9.5)^2 + (10 - 9.5)^2 + (18 - 9.5)^2 + (5 - 9.5)^2}{8}}$$

$$= \sqrt{23.75} = 4.87.$$

(ب) $\bar{X} = \frac{9 + 3 + 8 + 8 + 9 + 8 + 9 + 18}{8} = \frac{72}{8} = 9$ = الوسط الحسابى

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma(X - \bar{X})^2}{N}}$$

$$= \sqrt{\frac{(9 - 9)^2 + (3 - 9)^2 + (8 - 9)^2 + (8 - 9)^2 + (9 - 9)^2 + (8 - 9)^2 + (9 - 9)^2 + (18 - 9)^2}{8}}$$

$$= \sqrt{15} = 3.87.$$

النتائج السابقة يمكن مقارنتها بنتائج المسألة ٤–٣ . فن الملاحظ أن الانحراف المعيارى يشير إلى أن المجموعة (ب) أقل تشتتا من المجموعة (ا) .

ولكن هذا الواقع غير ظاهر نظراً لأن القيم المتطرفة تؤثر فى الانحراف المعيارى بدرجة أكبر من الانحراف المتوسط . وهذا متوقع نظرا لأننا نربع الانحرافات عند حساب الانحراف المعيارى .

٤–١٠ أوجد تباين مجموعات الأرقام فى المسألة ٤ – ١ .

الحل

التباين = s^2 . وبهذا من نتائج المسألة ٤–٩ نجد : (ا) $s^2 = 23.75$ (ب) $s^2 = 15$.

٤–١١ أوجد الانحراف المعيارى لأوزان الـ 100 طالب فى جامعة XYZ أنظر الجدول ٢–١ صفحة ٤٥ .

الحل

من المسألة ٣ – ١٥ ، ٣ – ٢٠ بالفصل الثالث $\bar{X} = 67.45$ kg ويمكن ترتيب الحل كما فى الجدول ٤–٢ أدناه .

الجدول ٤ – ٢

الوزن (kg)	مراكز الفئات X	$X - \bar{X} = X - 67.45$	$(X - \bar{X})^2$	التكرار f	$f(X - \bar{X})^2$
60–62	61	−6.45	41.6025	5	208.0125
63–65	64	−3.45	11.9025	18	214.2450
66–68	67	−0.45	0.2025	42	8.5050
69–71	70	2.55	6.5025	27	175.5675
72–74	73	5.55	30.8025	8	246.4200
				$N = \Sigma f = 100$	$\Sigma f(X - \bar{X})^2 = 852.7500$

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma f(X - \bar{X})^2}{N}} = \sqrt{\frac{852.7500}{100}} = \sqrt{8.5275} = 2.92 \text{ kilogrammes}$$

حساب الانحراف المعيارى من البيانات المجمعة :

٤-١٢ (أ) أثبت أن $s = \sqrt{\frac{\Sigma X^2}{N} - \left(\frac{\Sigma X}{N}\right)^2} = \sqrt{\overline{X^2} - \bar{X}^2}$

(ب) استخدم الصيغة فى (أ) لإيجاد الانحراف المعيارى للأرقام 5 ,18 ,10 ,15 ,3 ,7 ,6 ,12 .

الحـــل

(أ) بالتعريف

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma (X-\bar{X})^2}{N}}$$

إذن

$$s^2 = \frac{\Sigma (X-\bar{X})^2}{N} = \frac{\Sigma (X^2 - 2\bar{X}X + \bar{X}^2)}{N} = \frac{\Sigma X^2 - 2\bar{X}\Sigma X + N\bar{X}^2}{N}$$

$$= \frac{\Sigma X^2}{N} - 2\bar{X}\frac{\Sigma X}{N} + \bar{X}^2 = \frac{\Sigma X^2}{N} - 2\bar{X}^2 + \bar{X}^2 = \frac{\Sigma X^2}{N} - \bar{X}^2$$

$$= \overline{X^2} - \bar{X}^2 = \frac{\Sigma X^2}{N} - \left(\frac{\Sigma X}{N}\right)^2$$

أو

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma X^2}{N} - \left(\frac{\Sigma X}{N}\right)^2} = \sqrt{\overline{X^2} - \bar{X}^2}$$

لاحظ أن رموز التجميع المستخدمة أعلاه استخدمت بالصورة المختصرة حيث استخدمنا X بدلا من X_j و Σ بدلا من $\sum_{j=1}^{N}$.

طريقة أخرى :

$$s^2 = \overline{(X-\bar{X})^2} = \overline{X^2 - 2X\bar{X} + \bar{X}^2} = \overline{X^2} - \overline{2X\bar{X}} + \overline{\bar{X}^2}$$

$$= \overline{X^2} - 2\bar{X}\bar{X} + \bar{X}^2 = \overline{X^2} - \bar{X}^2$$

(ب)

$$\overline{X^2} = \frac{\Sigma X^2}{N} = \frac{(12)^2 + (6)^2 + (7)^2 + (3)^2 + (15)^2 + (10)^2 + (18)^2 + (5)^2}{8} = \frac{912}{8} = 114$$

$$\bar{X} = \frac{\Sigma X}{N} = \frac{12 + 6 + 7 + 3 + 15 + 10 + 18 + 5}{8} = \frac{76}{8} = 9{\cdot}5$$

إذن

$$s = \sqrt{\overline{X^2} - \bar{X}^2} = \sqrt{114 - 90{\cdot}25} = \sqrt{23{\cdot}75} = 4{\cdot}87$$

هذه الطريقة يجب مقارنتها بنتيجة المسألة ٤-٩ (أ)

٤-١٣ عدل الصيغة بالمسألة ٤-١٢ (أ) ليسمح بالتكرارات المقابلة للقيم المختلفة لـ X .

الحـــل :

التعديل الملائم هـــو $s = \sqrt{\frac{\Sigma fX^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fX}{N}\right)^2} = \sqrt{\overline{X^2} - \bar{X}^2}$

وهذا يمكن إثباته كما فى المسألة ٤-١٢ (أ) حيث نبدأ بتعريف $s = \sqrt{\frac{\Sigma f (X-\bar{X})^2}{N}}$

إذن

$$s^2 = \frac{\Sigma f(X-\bar{X})^2}{N} = \frac{\Sigma f(X^2 - 2\bar{X}X + \bar{X}^2)}{N} = \frac{\Sigma fX^2 - 2\bar{X}\Sigma fX + \bar{X}^2 \Sigma f}{N}$$

$$= \frac{\Sigma fX^2}{N} - 2\bar{X}\frac{\Sigma fX}{N} + \bar{X}^2 = \frac{\Sigma fX^2}{N} - 2\bar{X}^2 + \bar{X}^2 = \frac{\Sigma fX^2}{N} - \bar{X}^2$$

$$= \frac{\Sigma fX^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fX}{N}\right)^2 \quad \text{or} \quad s = \sqrt{\frac{\Sigma fX^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fX}{N}\right)^2}$$

لاحظ أننا فى رموز التجميع المستخدمة أعلاه استخدمنا الصيغة المختصرة حيث X, f استخدمت بدلا من f_j و X_j ، Σ استخدمت بدلا من $\sum_{j=1}^{K}$ ، $\sum_{j=1}^{K} f_j = N$

١٤-٤ باستخدام صيغة المسألة ٤-١٣ ، أوجد الانحراف المعيارى لبيانات المسألة ٤-١١ .

الحـل :

يمكن ترتيب الحل كما فى الجدول ٤-٣

جدول ٤-٣

الأوزان (kg)	مراكز الفئات X	X^2	التكرار f	fX^2
60–62	61	3721	5	18 605
63–65	64	4096	18	73 728
66–68	67	4489	42	188 538
69–71	70	4900	27	132 300
72–74	73	5329	8	42 632
			$N = \Sigma f = 100$	$\Sigma fX^2 = 455\,803$

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma fX^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fX}{N}\right)^2} = \sqrt{\frac{455\,803}{100} - (67{\cdot}45)^2} = \sqrt{8{\cdot}5275} = 2{\cdot}92 \text{ kg}$$

حيث $\bar{X} = \frac{\Sigma fX}{N} = 67{\cdot}45$ kg مطابق لما حصلنا عليه فى المسألة ٣-١٥ ، الفصل الثالث .

لاحظ أنه فى هذه المسألة كما فى المسألة ٤ – ١١ تجرى عمليات حسابية مطوله . فى المسألة ٤-١٧ سنوضح كيف أن طريقة الترميز تبسط الحسابات بشكل كبير جدا .

١٥-٤ إذا كانت $d = X - A$ انحرافات X عن ثابت اختيارى A ، أثبت أن

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fd}{N}\right)^2}$$

الحـل :

بما أن $X = A + d$ ، $d = X - A$ ، $X = A + \bar{d}$ كما فى المسألة ٣-١٨ ، الفصل الثالث . إذن

$$X - \bar{X} = (A + d) - (A + \bar{d}) = d - \bar{d}$$

حيث

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma f(X-\bar{X})^2}{N}} = \sqrt{\frac{\Sigma f(d-\bar{d})^2}{N}} = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fd}{N}\right)^2}$$

باستخدام نتائج المسألة ٤-١٣ حيث أبدلنا $\bar{X}$ و X بـ $\bar{d}$ و d على الترتيب

طريقة اخرى :

$$s^2 = \overline{(X-\bar{X})^2} = \overline{(d-\bar{d})^2} = \overline{d^2 - 2\bar{d}d + \bar{d}^2}$$
$$= \overline{d^2} - 2\bar{d}^2 + \bar{d}^2 = \overline{d^2} - \bar{d}^2 = \frac{\Sigma fd^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fd}{N}\right)^2$$

ونحصل على النتيجة بأخذ الجذر الموجب .

٤–١٦ بين أنه لو قمنا بترميز كل مركز فئة X فى توزيع تكرارى طول فئاته متساوية وتساوى c بالقيمة u طبقا للعلاقة $X = A + cu$ حيث A أحد مراكز الفئات فإن الانحراف المعيارى يمكن كتابته على الصورة .

$$s = c\sqrt{\frac{\Sigma fu^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fu}{N}\right)^2} = c\sqrt{\overline{u^2} - \bar{u}^2}$$

الحـــل :

نحصل على ذلك مباشرة من المسألة السابقة . بما أن $d = X - A = cu$ و بما أن c ثابت

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma f(cu)^2}{N} - \left(\frac{\Sigma f(cu)}{N}\right)^2} = \sqrt{c^2\frac{\Sigma fu^2}{N} - c^2\left(\frac{\Sigma fu}{N}\right)^2} = c\sqrt{\frac{\Sigma fu^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fu}{N}\right)^2}$$

طريقة اخرى :

من الممكن اثبات النتيجة مباشرة بدون استخدام المسألة ٤–١٥ .

بما أن

$$X = A + cu,\ \bar{X} = A + c\bar{u} \text{ and } X - \bar{X} = c(u - \bar{u}).$$

اذن

$$s^2 = \overline{(X-\bar{X})^2} = \overline{c^2(u-\bar{u})^2} = c^2\overline{(u^2 - 2\bar{u}u + \bar{u}^2)} = c^2(\overline{u^2} - 2\bar{u}^2 + \bar{u}^2) = c^2(\overline{u^2} - \bar{u}^2)$$

و

$$s = c\sqrt{\overline{u^2} - \bar{u}^2} = c\sqrt{\frac{\Sigma fu^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fu}{N}\right)^2}$$

٤–١٧ أوجد الانحراف المعيارى لأوزان الطلبة فى جامعة XYZ باستخدام (أ) الصيغة المستنتجة فى المسألة ٤–١٥ (ب) طريقة الترميز المستخدمة فى المسألة ٤–١٦ .

الحـــل :

فى الجداول ٤–٤ ، ٤–٥ ، فإننا أخذنا بشكل اختيارى A تساوى مركز الفئة 67 . لاحظ أنه فى الجدول ٤–٤ الانحرافات $d = X - A$ مضاعفات لطول الفئة c . هذا العامل حذف فى الجدول ٤–٥ . وهذا أدى إلى تبسيط الحسابات بشكل كبير فى الجدول ٤–٥ . ويجب مقارنة هذه الجداول بتلك فى المسائل ٤–١١ ، ٤–١٤ . ولهذه الأسباب فإن طريقة الترميز يجب استخدامها كلما كان ذلك ممكنا .

(أ) الجدول ٤–٤

مراكز الفئات X	$d = X - A$	التكرارات f	fd
61	−6	5	−30
64	−3	18	−54
$A \longrightarrow$ 67	0	42	0
70	3	27	81
73	6	8	48
		$N = \Sigma f = 100$	$\Sigma fd = 45$

$$= \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fd}{N}\right)^2} = \sqrt{\frac{873}{100} - \left(\frac{45}{100}\right)^2} = \sqrt{8{\cdot}5275} = 2{\cdot}92 \text{ kg}$$

(ب) جدول ٤–٥

مراكز الفئات f	$u = \frac{X - A}{c}$	التكرارات X	fu	fu^2
5	−2	61	−10	20
18	−1	64	−18	18
42	0	$A \longrightarrow$ 67	0	0
27	1	70	27	27
8	2	73	16	32
$N = \Sigma f = 100$			$\Sigma fu = 15$	$\Sigma fu^2 = 97$

$$s = c\sqrt{\frac{\Sigma fu^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fu}{N}\right)^2} = 3\sqrt{\frac{97}{100} - \left(\frac{15}{100}\right)^2} = \sqrt{0{\cdot}9475} = 2{\cdot}92 \text{ kg}$$

٤–١٨ أوجد (ا) الوسط الحسابى (ب) الانحراف المعيارى ، لتوزيع أجور الـ 65 عاملا فى شركة P and R باستخدام طريقة الترميز (أنظر المسألة ٢–٣ ، الفصل الثانى) .

الحــل :

يمكن ترتيب الحل كما هو موضح بالجدول ٤–٦

جدول ٤–٦

X	u	f	fu	fu^2
£55·00	−2	8	−16	32
65·00	−1	10	−10	10
$A \longrightarrow$ 75·00	0	16	0	0
85·00	1	14	14	14
95·00	2	10	20	40
105·00	3	5	15	45
115·00	4	2	8	32
		$N = \Sigma f = 65$	$\Sigma fu = 31$	$\Sigma fu^2 = 173$

(ا)
$$\bar{X} = A + c\bar{u} = A + c\frac{\Sigma fu}{N} = £75{\cdot}00 + (£10{\cdot}00)\left(\frac{31}{65}\right) \quad £79{\cdot}99$$

(ب)
$$s = c\sqrt{\overline{u^2} - \bar{u}^2} = c\sqrt{\frac{\Sigma fu^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fu}{N}\right)^2} = (£10{\cdot}00)\sqrt{\frac{173}{65} - \left(\frac{31}{65}\right)^2} = (£10{\cdot}00)\sqrt{2{\cdot}4341} = £15{\cdot}60$$

٤–١٩ الجدول ٤–٧ يبين نسبة الذكاء I.Q لـ 480 تلميذ فى مدرسة ابتدائية . أوجد (ا) الوسط الحسابى (ب)الانحراف المعيارى باستخدام طريقة الترميز .

جدول ٤–٧

Class mark X	70	74	78	82	86	90	94	98	102	106	110	114	118	122	126
Frequency f	4	9	16	28	45	66	85	72	54	38	27	18	11	5	2

الحـــل

نسبة الذكاء $(I.Q.) = \frac{\text{العمر العقلى}}{\text{العمر الزمنى}}$ ، معبر عنه كنسبة مئوية .

على سبيل المثال فإن طفلا عمره 8 سنوات والذى طبقا لأسلوب تعليمى معين له عقلية تكافئ طفلا عمره 10 سنوات له نسبة ذكاء $I.Q. = 10/8 = 1.25 = 125\%$ أو ببساطة 125 ويكون مفهوما أنها نسبة مئوية .

للحصول على المتوسط والانحراف المعيارى لنسب الذكاء فإن الحل يمكن أن يرتب كما فى الجدول ٤–٨ .

جدول ٤–٨

	X	u	f	fu	fu^2
	70	−6	4	−24	144
	74	−5	9	−45	225
	78	−4	16	−64	256
	82	−3	28	−84	252
	86	−2	45	−90	180
	90	−1	66	−66	66
$A \rightarrow$	94	0	85	0	0
	98	1	72	72	72
	102	2	54	108	216
	106	3	38	114	342
	110	4	27	108	432
	114	5	18	90	450
	118	6	11	66	396
	122	7	5	35	245
	126	8	2	16	128
			$N = \Sigma f = 480$	$\Sigma fu = 236$	$\Sigma fu^2 = 3404$

(ا) $$\bar{X} = A + c\bar{u} = A + c\frac{\Sigma fu}{N} = 94 + 4\left(\frac{236}{480}\right) = 95{\cdot}97$$

(ب) $$s = c\sqrt{\overline{u^2} - \bar{u}^2} = c\sqrt{\frac{\Sigma fu^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fu}{N}\right)^2} = 4\sqrt{\frac{3404}{480} - \left(\frac{236}{480}\right)^2} = 4\sqrt{6{\cdot}8499} = 10{\cdot}47.$$

طريقة شارلير للمراجعة :

٤–٢٠ استخدم طريقة شارلير المراجعة لإثبات صحة حساب (ا) الوسط (ب) الانحراف المعيارى الذين تم حسابهما فى المسألة ٤–١٩ .

وللحصول على المراجعة المطلوبة ، فإننا نضيف أعمدة الجدول ٤–٩ إلى أعمدة الجدول ٤–٨ فيما عدا العمود الثانى حيث كرر هنا للتسهيل .

الحـــل :

(ا) من الجدول ٤–٩ أدناه $\Sigma f(u + 1) = 716$.

من الجدول ٤–٨ السابق $\Sigma fu + N = 236 + 480 = 716$.

وهذا يعطى المراجعة المطلوبة على الوسط .

(ب) من الجدول ٤–٩ أدناه $\Sigma f(u+1)^2 = 4356$.

من الجدول ٤–٨ السابق $\Sigma fu^2 + 2\Sigma fu + N = 3404 + 2(236) + 480 = 4356.$

وهذا يعطى المراجعة المطلوبة على الانحراف المعيارى .

جدول ٤–٩

$u+1$	f	$f(u+1)$	$f(u+1)^2$
−5	4	−20	100
−4	9	−36	144
−3	16	−48	144
−2	28	−56	112
−1	45	−45	45
0	66	0	0
1	85	85	85
2	72	144	288
3	54	162	486
4	38	152	608
5	27	135	675
6	18	108	648
7	11	77	539
8	5	40	320
9	2	18	162
	$N = \Sigma f = 480$	$\Sigma f(u+1) = 716$	$\Sigma f(u+1)^2 = 4356$

معامل تصحيح شبرد للتباين :

٤–٢١ طبق تصحيح شبرد لحصول على الانحراف المعيارى للبيانات فى (ا) المسألة ٤ – ١٧ (ب) المسألة ٤ – ١٨ (ﺣ) المسألة ٤–١٩

الحـل

(ا) $s^2 = 8{\cdot}5275, c = 3$. التباين المصحح $= s^2 - c^2/12 = 8{\cdot}5275 - 3^2/12 = 7{\cdot}7775$

الانحراف المعيارى المصحح $= \sqrt{\text{التباين المصحح}} = \sqrt{7{\cdot}7775} = 2{\cdot}79$ kg

(ب) $s^2 = 243{\cdot}41, c = 10$. التباين المصحح $= s^2 - c^2/12 = 243{\cdot}41 - 10^2/12 = 235{\cdot}08$

الانحراف المعيارى المصحح $= \sqrt{235{\cdot}08} = £15{\cdot}33$

(ﺣ) $s^2 = 109{\cdot}60, c = 4$. التباين المصحح $= s^2 - c^2/12 = 109{\cdot}60 - 4^2/12 = 108{\cdot}27$

الانحراف المعيارى المصحح $\sqrt{108{\cdot}27} = 10{\cdot}41$.

٤–٢٢ للتوزيع التكرارى الثانى بالمسألة ٢–٨ ، الفصل الثانى ، صفحة ٥٧ . أوجد (ا) الوسط (ب) الانحراف المعيارى (ﺣ) الانحراف المعيارى مستخدما تصحيح شبرد (د) الانحراف المعيارى الفعلى من البيانات الخام .

الحـل

الحل موضح بالجدول :

الجدول ٤–١٠

X	u	f	fu	fu^2
122	−3	3	−9	27
131	−2	5	−10	20
140	−1	9	−9	9
$A \rightarrow$ 149	0	12	0	0
158	1	5	5	5
167	2	4	8	16
176	3	2	6	18
		$N = \Sigma f = 40$	$\Sigma fu = -9$	$\Sigma fu^2 = 95$

(١) $$\bar{X} = A + c\bar{u} = A + c\frac{\Sigma fu}{N} = 149 + 9\left(\frac{-9}{40}\right) = 147.0 \text{ mm}$$

(ب) $$s = c\sqrt{\overline{u^2} - \bar{u}^2} = c\sqrt{\frac{\Sigma fu^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fu}{N}\right)^2} = 9\sqrt{\frac{95}{40} - \left(\frac{-9}{40}\right)^2} = 9\sqrt{2.324375} = 13.7 \text{ mm}$$

(جـ) التباين المصحح = $s^2 - c^2/12 = 188.27 - 9^2/12 = 181.52$.

الانحراف المعيارى المصحح = 13.5 mm .

(د) لحساب الانحراف المعيارى من الأطوال الفعلية للأوراق المعطاة فى المسألة ، قد يكون من الأنسب طرح رقم مناسب ، وليكن $A = 150$ mm من كل الأطوال ثم نستخدم طريقة المسألة ٤ – ١٥ . الانحرافات $d = X - A = X - 150$ معطاة فى الجدول التالى .

−12	14	0	−18	−6	−25	−1	7
−4	8	−10	−3	−14	−2	2	−6
18	−24	−12	26	13	−31	4	15
−4	23	−8	−3	−15	3	−10	−15
11	−5	−15	−8	0	6	−5	−22

ومنها نجد أن $\Sigma d^2 = 7052$ ، $\Sigma d = -128$. إذن

$$s = \sqrt{\overline{d^2} - \bar{d}^2} = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{N} - \left(\frac{\Sigma d}{N}\right)^2} = \sqrt{\frac{7052}{40} - \left(\frac{-128}{40}\right)^2} = \sqrt{166.06} = 12.9 \text{ mm}$$

بهذا فإن تصحيح شبرد نتج عنه بعض التحسين فى هذه الحالة .

علاقة اعتبارية بين مقاييس التشتت :

٤–٢٣ ناقش مدى صلاحية العلاقات الاعتبارية

(١) الانحراف المتوسط = $4/5$ (الانحراف المعيارى)

(ب) نصف المدى الربيعى = $2/3$ (الانحراف المعيارى)

وذلك فى توزيع أوزان الطلبة فى جامعة XYZ

الحــل :

(أ) من المسائل ٤-٤ ، ٤-١١ ، $\dfrac{\text{الانحراف المتوسط}}{\text{الانحراف المعيارى}} = \dfrac{2.26}{2.92} = 0.77$ وهو قريب من $\frac{4}{5}$

(ب) من المسائل ٤-٦ ، ٤-١١ ، $\dfrac{\text{نصف المدى الربيعى}}{\text{الانحراف المعيارى}} = \dfrac{1.98}{2.92} = 0.68$ وهو قريب من $\frac{2}{3}$.

وبهذا فإن العلاقة الاعتبارية صالحة فى هذه الحالة .

ملحوظة : لم نقم باستخدام تصحيح شبرد للانحراف المعيارى للبيانات المجمعة فى الحل أعلاه نظرا لعدم استخدام تصحيح مقابل للانحراف المتوسط أو نصف المدى الربيعى .

خصائص الانحراف المعيارى :

٤-٢٤ حدد النسبة المئوية لنسبة ذكاء « I.Q. » الطلبة فى المسألة ٤-١٩ والتى تقع داخل المدى :

(أ) $\bar{X} \pm s$ (ب) $\bar{X} \pm 2s$ (جـ) $\bar{X} \pm 3s$.

الحــل :

(أ) $\bar{X} \pm s = 95.97 \pm 10.47$ هو مدى نسبة الذكاء I.Q من 85.5 إلى 106.4 .

عدد الطلبة الذين تقع نسبة ذكائهم .I.Q فى المدى $(\bar{X} \pm s)$

$$\left(\frac{88-85\cdot5}{4}\right)(45)+66+85+72+54+\left(\frac{106\cdot4-104}{4}\right)(38)=339$$

النسبة المئوية لنسبة الذكاء .I.Q فى المدى $\bar{X} \pm s = 339/480 = 70.6\%$.

(ب) $\bar{X} \pm 2s = 95.97 \pm 2(10.47)$ هو مدى نسبة الذكاء .I.Q من 75.0 إلى 116.9 .

عدد الطلبة الذين تقع نسبة ذكائهم .I.Q فى المدى $\bar{X} \pm 2s$ هو

$$\left(\frac{76-75\cdot0}{4}\right)(9)+16+28+45+66+85+72+54+38+27+18+\left(\frac{116\cdot9-116}{4}\right)(11)=451$$

النسبة المئوية لنسبة الذكاء .I.Q فى المدى $\bar{X} \pm 2s = 451/480 = 94.0\%$

(جـ) $\bar{X} \pm 3s = 95.97 \pm 3(10.47)$ هو مدى نسبة الذكاء .I.Q من 64.6 إلى 127.4

عدد الطلبة الذين تقع نسبة ذكائهم .I.Q فى المدى $\bar{X} \pm 3s$ هو

$$= 480 - \left(\frac{128-127\cdot4}{4}\right)(2) = 479\cdot7, \text{ or } 480$$

النسبة المئوية لنسبة الذكاء .I.Q فى المدى $\bar{X} \pm 3s$ هو : $479.7/480 = 99.9\%$ أو من الناحية "العملية 100%" .

النسب المئوية فى (ا) ، (ب) ، (حـ) تتفق بشكل مناسب مع ما يتوقع من التوزيع الطبيعى ، بمعنى 99.73% ، 95.45% ، 68.27% على الترتيب .

لاحظ أننا لم نستخدم تصحيح شبرد للانحراف المعيارى . ولو أستخدم فى هذه الحالة فإن النتائج ستكون أكثر قربا للنسب السابقة . لاحظ أيضا أن النتائج أعلاه يمكن الحصول عليها باستخدام جدول المسألة ٤–٣٢ .

٤–٢٥ أوجد لمجموعات الأرقام 14 ,8 ,2 و 14 ,11 ,8 ,5 ,2 ما يلى :

(ا) الوسط لكل مجموعة (ب) التباين لكل مجموعة (ج) وسط المجموعة المكونة من دمج المجموعتين .
(د) تباين المجموعة المكونة من دمج المجموعتين معا .

الحـــل :

(ا) وسط المجموعة الأولى $8 = \frac{1}{5}(2+5+8+11+14) =$ وسط المجموعة الثانية $8 = \frac{1}{3}(2+8+14)$

(ب) تباين المجموعـــة الأولى $18 = \frac{1}{5}[(2-8)^2+(5-8)^2+(8-8)^2+(11-8)^2+(14-8)^2] = s_1^2 =$

تباين المجموعـة الثانية $24 = \frac{1}{3}[(2-8)^2+(8-8)^2-(14-8)^2] = s_2^2 =$

(ج) وسط المجموعات المندمجة $8 = \frac{2+5+8+11+14+2+8+14}{5+3} =$

(د) تباين المجموعات المندمجة

$$s^2 = \frac{(2-8)^2+(5-8)^2+(8-8)^2+(11-8)^2+(14-8)^2+(2-8)^2+(8-8)^2+(14-8)^2}{5+3} = 20.25$$

طريقة أخرى ، بالصيغة

تباين المجموعات المندمجة $= \quad s^2 = \frac{N_1 s_1^2 + N_2 s_2^2}{N_1+N_2} = \frac{(5)(18)+(3)(24)}{5+3} = 20.25$

٤–٢٦ حل المسألة السابقة لمجموعات الأرقام 22 ,16 ,10 و 14 ,11 ,8 ,5 ,2 .

الحـــل

هنا وسط المجموعتين هو 8 و 16 على الترتيب ، بينما تباينهما هـــو نفسه تباين المجموعات فى المسألة السابقة

أى $s_1^2 = 18$ و $s_2^2 = 24.$

وسط المجموعات المندمجـــة $= \quad 11 = \frac{2+5+8+11+14+10+16+22}{5+3}$

تباين المجموعات المندمجـــة

$$\frac{(2-11)^2+(5-11)^2+(8-11)^2+(11-11)^2+(14-11)^2+(10-11)^2+(16-11)^2+(22-11)^2}{5+3} = 35.25$$

لاحظ أن الصيغة $s^2 = \frac{N_1 s_1^2 + N_2 s_2^2}{N_1+N_2}$ والتى تعطى 20.25 غير صالحة للتطبيق فى هذه الحالة حيث أن الوسط الحسابى غير متساو فى المجموعتين .

٤-٢٧ (أ) أثبت أن $w^2 + pw + q$ حيث q ، p ثوابت معطاة ، نهاية صغرى عندما وعندما فقط $w = -\frac{1}{2}p$

(ب) باستخدام (أ) أثبت أن $\frac{\sum_{j=1}^{N}(X_j - a)^2}{N}$ أو باختصار $\frac{\Sigma(X-a)^2}{N}$ نهاية صغرى عندما وعندما فقط

الحـل :

(أ) المقـدار $w^2 + pw + q = (w + \frac{1}{2}p)^2 + q - \frac{1}{4}p^2$. وبما أن $(q + \frac{1}{4}p^2)$ ثابت ، فإن المقدار يكون أصغر ما يمكن (بمعنى أنه نهاية صغرى) عندما وعندما فقط $w + \frac{1}{2}p = 0$ أى $w = -\frac{1}{2}p$.

(ب) $$\frac{\Sigma(X-a)^2}{N} = \frac{\Sigma(X^2 - 2aX + a^2)}{N} = \frac{\Sigma X^2 - 2a\Sigma X + Na^2}{N} = a^2 - 2a\frac{\Sigma X}{N} + \frac{\Sigma X^2}{N}$$

بمقارنة هذا المقدار بـ $w^2 + pw + q$ نجد أن $w = a, p = -2\frac{\Sigma X}{N}, q = \frac{\Sigma X^2}{N}$

وبهذا فإن المقدار نهاية صغرى عندما $a = -\frac{1}{2}p = (\Sigma X)/N = \bar{X}$. باستخدام النتيجه

التشتت المطلق والتشتت النسبى . معامل الاختلاف :

٤-٢٨ مصنع لإنتاج لمبات التلفزيون ينتج نوعين منها A ، B والعمر الانتاجى لهما بالساعة هو $\bar{X}_B = 1875$ و $\bar{X}_A = 1495$. وانحرافهما المعيارى بالساعة $s_B = 310$ و $s_A = 280$. ما هو النوع الذى له أكبر

(أ) تشتت مطلق (ب) تشتت نسبى

الحـل :

(أ) التشتت المطلق لـ $A = s_A = 280$ h. .

التشتت المطلق لـ $B = s_B = 310$ h. .

اللمبات B لها أكبر تشتت مطلق .

(ب) معامل اختلاف $A = \frac{s_A}{\bar{X}_A} = \frac{280}{1495} = 18{\cdot}7\%$ معامل اختلاف $B = \frac{s_B}{\bar{X}_B} = \frac{310}{1875} = 16{\cdot}5\%$

وبهذا فإن اللمبات A لها أكبر تغير أو تشتت نسبى .

٤-٢٩ أوجد معاملات الاختلاف V للبيانات فى (أ) المسألة ٤ - ١٤ (ب) المسألة ٤ - ١٨ ، باستخدام الانحراف المعيارى المصحح وغير المصحح .

الحـل :

(أ) $$V\,(\text{غير مصحح}) = \frac{s\,(\text{غير مصحح})}{\bar{X}} = \frac{2{\cdot}92}{67{\cdot}45} = 0{\cdot}0433 = 4{\cdot}3\%$$

من المسألة ٤-٢١ (أ) $$V\,(\text{مصحح}) = \frac{s\,(\text{مصحح})}{\bar{X}} = \frac{2{\cdot}79}{67{\cdot}45} = 0{\cdot}0413 = 4{\cdot}1\%$$

(ب) $V\ (\text{غير مصحح}) = \dfrac{s\ (\text{غير مصحح})}{\bar{X}} = \dfrac{15{\cdot}60}{79{\cdot}77} = 0{\cdot}196 = 19{\cdot}6\%$

من المسألة ٤-٢١ (ب) $V\ (\text{مصحح}) = \dfrac{s\ (\text{مصحح})}{\bar{X}} = \dfrac{15{\cdot}33}{79{\cdot}77} = 0{\cdot}192 = 19{\cdot}2\%$.

٤-٣٠ (أ) عرف مقياسا للتشتت النسبى يمكن استخدامه لمجموعة من البيانات معلوم ربيعاتها .

(ب) بين الحسابات اللازمة لحصول على القياس المعرف فى (أ) باستخدام بيانات المسألة ٤-٦ .

الحـــل :

(أ) إذاكانت Q_1 و Q_3 معطاة لمجموعة من البيانات فإن $\frac{1}{2}(Q_1 + Q_3)$ يعد مقياسا للنزعة المركزية أو متوسطات لهذه البيانات بينما $Q = \frac{1}{2}(Q_3 - Q_1)$ نصف المدى الربيعى يعد مقياسا للتشتت لهذه البيانات .

وبهذا يمكن تعريف مقياس للتشتت النسبى كالآتى :

$$V_Q = \frac{\frac{1}{2}(Q_3 - Q_1)}{\frac{1}{2}(Q_1 + Q_3)} = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$$

والذى يمكن تسميته بالمعامل الربيعى للاختلاف أو المعامل الربيعى للتشتت النسبى

(ب) $$V_Q = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} = \frac{69{\cdot}61 - 65{\cdot}64}{69{\cdot}61 + 65{\cdot}64} = \frac{3{\cdot}97}{135{\cdot}25} = 0{\cdot}0293 = 2{\cdot}9\%$$

المتغيرات المعيارية والدرجات المعيارية :

٤-٣١ حصل طالب على الدرجة 84 فى الامتحان النهائى للرياضة حيث كان متوسط الدرجات 76 وانحرافها المعيارى 10 . فى الامتحان النهائى للطبيعة حيث كان متوسط الدرجات 82 وانحرافها المعيارى 16 ، حصل الطالب على الدرجة 90. فى أى الموضوعات كان درجة استيعابه أعلى ؟

الحـــل :

المتغير المعيارى $z = (X - \bar{X})/s$ يقيس انحرافات X عن الوسط $\bar{X}$ معبراً عنها بالانحراف المعيارى s .

فى الرياضة ، $z = (84 - 76)/10 = 0.8$. فى الطبيعة $z = (90 - 82)/16 = 0.5$.

وبهذا كانت رتبة الطالب 0.8 من الدرجة المعيارية أعلى من الوسط فى الرياضة بينما كانت 0.5 فقط من الدرجة المعيارية أعلى من الوسط فى الطبيعة . وبهذا فإن استيعابه النسبى كان أعلى فى الرياضة .

المتغير $z = (X - \bar{X})/s$ يستخدم غالباً فى الاختبارات التربوية حيث يعرف بالدرجات المعيارية .

٤-٣٢ (أ) حول نسب الذكاء .I.Q فى المسألة ٤ - ١٩ إلى درجات معيارية .

(ب) عبر بالرسم البيانى عن التكرار النسبى مقابل الدرجات المعيارية .

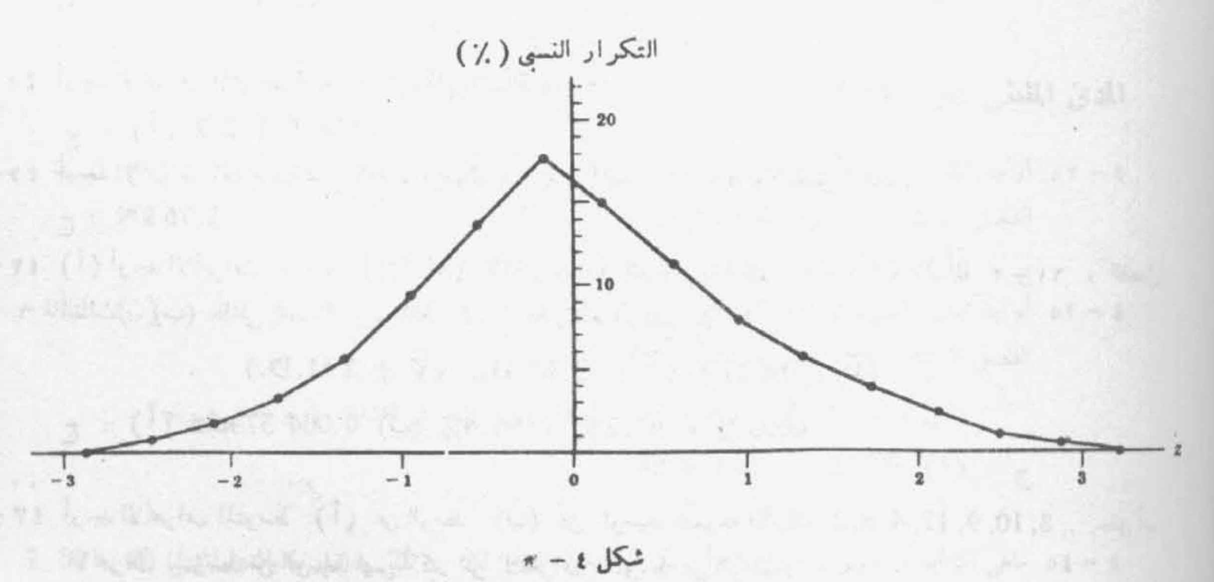
الحـــل :

(أ) خطوات العمل فى التحويل إلى درجات معيارية يمكن ترتيبها كما فى الجدول ٤ – ١١. فى هذا الجدول أضفنا مركزى الفئة 66 و 130 واللذان تكراراتهما صفر وذلك لاستخدامها فى حل (ب) . كذلك لم يستخدم تصحيح شبرد للانحراف المعيارى . الدرجات المعدلة فى هذه الحالة من الناحية العملية هى نفسها المعطاة هنا إلى درجة الدقة الموضحة .

الجدول ٤ ١١ $\bar{X} = 96.0$ ، $s = 10.5$

I.Q. (X)	$X - \bar{X}$	$z = \frac{X - \bar{X}}{s}$	التكرار f	التكرار النسبى $f/N(\%)$
66	−30·0	−2·86	0	0·0
70	−26·0	−2·48	4	0·8
74	−22·0	−2·10	9	1·9
78	−18·0	−1·71	16	3·3
82	−14·0	−1·33	28	5·8
86	−10·0	−0·95	45	9·4
90	−6·0	−0·57	66	13·8
94	−2·0	−0·19	85	17·7
98	2·0	0·19	72	15·0
102	6·0	0·57	54	11·2
106	10·0	0·95	38	7·9
110	14·0	1·33	27	5·6
114	18·0	1·71	18	3·8
118	22·0	2·10	11	2·3
122	26·0	2·48	5	1·0
126	30·0	2·86	2	0·4
130	34·0	3·24	0	0·0
			480	100%

(ب) الشكل البيـــانى للتكرار النسبى مقابل الدرجات المعيارية z (المضلع التكرارى النسبى) المحور الأفقى مقاس بدلالة الانحراف المعيارى s كوحدة . لاحظ أن التوزيع معتدل فى عدم تماثله وهو ملتو التواءاً بسيطاً إلى اليمين .



شكل ٤ – ٣

مسائل اضافية

المـدى :

٤ – ٣٣ أوجد مدى كل من مجموعات الأرقام :

(أ) 5, 3, 8, 4, 7, 6, 12, 4, 3 (ب) 8.772, 6.453, 10.624, 8.628, 9.434, 6.351 .

ج : (أ) 9 (ب) 4.273

٤ – ٣٤ أوجد مدى الحمل الأعظم المعطى بالجدول ٣ – ٨ فى المسألة ٣ – ٢٩ ، الفصل الثالث . ج : 40 kN

٤ – ٣٥ أوجد مدى أقطار مسامير البرشام بالجدول ٣ – ١٠ فى المسألة ٣ – ٦١ الفصل الثالث . ج : 0.036 mm

٤ – ٣٦ أكبر قيمة فى 50 قياساً هو 8.34 kg . إذا كان المدى 0.46 kg أوجد أقل قيمة فى القياسات .

ج : 7.88 kg

٤ – ٣٧ أوجد مدى البيانات فى (أ) المسألة ٣ – ٦٢ ، الفصل الثالث . (ب) المسألة ٣ – ٧٣ ، الفصل الثـالث (جـ) المسألة ٢ – ٢٠ ، الفصل الثانى . ج : (أ) 35 (ب) غير محدد (ت) 900 hr

الانحراف المتوسط :

٤ – ٣٨ أوجد القيم المطلقة لـ (أ) 18.2 — (ب) 3.58 + (جـ) 6.21 (د) 0 (هـ) $-\sqrt{2}$ (و) 4.00 — 2.36 — 3.52

ج : (أ) 18.2 (ب) 3.58 (جـ) 6.21 (د) 0 (هـ) بالتقريب $\sqrt{2} = 1.414$ (و) 1.88

٤ – ٣٩ أوجد الانحراف المتوسط لمجموعات الأرقام : (أ) 3, 7, 9, 5 (ب) 2.4, 1.6, 3.8, 4.1, 3.4 .

ج : (أ) 2 (ب) 0.85

٤ – ٤٠ أوجد الانحراف المتوسط لمجموعات الأرقام بالمسألة ٤ – ٣٣ .

ج : (أ) 2.2 (ب) 1.317

٤ – ٤١ أوجد الانحراف المتوسط لحمل الأعظم بالجدول ٣ – ٨ فى المسألة ٣ – ٥٩ ، الفصل الثالث .

ج : 5.76 kN

٤ – ٤٢ (أ) أوجد الانحراف المتوسط (M.D.) لأقطار مسامير البرشام بالجدول ٣ – ١٠ فى المسألة ٣ – ٦١ ، الفصل الثالث . (ب) ما هى النسبة المئوية لأقطار مسامير البرشام التى تقع بين

$$(\bar{X} \pm \text{M.D.}), (\bar{X} \pm 2\ \text{M.D.}), (\bar{X} \pm 3\,\text{M.D.})$$

ج : (أ) 0.004 37 mm (ب) 96.4% ، 85.2% ، 60.0%

٤ – ٤٣ أوجد الانحراف المتوسط (أ) عن الوسط (ب) عن الوسيط لمجموعة الأرقام 8, 10, 9, 12, 4, 8, 2 . حقق أن الانحراف المتوسط عن الوسيط ليس أكبر من الانحراف المتوسط عن الوسط .

ج : (أ) 3.0 (ب) 2.8

٤ - ٤٤ أوجد الانحراف المتوسط (أ) حول المتوسط (ب) حول الوسيط ، التوزيع بالمسألة ٣ - ٦٠ ، الفصل ثالث . استخدم نتيجة هذه المسألة و كذلك المسألة ٣ - ٧٠ ، الفصل الثالث.

ج : (أ) 31.2 (ب) 30.6

٤ - ٤٥ أوجد الانحراف المتوسط (أ) حول المتوسط (ب) حول الوسيط ، للتوزيع بالمسألة ٣ - ٦٢ ، الفصل الثالث. استخدم نتيجة هذه المسألة و كذلك المسألة ٣ - ٧٢ ، الفصل الثالث .

ج : (أ) 6.0 (ب) 6.0

٤ - ٤٦ وضح لماذا يكون الانحراف المتوسط مقياساً ملائماً أو غير ملائم للتباين لتوزيع المسألة ٣ - ٧٣ ، الفصل الثالث .

٤ - ٤٧ أوجد صيغة للترميز لحساب الانحراف المتوسط (أ) حول الوسط (ب) حول الوسيط ، من توزيع تكرارى طبق هذه الصيغة للتحقق من النتائج فى المسائل ٤ - ٤٤ ، ٤ - ٤٥ .

نصف المدى الربيعى أو الانحراف الربيعى :

٤ - ٤٨ أوجد نصف المدى الربيعى للتوزيعات فى (أ) المسألة ٤ - ٥٩ ، الفصل الثالث . (ب) المسألة ٣ - ١٠٧ ، الفصل الثالث . فسر بوضوح النتائج فى كل حالة .

ج : (أ) 5.1 kN (ب) 27.0 (جـ) 12

٤ - ٤٩ أوجد نصف المدى الربيعى للتوزيعات فى (أ) المسألة ٢ - ٣١ ، الفصل الثانى (ب) المسألة ٣ - ٧٣ ، الفصل الثالث ، فسر بوضوح النتائج فى كل حالة . وضح مزايا نصف المدى الربيعى لمثل هذا النوع من التوزيعات على غيره من مقاييس التشتت .

ج : (أ) $1801 (ب) 10.8 سنة

٤ - ٥٠ وضح أنه بالنسبة لأى توزيع تكرارى فإن إجمالى نسبة الحالات التى تقع فى الفترة $\frac{1}{2}(Q_1+Q_3)\pm\frac{1}{2}(Q_3-Q_1)$ هى 50% . هل هذا أيضاً صحيح للفترة $(Q_2 \pm \frac{1}{2}(Q_3 - Q_1))$ ؟ إشرح إجابتك .

٤ - ٥١ (أ) وضح كيف يمكن التعبير بيانياً عن نصف المدى الربيعى المقابل لتوزيع تكرارى معين ؟

(ب) ماهى العلاقة بين نصف المدى الربيعى والتكرار المتجمع النسبى للتوزيع ؟

المدى المئينى 90 — 10 :

٤ - ٥٢ أوجد المدى المئينى 90 — 10 لتوزيعات (أ) المسألة ٣ - ٥٩ . الفصل الثالث . (ب) المسألة ٣ - ١٠٧ ، الفصل الثالث . فسر بوضوح النتائج فى كل حالة

ج : (أ) 16.3 kN (ب) 33.6 or 34

٤ - ٥٣ أوجد المدى المئينى 90 — 10 لتوزيعات (أ) المسألة ٢ - ٣١ ، الفصل الثانى ، (ب) المسألة ٣ - ٧٣ ، الفصل الثالث . فسر بوضوح النتائج فى كل حالة .

ماهى مزايا المدى المئينى 90 — 10 على المقاييس الأخرى للتشتت ؟ وما هى عيوبه ؟

ج : (أ) $7402 (ب) 40.8

٤ - ٥٤ ماهى المزايا أو العيوب التى يمكن أن تكون للمدى المئينى 80 — 20 بالمقارنة بالمدى المئينى 90 — 10 ؟

٤ – ٦٥ ماهى التعديلات التى تحدث بالمسألة ٤ – ٦٣ عندما نطبق تصحيح شبرد ؟

ج : (أ) 0.00569 mm (ب) 71.6%, 93.0%, 99.68%

٤ – ٦٦ (أ) أوجد الوسط والانحراف المعيارى لبيانات المسألة ٢ – ٨ ، الفصل الثانى .
(ب) كون توزيعاً تكرارياً للبيانات وأوجد الانحراف المعيارى .
(جـ) قارن النتائج فى (ب) بتلك التى فى (أ) . حدد ما إذا كان تطبيق تصحيح شبرد يؤدى إلى نتائج أحسن .

ج : (أ) 12.9 mm ، 146.8 mm

٤ – ٦٧ حل المسألة ٤ – ٦٦ باستخدام بيانات المسألة ٣ – ٢٧ ، الفصل الثانى .

ج : (أ) 0.0495 mm ، 7.349 mm

٤ – ٦٨ (أ) من مجموع N رقم ، الكسر p أرقام واحد والكسر $q = 1 - p$ أصفار . أثبت أن الانحراف المعيارى لمجموعة الأرقام هو $\sqrt{pq}$. . (ب) طبق نتيجة (أ) على المسألة ٤ – ٥٦ (جـ) .

٤ – ٦٩ (أ) أثبت أن تباين مجموعة مكونة من n رقم $a, a + d, a + 2d, \ldots, a + (n-1)d$ (متوالية عددية حدها الأول a والفرق المشترك d) معطى بالصيغة $^1/_{12}(n^2 - 1)d^2$ (ب) استخدم (أ) فى المسألة ٤ – ٥٨
ملحوظة : استخدم

$$1 + 2 + 3 \ldots + (n-1) = \tfrac{1}{2}n(n-1),\ 1^2 + 2^2 + 3^2 \ \ldots + (n-1)^2 = {}^1/_6\, n(n-1)(2n-1)$$

٤ – ٧٠ عمم واثبت الخاصية ٣ بالصفحة ١١٦

علاقة اعتبارية بين مقاييس التشتت :

٤ – ٧١ بمقارنة الانحراف المعيارى الذى حصلت عليه فى المسألة ٤ – ٥٩ بالانحراف المتوسط فى المسائل ٤ – ٤١ ، ٤ – ٤٢ ، ٤ – ٤٤ ، حدد مدى تحقق العلاقة الاعتبارية :

الانحراف المتوسط = $^4/_5$ (الانحراف المعيارى) . ناقش أية اختلافات يمكن حدوثها .

٤ – ٧٢ بمقارنة الانحراف المعيارى الذى حصلت عليه فى المسألة ٤ – ٥٩ بنصف المدى الربيعى فى المسألة ٤ – ٤٨ ، حدد مدى تحقق العلاقة الاعتبارية :

نصف المدى الربيعى = $^2/_3$ (الانحراف المعيارى) . ناقش أية اختلافات يمكن حدوثها .

٤ – ٧٣ ماهى العلاقة الاعتبارية والتى يمكنك توقع وجودها بين نصف المدى الربيعى والانحراف المتوسط للتوزيع ذى الشكل الناقوسى المعتدل الالتواء ؟

ج : نصف المدى الربيعى = $^5/_6$ (الانحراف المتوسط)

٤ – ٧٤ فى توزيع تكرارى يمكن تقريبه بالتوزيع الطبيعى كان نصف المدى الربيعى 10 ماهى القيمة التى تتوقعها لـ (أ) الانحراف المعيارى (ب) الانحراف المتوسط

ج : (أ) 15 (ب) 12

التشتت المطلق والتشتت النسبى . معامل الاختلاف :

٤ – ٧٥ فى الامتحان النهائى فى الاحصاء كان متوسط الدرجات لمجموعة من 150 طالباً هو 78 وانحرافها المعيارى 8.0 وفى الجبر كان متوسط الدرجات للمجموعة هو 73 وانحرافها المعيارى 7.6 . فى أى الموضوعات كان هناك أكبر .
(أ) تشتت مطلق (ب) تشتت نسبى ج : (أ) الاحصاء (ب) الجبر

٤ – ٧٦ أوجد معامل الاختلاف لبيانات (أ) المسألة ٣ – ٥٩ ، الفصل الثالث (ب) المسألة ٣ – ١٠٧ ، الفصل الثالث .
ج : (أ) 6.6% (ب) 19.0%

٤ – ٧٧ (أ) ما السبب فى عدم امكانية حساب معامل الاختلاف لتوزيع المسألة ٢ – ٣١ ، الفصل الثانى ؟
(ب) احسب المعامل الربيعى للتشتت النسبى لهذا التوزيع (أنظر المسألة ٣ – ١٠٨ (ج) بالفصل الثالث وكذلك المسألة ٤ – ٣٠) .
ج : 51.9%

٤ – ٧٨ (أ) أوجد مقياس التشتت النسبى الذى يستخدم نصف المدى الربيعى .
(ب) وضح كيفية حساب هذا المقياس باستخدام بيانات المسألة ٣ – ٧٣ ، الفصل الثالث .

المتغيرات المعيارية والدرجات المعيارية :

٤ – ٧٩ فى الامتحانات المشار إليها فى المسألة ٤ – ٧٥ ، حصل طالب على الدرجة 75 فى الاحصاء و 71 فى الجبر فى أى امتحان يعد مستوى استيعابه أعلى ؟
ج : الجبر

٤ – ٨٠ حول مجموعة الأرقام 5 ,7 ,8 ,2 ,6 إلى درجات معيارية .
ج : 0.19, — 1.75, 1.17, 0.68, — 0.29

٤ – ٨١ أثبت أن متوسط مجموعة من الدرجات المعيارية هو صفر وانحرافها المعيارى هو واحد . وضح ذلك باستخدام المسألة ٤ – ٨٠ .

٤ – ٨٢ (أ) حول الدرجات فى المسألة ٣ – ١٠٧ ، الفصل الثالث إلى درجات معيارية .
(ب) كون شكلا بيانياً للتكرار النسبى مقابل الدرجات المعيارية .

الفصل الخامس

العزوم ، الالتواء ، والتفرطح

العــزوم :

إذا كانت $X_1, X_2, \ldots, X_N$ تمثل N قيمة يمكن أن يأخذها المتغير X ، فإننا نعرف الكمية

$$\overline{X^r} = \frac{X_1^r + X_2^r + \ldots + X_N^r}{N} = \frac{\sum_{j=1}^{N} X_j^r}{N} = \frac{\Sigma X^r}{N} \qquad (١)$$

وتسمى بالعزم الرائى . العزم الأول حيث $r = 1$ هو الوسط الحسابى $\bar{X}$

العزم الأول حول الوسط الحسابى $\bar{X}$ يعرف كالآتى :

$$m_r = \frac{\sum_{j=1}^{N} (X_j - \bar{X})^r}{N} = \frac{\Sigma (X - \bar{X})^r}{N} = \overline{(X - \bar{X})^r} \qquad (٢)$$

إذا كانت $r = 1$ فإن $m_1 = 0$ (انظر المسألة ٣ – ١٦ ، الفصل الثالث) .

إذا كانت $r = 2$ فإن $m_2 = s^2$ التباين .

العزم الرائى حول أية نقطة أصل A يعرف كالآتى :

$$m_r' = \frac{\sum_{j=1}^{N} (X_j - A)^r}{N} = \frac{\Sigma (X - A)^r}{N} = \frac{\Sigma d^r}{N} = \overline{(X - A)^r} \qquad (٣)$$

حيث $d = X - A$ هى انحرافات X عن A . إذا كانت $A = 0$ فإن (٣) تؤول إلى (١) . ولهذا تسمى (١) فى أغلب الأحيان بالعزم الرائى حول الصفر .

العزوم للبيانات المجمعة :

إذا حدثت $X_1 , X_2 , \ldots , X_K$ بتكرارات $f_1 , f_2 , \ldots , f_K$ على الترتيب فإن العزوم السابقة تعرف كما يلي :

$$\overline{X^r} = \frac{f_1X_1^r + f_2X_2^r + \ldots + f_KX_K^r}{N} = \frac{\sum_{j=1}^{K} f_jX_j^r}{N} = \frac{\Sigma fX^r}{N} \quad (٤)$$

$$m_r = \frac{\sum_{j=1}^{K} f_j(X_j - \bar{X})^r}{N} = \frac{\Sigma f(X - \bar{X})^r}{N} = \overline{(X - \bar{X})^r} \quad (٥)$$

$$m_r' = \frac{\sum_{j=1}^{K} f_j(X_j - A)^r}{N} = \frac{\Sigma f(X - A)^r}{N} = \overline{(X - A)^r} \quad (٦)$$

حيث $N = \sum_{j=1}^{K} f_j = \Sigma f$ وهذه الصيغ ملائمة لحساب العزوم من البيانات المجمعة .

العلاقة بين العزوم :

تتحقق العلاقات التالية بين العزوم حول الوسط m_r والعزوم حول نقطة أصل اختيارية m_r'

$$\begin{cases} m_2 = m_2' - m_1'^2 \\ m_3 = m_3' - 3m_1'm_2' + 2m_1'^3 \\ m_4 = m_4' - 4m_1'm_3' + 6m_1'^2m_2' - 3m_1'^4 \end{cases} \quad (٧)$$

(أنظر المسألة ٥ - ع) لاحظ أن $m_1' = \bar{X} - A$.

حساب العزوم للبيانات المجمعة :

طريقة الترميز التي استخدمت في حساب الوسط والانحراف المعياري والمعطاة في الفصل السابق يمكن استخدامها كطريقة مختصرة لحساب العزوم . هذه الطريقة تستخدم الحقيقة أن $X_j = A + cu_j$ (أو باختصار $X = A + cu$) بحيث نحصل باستخدام المعادلة (٦) على

$$m_r' = c^r \frac{\Sigma fu^r}{N} = c^r\overline{u^r} \quad (٨)$$

والتي يمكن استخدامها للحصول على m_r بتطبيق المعادلة (٧) .

طريقة شارلير للمراجعة ومعامل شبرد للتصحيح :

تستخدم طريقة شارلير للمراجعة عند حساب العزوم بطريقة الترميز المتطابقات الآتية :

$$\begin{cases} \sum f(u+1) = \sum fu + N \\ \sum f(u+1)^2 = \sum fu^2 + 2\sum fu + N \\ \sum f(u+1)^3 = \sum fu^3 + 3\sum fu^2 + 3\sum fu + N \\ \sum f(u+1)^4 = \sum fu^4 + 4\sum fu^3 + 6\sum fu^2 + 4\sum fu + N \end{cases} \qquad (٩)$$

معامل تصحيح شبرد للعزوم (بتعميم الأفكار بصفحة ١١٦) هو كالآتى :

$$(\text{مصحح})\ m_2 = m_2 - \tfrac{1}{12}c^2.$$

$$(\text{مصحح})\ m_4 = m_4 - \tfrac{1}{2}c^2 m_2 + \tfrac{7}{240}c^4$$

العزمان m_3 ، m_1 لايحتاجان إلى تصحيح .

العزوم فى شكل غير مميز :

حتى نتلافى وحدات معينة فإنه يمكننا تعريف العزوم فى شكل غير مميز حول الوسط الحسابى

$$a_r = \frac{m_r}{s^r} = \frac{m_r}{(\sqrt{m_2})^r} = \frac{m_r}{\sqrt{m_2^r}} \qquad (١٠)$$

حيث $s = \sqrt{m^2}$ وهو الانحراف المعيارى . بما أن $m_1 = 0$ و $m_2 = s^2$ فإن $a_1 = 0$ و $a_2 = 1$.

الالتواء :

الالتواء هو درجة تماثل أو البعد عن التماثل لتوزيع . إذا كان المنحنى التكرارى لتوزيع (المدرج التكرارى الممهد) له « ذيل » أكبر إلى يمين مركز النهاية العظمى عنه إلى يسارها يسمى التوزيع بأنه ملتو إلى اليمين أو موجب الالتواء . أما إذا كان العكس صحيحاً فيقال أنه ملتو إلى اليسار أو سالب الالتواء .

فى التوزيعات الملتوية يقع الوسط على نفس جانب المنوال وذلك على نفس جانب الطرف الأطول (أنظر الأشكال ٣ – ١ ، ٣ – ٢ الفصل الثالث) . وكقياس للتماثل نأخذ الفرق (الوسط – المنوال) . وهذا المقياس يمكن تخليصه من الوحدات بقسمته على مقياس للتشتت ، مثل الانحراف المعيارى ، مما يؤدى إلى التعريف التالى :

$$\text{الالتواء} = \frac{\text{الوسط} - \text{المنوال}}{\text{الانحراف المعيارى}} = \frac{\bar{X} - \text{mode}}{s} \qquad (١١)$$

ولتحاشى استخدام المنوال ، من الممكن استخدام الصيغة الاعتبارية (١٠) صفحة ٤٨ ونعرف

$$\text{الالتـــواء} = \frac{3\ (\text{الوســط} - \text{الوسـيط})}{\text{الانحــراف المعيــارى}} = \frac{3(\bar{X} - \text{median})}{s} \qquad (١٢)$$

والمقياسان السابقان يسميان على الترتيب معامل بيرسون الأول للالتواء ومعامل بيرسون الثانى للالتواء .

وهناك مقاييس أخرى للالتواء معرفة بدلالة الربيعات والمئنيات وهى كالآتى :

$$\text{معامل الالتواء الربيعى} = \frac{(Q_3 - Q_2) - (Q_2 - Q_1)}{Q_3 - Q_1} = \frac{Q_3 - 2Q_2 + Q_1}{Q_3 - Q_1} \qquad (١٣)$$

$$\text{معامل الالتواء المئينى} = \frac{(P_{90} - P_{50}) - (P_{50} - P_{10})}{P_{90} - P_{10}} = \frac{P_{90} - 2P_{50} + P_{10}}{P_{90} - P_{10}} \qquad (١٤)$$

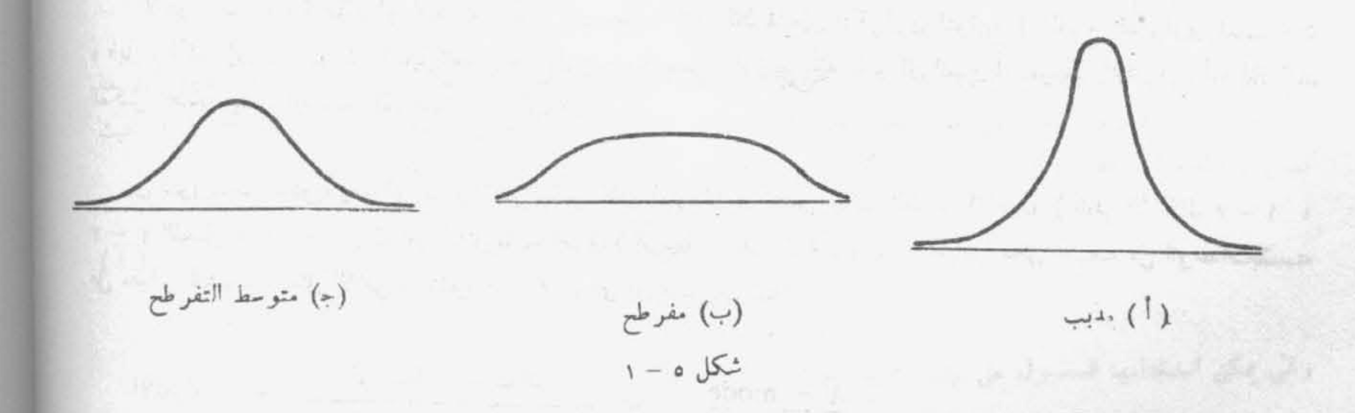
وهناك مقياس مهم آخر للالتواء باستخدام العزم الثالث حول الوسط الحسابى معبراً عنه بصيغة غير مميزة ويعرف كالآتى :

$$\text{معامل الالتواء باستخدام العزوم} = a_3 = \frac{m_3}{s^3} = \frac{m_3}{(\sqrt{m_2})^3} = \frac{m_3}{\sqrt{m_2^3}} \qquad (١٥)$$

طرق أخرى لقياس الالتواء تستخدم أحياناً a_3^2 ، b_1 وللمنحنيات تامة التماثل مثل المنحنى الطبيعى تكون كلا من b_1 ، a_3 يساوى الصفر

التفرطح :

التفرطح هو درجة تدبب قمة التوزيع ، ويؤخذ عادة بالقياس إلى التوزيع الطبيعى . التوزيع ذو القمة العالية نسبياً مثل المنحنى المعطى بالشكل ٥ - ١ (أ) يسمى منحنى مدبباً بينما المنحنى بالشكل ٥ - ١ (ب) حيث قمته مسطحة يسمى مفرطحاً التوزيع الطبيعى المعطى ٥ - ١ (جـ) حيث قمته ليست مدببة ولامفرطحة يسمى متوسط التفرطح



شكل ٥ - ١

أحد مقاييس التفرطح تستخدم العزم الرابع حول الوسط الحسابي على الصورة غير المميزة ويعرف بالآتي :

معامل التفرطح باستخدام العزوم = $a_4 = \frac{m_4}{s_4} = \frac{m_4}{m_2^2}$ (١٦)

والذي يرمز له غالباً بالرمز b_2 . وفي التوزيع الطبيعي $b_2 = a_4 = 3$. ولهذا السبب فإن التفرطح يعرف أحياناً بـ $(b_2 - 3)$ حيث يصير موجباً للتوزيع المدبب وسالباً للتوزيع المفرطح ، وصفراً للتوزيع الطبيعي .

يستخدم أيضاً مقياس آخر للتفرطح يعتمد على الربيعات والمئينات ويعطى :

$$\kappa = \frac{Q}{P_{90} - P_{10}} \qquad (١٧)$$

حيث $Q = \frac{1}{2}(Q_3 - Q_1)$ نصف المدى الربيعي . وسوف نشير إلى هذا المقياس بمعامل التفرطح المئيني . للتوزيع الطبيعي تكون قيمة هذا المعامل 0.263 . (انظر المسألة ٥ – ١٤) .

عزوم ، التواء وتفرطح المجتمع :

عندما يكون من المطلوب التفرقة بين عزوم ومقاييس الالتواء والتفرطح لعينة من تلك التي تقابلها في المجتمع الذي سحبت منه هذه العينة ، فإنه من المعتاد استخدام الرموز اللاتينية للأولى والرموز اليونانية للأخيرة . فإذا كانت عزوم العينة يرمز لها بالرموز m_r ، m_r' فإن الرموز اليونانية المقابلة هي μ_r ، μ_r' (μ هو الحرف اليوناني «ميو») . أما الدليل فتستخدم دائماً الحروف اللاتينية . كذلك فإنه إذا كانت مقاييس الالتواء والتفرطح للعينة يرمز لها بالرموز a_3 و a_4 على الترتيب ؛ فإن التواء وتفرطح المجتمع يرمز له بالرموز α_3 ، α_4 (هو الحرف اليوناني « ألفا »)

وقد سبق أن ذكرنا أن الانحراف المعياري للعينة وللمجتمع يرمز لها بالرموز s ، σ على الترتيب .

مسائل محلولة :

العـــزوم :

٥ – ١ أوجد العزم (أ) الأول (ب) الثاني (جـ) الثالث (د) الرابع . لمجموعة الأرقام 10 ، 8 ، 7 ، 3 ، 2

الحـــل :

(أ) العزم الأول أو الوسط الحسابي

$$\bar{X} = \frac{\Sigma X}{N} = \frac{2 + 3 + 7 + 8 + 10}{5} = \frac{30}{5} = 6$$

(ب) العزم الثاني

$$\overline{X^2} = \frac{\Sigma X^2}{N} = \frac{2^2 + 3^2 + 7^2 + 8^2 + 10^2}{5} = \frac{226}{5} = 45.2$$

(جـ) العزم الثالث

$$\overline{X^3} = \frac{\Sigma X^3}{N} = \frac{2^3 + 3^3 + 7^3 + 8^3 + 10^3}{5} = \frac{1890}{5} = 378$$

(د) العزم الرابع

$$\overline{X^4} = \frac{\Sigma X^4}{N} = \frac{2^4 + 3^4 + 7^4 + 8^4 + 10^4}{5} = \frac{16594}{5} = 3318.8$$

٥ – ٢ أوجد العزم (أ) الأول (ب) الثانى (جـ) الثالث (د) الرابع حول الوسط الحسابى لمجموعة الأرقام بالمسألة ٥ – ١

الحـل :

(أ) $$m_1 = \overline{(X - \bar{X})} = \frac{\Sigma (X - \bar{X})}{N} = \frac{(2-6) + (3-6) + (7-6) + (8-6) + (10-6)}{5} = \frac{0}{5} = 0$$

m_1 دائماً تساوى صفراً نظراً لأن $\overline{X - \bar{X}} = \bar{X} - \bar{X} = 0$. (أنظر المسألة ٣ – ١٦ ؛ الفصل الثالث) .

(ب) $$m_2 = \overline{(X - \bar{X})^2} = \frac{\Sigma (X - \bar{X})^2}{N} = \frac{(2-6)^2 + (3-6)^2 + (7-6)^2 + (8-6)^2 + (10-6)^2}{5} = \frac{46}{5} = 9{\cdot}2$$

لاحظ أن m_2 هو التباين s^2 .

(جـ) $$m_3 = \overline{(X - \bar{X})^3} = \frac{\Sigma (X - \bar{X})^3}{N} = \frac{(2-6)^3 + (3-6)^3 + (7-6)^3 + (8-6)^3 + (10-6)^3}{5} = \frac{-18}{5} = -3{\cdot}6$$

(د) $$m_4 = \overline{(X - \bar{X})^4} = \frac{\Sigma (X - \bar{X})^4}{N} = \frac{(2-6)^4 + (3-6)^4 + (7-6)^4 + (8-6)^4 + (10-6)^4}{5} = \frac{610}{5} = 122$$

٥ – ٣ أوجد العزم (أ) الأول (ب) الثانى (جـ) الثالث (د) الرابع

حول النقطة 4 لمجموعة الأرقام بالمسألة ٥ – ١

الحـل :

(أ) $$(a)\quad m_1' = \overline{(X - 4)} = \frac{\Sigma (X - 4)}{N} = \frac{(2-4) + (3-4) + (7-4) + (8-4) + (10-4)}{5} = 2$$

(ب) $$m_2' = \overline{(X - 4)^2} = \frac{\Sigma (X - 4)^2}{N} = \frac{(2-4)^2 + (3-4)^2 + (7-4)^2 + (8-4)^2 + (10-4)^2}{5} = \frac{66}{5} = 13{\cdot}2$$

(جـ) $$m_3' = \overline{(X - 4)^3} = \frac{\Sigma (X - 4)^3}{N} = \frac{(2-4)^3 + (3-4)^3 + (7-4)^3 + (8-4)^3 + (10-4)^3}{5} = \frac{298}{5} = 59{\cdot}6$$

(د) $$m_4' = \overline{(X - 4)^4} = \frac{\Sigma (X - 4)^4}{N} = \frac{(2-4)^4 + (3-4)^4 + (7-4)^4 + (8-4)^4 + (10-4)^4}{5} = \frac{1650}{5} = 330$$

٥ – ٤ باستخدام نتائج المسائل ٥ – ٢ ، ٥ – ٣ ، حقق العلاقة بين العزوم

(أ) $m_2 = m_2' - m_1'^2$ (ب) $m_3 = m_3' - 3m_1'm_2' + 2m_1'^3$ (جـ) $\ldots - 4m_1'm_3' + 6m_1'^2m_2' - 3m_1'^4$.

الحـل :

من المسألة ٥ – ٣ : $5.3: m_1' = 2,\ m_2' = 13{\cdot}2,\ m_3' = 59{\cdot}6,\ m_4' = 330$ إذن

(أ) $m_2 = m_2' - m_1'^2 = 13{\cdot}2 - (2)^2 = 13{\cdot}2 - 4 = 9{\cdot}2$

(ب) $m_3 = m_3' - 3m_1'm_2' + 2m_1'^3 = 59{\cdot}5 - 3(2)(13{\cdot}2) \mp 2(2)^3 = 59{\cdot}6 - 79{\cdot}2 + 16 = -3{\cdot}6$

(جـ) $m_4 = m'_4 - 4m_1'm_3' + 6m_1'^2m_2' - 3m_1'^4 = 330 - 4(2)(59{\cdot}6) + 6(2)^2(13{\cdot}2) - 3(2)^4 = 122$

تتفق مع نتائج المسألة ٥ – ٢ .

٥ – ٥ أثبت أن (أ) $m_2 = m_2' - m_1'^2$ (ب) $m_3 = m_3' - 3m_1'm_2' + 2m_1'^3$

(جـ) $m_4 = m_4' - 4m_1'm_3' + 6m_1'^2m_2' - 3m_1'^4$

الحـــل :

(أ) إذا كانت $d = X - A$ ، فإن $\bar{X} = A + \bar{d}$ ؛ $\bar{X} = A + \bar{d}$ و $X - \bar{X} = d - \bar{d}$

$$\begin{aligned} m_2 &= \overline{(X-\bar{X})^2} = \overline{(d-\bar{d})^2} = \overline{d^2 - 2\bar{d}d + \bar{d}^2} \\ &= \overline{d^2} - 2\bar{d}^2 + \bar{d}^2 = \overline{d^2} - \bar{d}^2 = m_2' - m_1'^2 \end{aligned}$$

(ب)

$$\begin{aligned} m_3 &= \overline{(X-\bar{X})^3} = \overline{(d-\bar{d})^3} = \overline{(d^3 - 3d^2\bar{d} + 3d\bar{d}^2 - \bar{d}^3)} \\ &= \overline{d^3} - 3\bar{d}\,\overline{d^2} + 3\bar{d}^3 - \bar{d}^3 = \overline{d^3} - 3\bar{d}\,\overline{d^2} + 2\bar{d}^3 = m_3' - 3m_1'm_2' + 2m_1'^3 \end{aligned}$$

(جـ)

$$\begin{aligned} m_4 &= \overline{(X-\bar{X})^4} = \overline{(d-\bar{d})^4} = \overline{(d^4 - 4d^3\bar{d} + 6d^2\bar{d}^2 - 4d\bar{d}^3 + \bar{d}^4)} \\ &= \overline{d^4} - 4\bar{d}\,\overline{d^3} + 6\bar{d}^2\,\overline{d^2} - 4\bar{d}^4 + \bar{d}^4 = \overline{d^4} - 4\bar{d}\,\overline{d^3} + 6\bar{d}^2\,\overline{d^2} - 3\bar{d}^4 \\ &= m_4' - 4m_1'm_3' + 6m_1'^2m_2' - 3m_1'^4 \end{aligned}$$

حساب العزوم من البيانات المجمعة :

٥ – ٦ أوجد العزوم الأربعة الأولى حول الوسط لتوزيع الأوزان في المسألة ٣ – ٢٢ ؛ الفصل الثالث .

جدول ٥ – ١

X	u	f	fu	fu^2	fu^3	fu^4
61	−2	5	−10	20	−40	80
64	−1	18	−18	18	−18	18
67	0	42	0	0	0	0
70	1	27	27	27	27	27
73	2	8	16	32	64	128
		$N = \Sigma f = 100$	$\Sigma fu = 15$	$\Sigma fu^2 = 97$	$\Sigma fu^3 = 33$	$\Sigma fu^4 = 253$

إذن

$$m_1' = c\frac{\Sigma fu}{N} = (3)\left(\frac{15}{100}\right) = 0{\cdot}45 \qquad m_3' = c^3\frac{\Sigma fu^3}{N} = (3)^3\left(\frac{33}{100}\right) = 8{\cdot}91$$

$$m_2' = c^2\frac{\Sigma fu^2}{N} = (3)^2\left(\frac{97}{100}\right) = 8{\cdot}73 \qquad m_4' = c^4\frac{\Sigma fu^4}{N} = (3)^4\left(\frac{253}{100}\right) = 204{\cdot}93$$

بحيث

$$m_1 = 0$$
$$m_2 = m_2' - m_1'^2 = 8{\cdot}73 - (0{\cdot}45)^2 = 8{\cdot}5275$$
$$m_3 = m_3' - 3m_1' m_2' + 2m_1'^3 = 8{\cdot}91 - 3(0{\cdot}45)(8{\cdot}73) + 2(0{\cdot}45)^3 = 2{\cdot}6932$$
$$m_4 = m_4' - 4m_1' m_3' + 6m_1'^2 m_2' - 3m_1'^4$$
$$= 204{\cdot}93 - 4(0{\cdot}45)(8{\cdot}91) + 6(0{\cdot}45)^2(8{\cdot}73) - 3(0{\cdot}45)^4 = 199{\cdot}3759$$

٥ – ٧ أوجد (أ) m_1' (ب) m_2' (جـ) m_3' (د) m_4' (هـ) m_1 (و) m_2 (ز) m_3 (ح) m_4 (ط) $\bar{X}$ (ى) s (ك) $\overline{X^2}$ (ل) $\overline{X^3}$ للتوزيع بالمسألة ٤ – ١٩ ، الفصل الرابع .

الحــل :

جدول ٥ – ٢

X	u	f	fu	fu^2	fu^3	fu^4
70	−6	4	−24	144	−864	5184
74	−5	9	−45	225	−1125	5625
78	−4	16	−64	256	−1024	4096
82	−3	28	−84	252	−756	2268
86	−2	45	−90	180	−360	720
90	−1	66	−66	66	−66	66
$A \rightarrow$ 94	0	85	0	0	0	0
98	1	72	72	72	72	72
102	2	54	108	216	432	864
106	3	38	114	342	1026	3078
110	4	27	108	432	1728	6912
114	5	18	90	450	2250	11 250
118	6	11	66	396	2376	14 256
122	7	5	35	245	1715	12 005
126	8	2	16	128	1024	8192
		$N = \Sigma f = 480$	$\Sigma fu = 236$	$\Sigma fu^2 = 3404$	$\Sigma fu^3 = 6428$	$\Sigma fu^4 = 74\,588$

(أ) $m_1' = c\dfrac{\Sigma fu}{N} = (4)\left(\dfrac{236}{480}\right) = 1{\cdot}9667$ (جـ) $m_3' = c^3\dfrac{\Sigma fu^3}{N} = (4)^3\left(\dfrac{6428}{480}\right) = 857{\cdot}0667$

(ب) $m_2' = c^2\dfrac{\Sigma fu^2}{N} = (4)^2\left(\dfrac{3404}{480}\right) = 113{\cdot}4667$ (د) $m_4' = c^4\dfrac{\Sigma fu^4}{N} = (4)^4\left(\dfrac{74588}{480}\right) = 39\,780{\cdot}2667$

(هـ) $m_1 = 0$

(و) $m_2 = m_2' - m_1'^2 = 113{\cdot}4667 - (1{\cdot}9667)^2 = 109{\cdot}5988$

(ز) $m_3 = m_3' - 3m_1' m_2' + 2m_1'^3 = 857{\cdot}0667 - 3(1{\cdot}9667)(113{\cdot}4667) + 2(1{\cdot}9667)^3 = 202{\cdot}8158$

(ح) $m_4 = m_4' - 4m_1' m_3' + 6m_1'^2 m_2' - 3m_1'^4 = 35\,627{\cdot}2853$

(ط) $\bar{X} = (\overline{A + d}) = A + m_1' = A + c\dfrac{\Sigma fu}{N} = 94 + 1{\cdot}9667 = 95{\cdot}97$

(ى) $s = \sqrt{m_2} = \sqrt{109{\cdot}5988} = 10{\cdot}47$

(ك) $\overline{X^2} = \overline{(A + d)^2} = \overline{(A^2 + 2Ad + d^2)} = A^2 + 2A\bar{d} + \overline{d^2} = A^2 + 2Am_1' + m_2'$

$= (94)^2 + 2(94)(1.9667) + 113.4667 = 9319.2063, \text{ or } 9319$

(ل) $\overline{X^3} = \overline{(A + d)^3} = \overline{(A^3 + 3A^2d + 3Ad^2 + d^3)} = A^3 + 3A^2\bar{d} + 3A\overline{d^2} + \overline{d^3}$ إلى أربعة أرقام معنوية

$A^3 + 3A^2m_1' + 3Am_2' + m_3' = 915\,571.9597, \text{ or } 915\,600$

طريقة شارلير للمراجعة :

٥ – ٨ وضح كيفية استخدام طريقة شارلير للمراجعة للحسابات بالمسألة ٥ – ٧

الحـل :

للحصول على المراجعة المطلوبة فإننا نضيف الأعمدة التالية إلى تلك التي بالمسألة ٥ – ٧ باستثناء العمود الثانى حيث كرر هنا للتسهيل .

جدول ٥–٣

$u + 1$	f	$f(u + 1)$	$f(u + 1)^2$	$f(u + 1)^3$	$f(u + 1)^4$
−5	4	−20	100	−500	2500
−4	9	−36	144	−576	2304
−3	16	−48	144	−432	1296
−2	28	−56	112	−224	448
−1	45	−45	45	−45	45
0	66	0	0	0	0
1	85	85	85	85	85
2	72	144	288	576	1152
3	54	162	486	1458	4374
4	38	152	608	2432	9728
5	27	135	675	3375	16 875
6	18	108	648	3888	23 328
7	11	77	539	3773	26 411
8	5	40	320	2560	20 480
9	2	18	162	1458	13 122
	$N = \Sigma f = 480$	$\Sigma f(u - 1) = 716$	$\Sigma f(u + 1)^2 = 4356$	$\Sigma f(u + 1)^3 = 17\,828$	$\Sigma f(u + 1)^4 = 122\,148$

فى كل من المجموعات التالية أخذ الصف الأول من الجدول ٥–٣ والثانى من الجدول ٥–٢ بالمسألة ٥–٧ . تساوى النتائج يعطى المراجعة المطلوبة .

$$\begin{cases} \Sigma f(u+1) = 716 \\ \Sigma fu + N = 236 + 480 = 716 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Sigma f(u+1)^2 = 4356 \\ \Sigma fu^2 + 2\Sigma fu + N = 3404 + 2(236) + 480 = 4356 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Sigma f(u+1)^3 = 17\,828 \\ \Sigma fu^3 + 3\Sigma fu^2 + 3\Sigma fu + N = 6428 + 3(3404) + 3(236) + 480 = 17\,828 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Sigma f(u+1)^4 = 122\,148 \\ \Sigma fu^4 + 4\Sigma fu^3 + 6\Sigma fu^2 + 4\Sigma fu + N = 74\,588 + 4(6428) + 6(3404) + 4(236) + 480 = 122\,148 \end{cases}$$

تصحيح شبرد للعزوم :

٥ – ٩ طبق تصحيح شبر د لإيجاد العزوم حول الوسط للبيانات فى (أ) المسألة ٥–٦ (ب) المسألة ٥–٧ .

الحـــل :

(أ)

$$m_2\ \text{(المصحح)} = \ = m_2 - c^2/12 = 8{\cdot}5275 - 3^2/12 = 7{\cdot}7775$$

$$= m_4 - \tfrac{1}{2}c^2 m_2 + \tfrac{7}{240}c^4$$

$$199{\cdot}3759 - \tfrac{1}{2}(3)^2(8{\cdot}5275) + \tfrac{7}{240}(3)^4$$

$$m_4\ \text{(المصحح)} = \ 163{\cdot}3646$$

لايحتاجان إلى تصحيح .

(ب)

$$m_2\ \text{(المصحح)} = \ = m_2 - c^2/12 = 109{\cdot}5988 - 4^2/12 = 108{\cdot}2655$$

$$= m_4 \quad \tfrac{1}{2}c^2 m_2 - \tfrac{7}{240}c^4$$

$$= 35\,627{\cdot}2853 - \tfrac{1}{2}(4)^2(109{\cdot}5988) + \tfrac{7}{240}(4)^4$$

$$m_4\ \text{(المصحح)} = \ = 34\,757{\cdot}9616$$

الالتـــواء :

٥–١٠ أوجد معامل التواء بيرسون (أ) الأول (ب) الثانى لاجور الـ 65 عاملا فى شركة P and R . أنظر المسألة ٣–٤٤ ، الفصل الثالث والمسألة ٤–١٨ ، الفصل الرابع .

الحـــل :

الوسط £ 79.76 ، الوسيط = £ 79.06 ، الانحراف المعيارى = s = £ 15.60

(أ) المعامل الأول للتفرطح = $\dfrac{\text{الوسيط} - \text{المنوال}}{s}$ = $\dfrac{£79{\cdot}76 - £77{\cdot}50}{£15{\cdot}60} = 0{\cdot}1448, \text{ or } 0{\cdot}14.$

(ب) المعامل الثانى للتفرطح = $\dfrac{3\,(\text{الوسط} - \text{الوسيط})}{s}$ = $\dfrac{3(£79{\cdot}76 - £79{\cdot}06)}{£15{\cdot}60} = 0{\cdot}1346, \text{ or } 0{\cdot}13.$

إذا استخدمنا الانحراف المعيارى المصحح (أنظر المسألة ٤–٢١ (ا) ، الفصل الرابع) فإن هذه المعاملات تصبح ، على الترتيب ،

(ا) $\dfrac{\text{الوسط} - \text{المنوال}}{s\ (\text{المصحح})} = \dfrac{£79{\cdot}76 - £77{\cdot}50}{£15{\cdot}33} = 0{\cdot}1474 \text{ or } 0{\cdot}15$

(ب) $\dfrac{3\ (\text{الوسط} - \text{الوسيط})}{s\ (\text{المصحح})} = \dfrac{3(£79{\cdot}76 - £79{\cdot}06)}{£15{\cdot}33} = 0{\cdot}1370, \text{ or } 0{\cdot}14$

بما أن المعاملات موجبة فإن التوزيع ملتو التواء موجب ، بمعنى ، ملتو إلى اليمين .

٥–١١ أوجد (ا) معامل الالتواء الربيعى (ب) معامل الالتواء المئينى لتوزيع المسألة ٥–١٠ (أنظر المسألة ٣–٤٤ ، الفصل الثالث) .

الحـل :

$Q_1 = £68{\cdot}25,\ Q_2 = P_{50} = £79{\cdot}06,\ Q_3 \quad £90{\cdot}75,\ P_{10} \quad D \quad £58{\cdot}12\ \ P_{90} \quad D_9 \quad £101{\cdot}00$

(ا) معامل الالتواء الربيعى $= \dfrac{Q_3 - 2Q_2 + Q_1}{Q_3 - Q_1} = \dfrac{£90{\cdot}75 - 2(£79{\cdot}06) + £68{\cdot}25}{£90{\cdot}75 - £68{\cdot}25} = 0{\cdot}0391$

(ب) معامل الالتواء المئينى $= \dfrac{P_{90} - 2P_{50} + P_{10}}{P_{90} - P_{10}} = \dfrac{£101{\cdot}00 - 2(£79{\cdot}06) + £58{\cdot}12}{£101{\cdot}00 - £58{\cdot}12} = 0{\cdot}0233$ s

٥–١٢ أوجد معامل الالتواء باستخدام العزوم a_3 ، لكل من (ا) توزيع أوزان الطلبة فى جامعة XYZ (أنظر المسألة ٥–٦) .

(ب) نسب الذكاء .I.Q لطلبة المدرسة الابتدائية (المسألة ٥–٧)

الحـل :

(ا)

$m_2 = s^2 = 8{\cdot}5275,\ m_3 = -2{\cdot}6932.$

إذن $a_3 = \dfrac{m_3}{s^3} = \dfrac{m_3}{(\sqrt{m_2})^3} = \dfrac{-2{\cdot}6932}{(\sqrt{8{\cdot}5275})^3} = 0{\cdot}1413, \text{ or } -0{\cdot}14.$

إذا استخدم تصحيح شبر د للبيانات المجمعة (أنظر المسألة ٥–٩ (ا)) إذن

$a_3\ (\text{المصحح}) = \dfrac{m_3}{(\sqrt{\text{corrected } m_2})^3} = \dfrac{-2{\cdot}6932}{(\sqrt{7{\cdot}7775})^3} = -0{\cdot}1242 \text{ or } -0{\cdot}12$

(ب) $a_3 = \frac{m_3}{s^3} = \frac{m_3}{(\sqrt{m_2})^3} = \frac{202.8158}{(\sqrt{109.5988})^3} = 0.1768, \text{ or } 0.18$

إذا استخدم تصحيح شبرد للبيانات المجمعة (أنظر المسألة ٥–٩ (ا)) فإن

$$a_3\,(\text{المصحح}) = \frac{m_3}{(\sqrt{\text{corrected } m_2})^3} = \frac{202.8158}{(\sqrt{108.2655})^3} = 0.1800, \text{ or } 0.18$$

لاحظ أن كلا التوزيعين ملتو التواء بسيطا ، (ا) إلى اليسار (سالب) ، (ب) إلى اليمين (موجب)

التوزيع (ب) أكثر التواء من (ا) ، بمعنى أن (ا) أكثر تماثلا من (ب) ويدلل على ذلك الحقيقة أن القيمة الرقية أو القيمة المطلقة لمعامل الالتواء في (ب) أكبر منها في (ا) .

التفرطح :

٥–١٣ أوجد معامل التفرطح باستخدام العزوم ، a_4 ، لبيانات (ا) المسألة ٥–٦ (ب) لمسألة ٥–٧

الحل :

(ا) $a_4 = \frac{m_4}{s^4} = \frac{m_4}{m_2^2} = \frac{199.3759}{(8.5275)^2} = 2.7418, \text{ or } 2.74$

إذا أستخدم تصحيح شبرد (أنظر المسألة ٥–٩ (ا)) ، فإن

$$a_4\,(\text{المصحح}) = \frac{m_4\,(\text{المصحح})}{(a_4\,(\text{المصحح}))^2} \quad \frac{163.3646}{(7.7775)^2} = 2.7007, \text{ or } 2.70$$

(ب) $a_4 = \frac{m_4}{s_4} = \frac{m_4}{m_2^2} = \frac{35\,627.2853}{(109.5988)^2} = 2.9660, \text{ or } 2.97$

إذا استخدم تصحيح شبرد (أنظر المسألة ٥–٩ (ب)) ، فإن

$$a_4\,(\text{المصحح}) = \frac{m_4\,(\text{المصحح})}{(m_2\,(\text{المصحح}))^2} = \frac{34\,757.9616}{(108.2655)^2} = 2.9653, \text{ or } 2.97$$

وبما أنه في التوزيع الطبيعي $a_4 = 3$ ، ينتج عن ذلك أن كلا التوزيعين (ا) ، (ب) مفرطحان وذلك بالمقارنة بالتوزيع الطبيعي (بمعنى أنه أقل تدببا من التوزيع الطبيعي) .

إذا أخذنا خاصية التدبب فإن التوزيع (ب) يقرب بالتوزيع الطبيعي أكثر من التوزيع (ا) ولكن ، من المسألة ٥–١٢ التوزيع (ا) أكثر تماثلا من (ب) بحيث إذا أخذنا صفة التماثل فإن (ا) يقرب بالتوزيع أكثر من (ب) .

٥-١٤ (ا) احسب معامل التفرطح المئيني $\kappa = Q/(P_{90} - P_{10})$. لتوزيع المسألة ٥-١١ .

(ب) ما مدى قربه من التوزيع الطبيعي ؟

الحــل :

(ا) $Q = \frac{1}{2}(Q_3 - Q_1) = \frac{1}{2}(£90{\cdot}75 - £68{\cdot}25) = £11{\cdot}25, \; P_{90} - P_{10} = £101{\cdot}00 - £58{\cdot}12 = £42{\cdot}88$

إذن $\kappa = Q/(P_{90} - P_{10}) = 0{\cdot}262$

(ب) بما أن κ للتوزيع الطبيعى هــو 0.263 ، ينتج عن ذلك أن التوزيع المعطى متوسط التفرطح (بمعنى أن تحدبه يقترب من التوزيع الطبيعي) . أى أن تفرطح التوزيع يماثل تقريبا تفلطح التوزيع الطبيعى مما يؤدى إلى الاعتقاد بأنه يمكن تقريبه بشكل جيد باستخدام التوزيع الطبيعى إذا أخذنا فى الاعتبار تفرطحه .

مســـائل اضافية

العزوم :

٥-١٥ أوجد العزم (ا) الأول (ب) الثانى (جـ) الثالث (د) الرابع لمجموعة الأرقام 6 ,3 ,8 ,9 ,5 ,7 ,4

ج : (ا) 6 (ب) 40 (جـ) 288 (د) 2188

٥-١٦ أوجد العزم (ا) الأول (ب) الثانى (جـ) الثالث (د) الرابع

حول الوسط لمجموعة الأرقام بالمسألة ٥-١٥ .

ج : (ا) 0 (ب) 4 (جـ) 0 (د) 25.86

٥-١٧ أوجد العزم (ا) الأول (ب) الثانى (جـ) الثالث (د) الرابع

حول الرقم 7 لمجموعة الأرقام بالمسألة ٥-١٥ .

ج : (ا) 1— (ب) 5 (جـ) 91— (د) 53

٥-١٨ باستخدام نتائج المسألة ٥-١٦ ، ٥-١٧ ، أثبت العلاقات بين العزوم

(ا) $m_2 = m_2' - m_1'^2$ (ب) $m_3 = m_3' - 3m_1' m_2' + 2m_1'^3$

(جـ) $m_4 = m_4' - 4m_1' m_3' + 6m_1'^2 m_2' - 3m_1'^4$

٥–١٩ أوجد العزوم الأربعة حول الوسط لمجموعة أرقام المتوالية الحسابية $2, 5, 8, 11, 14, 17$.

ج : $0, 26.25, 0, 1193.1$

٥–٢٠ أثبت أن (ا) $m_2' = m_2 + h^2$ (ب) $m_3' = m_3 + 3hm_2 + h_3$, (جـ) $m_4' = m_4 + 4hm_3 + 6h^2m_2 + h^4$,

حيث $h = m_1'$

٥–٢١ إذاكان العزم الأول حول الرقم 2 هـو 5 ، فما هو الوسط ؟

ج : 7

٥–٢٢ إذا كانت العزوم الأربعة الأولى حول الرقم 3 تساوى $-2, 10, -25, 50$

أوجـد العزوم المقابلة (ا) حول الوسط (ب) حول الرقم 5 (جـ) حول الصفر .

ج (ا) $0, 6, 19, 42$ (ب) $-4, 22, -117, 560$ (جـ) $1, 7, 38, 74$

٥–٢٣ أوجد العزوم الأربعة الأولى حول الوسط للأرقام $0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1.$

ج : $0, 0{\cdot}2344, 0{\cdot}0586, 0{\cdot}0696$

٥–٢٤ (ا) أثبت أن $m_5 = m_5' - 5m_1'm_4' + 10m_1'^2m_3' - 10m_1'^3m_2' + 4m_1'^5$ (ب) أوجد صيغة مماثلة لـ m_6

٥–٢٥ من مجموع N عدد ، الكسر p يعبر عن الأرقام التى تأخذ القيمة واحد والكسر $q = 1 - p$ يعبر عن الأرقام التى تأخذ القيمة صفر . أوجـد

(ا) m_1 (ب) m_2 (جـ) m_3 (د) m_4 لمجموعة الأرقام . قارن بالمسألة ٥–٢٣ .

ج : (ا) $m_1 = 0$ (ب) $m_2 = pq$ (جـ) $pq(q - p)$ (د) $dq(p^2 - pq + q^2)$

٥–٢٦ أثبت أن العزوم الأربعة الأولى حول الوسط فى المتوالية العددية $a, a + d, a + 2d, \ldots, a + (n - 1)d$ هى

$$m_1 = 0, m_2 = \tfrac{1}{12}(n^2 - 1)d^2, m_3 = 0, m_4 = \tfrac{1}{240}(n^2 - 1)(3n^2 - 7)d^4$$

قارن بالمسألة ٥–١٩ . أنظر أيضا المسألة ٤–٦٩ ، الفصل الرابع

ملحوظة : $1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + (n - 1)^4 = \tfrac{1}{30}n(n - 1)(2n - 1)(3n^2 - 3n - 1).]$

العزوم من البيانات المجمعة :

٥–٢٧ احسب العزوم الأربعة الأولى حول الوسط للتوزيع بالجدول ٥–٤

ج : $m_1 = 0, m_2 = 5{\cdot}97, m_3 = -0{\cdot}397, m_4 = 89{\cdot}22$

X	f
12	1
14	4
16	6
18	10
20	7
22	2
المجموع	30

جدول ٥–٤

٥–٢٨ وضح كيفية استخدام طريقة شارلير للمراجعة عند أجراء الحسابات بالمسألة ٥–٢٧

٥–٢٩ طبق معامل تصحيح شبرد للعزوم التى حصلت عليها بالمسألة ٥–٢٧ .

ج : m_1 (مصحح) $= 0$ ، m_2 (مصحح) $= 5.440$ ، m_3 (مصحح) $= -0.5920$
و m_4 (مصحح) $= 76.2332$

٥–٣٠ أوجد العزوم الأربعة الأولى حول الوسط للتوزيع بالمسألة ٣–٥٩ بالفصل الثالث .

(ا) بدون تصحيح شبرد (ب) باستخدام تصحيح شبرد .

ج : (ا) $m_1 = 0, m_2 = 53{\cdot}743, m_3 = 61{\cdot}853, m_4' = 8491{\cdot}4$

(ب) m_2 (مصحح) $= 51.660$ ، m_4 (مصحح) $= 7837.8$

٥–٣١ أوجد (ا) m_1 (ب) m_2 (جـ) m_3 (د) m_4

(هـ) $\bar{X}$ (و) s (ز) $\overline{X^2}$ (ح) $\overline{X^3}$ (ط) $\overline{X^4}$ (ى) $\overline{(X+1)^3}$

لتوزيع المسألة ٣–٦٢ ، الفصل الثالث .

(ا) 0 (ب) 52.95 (جـ) 92.35 (د) 7158.20 (هـ) 26.2 (و) 7.28 (ز) 739.58
(ح) 22247.. (ط) 706 428 (ى) 24 545

الالتواء :

٥–٣٢ أوجد معامل الالتواء باستخدام العزوم ، a_3 ، لتوزيع المسألة ٥–٢٧

(ا) بدون استخدام تصحيح شبرد (ب) باستخدام تصحيح شبرد

ج : (ا) -0.2464 (ب) -0.2464

٥–٣٣ أوجد معامل الالتواء باستخدام العزوم ، a_3 ، لتوزيع المسألة ٣–٥٩ ، الفصل الثالث . أنظر المسألة ٥–٣٠ .

ج : 0.1570

٥–٣٤ العزم الثانى حول الوسط لتوزيعين هــو 16,9 بينما العزم الثالث حول الوسط لهما هو 12.8 — ، 8.1 — على الترتيب . أى التوزيعين أكثر التواء إلى اليسار ؟

ج : التوزيع الأول .

٥–٣٥ أوجد معامل التواء بيرسون (١) الأول (ب) الثانى . لتوزيع المسألة ٣–٥٩ ، الفصل الثالث عدد الفروق .

ج : (١) 0.040 (ب) 0.074

٥–٣٦ أوجد (١) معامل الالتواء الربيعى (ب) معامل الالتواء المئينى لتوزيع المسألة ٣–٥٩ ، الفصل الثالث ، قارن النتيجة بنتيجة المسألة ٥–٣٥ واشرح .

(١) 0.02 — (ب) 0.13 —

٥–٣٧ (١) وضح السبب فى أن معامل بيرسون للالتواء غير مناسب لتوزيع المسألة ٢–٣١ الفصل الثانى :

(ب) أوجد معامل الالتواء الربيعى لهذا التوزيع وفسر النتيجة .

ج : (ب) 0.078 —

التفــرطح :

٥–٣٨ أوجد معامل التفرطح باستخدام العزوم a_4 ، لتوزيع المسألة ٥–٢٧

(١) بدون استخدام تصحيح شبرد . (ب) باستخدام تصحيح شبرد

ج : (١) 2.62 (ب) 2.58

٥–٣٩ أوجد معامل التفرطح باستخدام العزوم لتوزيع المسألة ٣–٩٤ ، الفصل الثالث .

(١) بدون استخدام تصحيح شبرد (ب) باستخدام تصحيح شبرد . (أنظر المسألة ٥–٣٠) .

ج : (١) 2.94 (ب) 2.94

٥–٤٠ العزم الرابع حول الوسط لكلا من التوزيعين بالمسألة ٥–٣٤ هما 230 ، 780 على الترتيب . أى التوزيعين أكثر تقريبا للتوزيع المعتدل لو نظرنا إلى

(١) تدبب القمــة (ب) الالتــواء

ج : (١) الثانى (ب) الأول

٥–٤١ أى من التوزيعات بالمسألة ٥–٤٠ (١) مدبب (ب) متوسط التفرطح (ج) مفرطح ؟

ج : (١) الثانى (ب) ليس أى منهما (ج) الأول .

٥-٤٢ الانحراف المعيارى لتوزيع متماثل هـو 5 . ماذا يجب أن يكون عليه العزم الرابع حول الوسط بحيث يكون التوزيع (أ) مدبب (ب) متوسط التفرطح (جـ) مفرطح ؟

ج : (أ) أكبر من 1875 (ب) يساوى 1875 (جـ) أقل من 1875

٥-٤٣ (أ) احسب معامل التفرطح المئينى ، κ لتوزيع المسألة ٣-٥٩ الفصل الثالث .

(ب) قارن نتيجتك بالنتيجة النظرية 0.263 للتوزيع الطبيعى وفسر ذلك .

(جـ) كيف يمكن التوفيق بين هذه النتيجة بتلك التى حصلت عليها من المسألة ٥-٣٩

ج : (أ) 0.313

الفصل السادس

اساسيات نظرية الاحتمالات

التعريف التقليدى للاحتمالات :

افترض أن الحدث E يمكن أن يحدث بـ h طريقة وكانت n عدد جميع الحالات الممكنة والتى لها نفس الفرصة فى الحدوث وبهذا فإن احتمال حدوث الحدث (يسمى نجاحه) يرمز له بالرمز .

$$p = \Pr\{E\} = \frac{h}{n}$$

واحتمال عدم حدوث الحدث (يسمى فشله) يرمز له بالرمز .

$$q = \Pr\{\text{not}\, E\} = \frac{n-h}{n} = 1 - \frac{h}{n} = 1 - p = 1 - \Pr\{E\}$$

وبهذا فإن $p+q=1$ أو $\Pr\{E\} + \Pr\{\text{not}\, E\} = 1$

والحدث "$\text{not}\ E$" يرمز له أحياناً بالرمز $\bar{E}, \tilde{E}$ أو $\sim E$

مثـــال :

E تمثل الحدث ظهور الأرقام 3 أو 4 فى رمية زهرة طاولة مرة واحدة .

هناك ست طرق ممكنة لوقوع الزهر ينتج عنها ظهور الأرقام 6 ,5 ,4 ,3 ,2 ,1 .

وإذا كانت الزهرة غير متميزة (بمعنى أنها غير مثقلة بالرصاص بحيث تقع على عدد معين عند القائها – غير مغشوشة) . فإننا يمكن أن نفترض أن هذه الطرق الست متساوية الحدوث . وبما أن E يمكن أن تحدث فى مرتين من هذه الطرق فإن $p = \Pr\{E\} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

احتمال عدم الحصول على 3 أو 4 (بمعنى ، الحصول على 6 ,5 ,2 ,1) هو

$$q = \Pr\{\bar{E}\} = 1 - \tfrac{1}{3} = \tfrac{2}{3}$$

لاحظ أن احتمال حدث هو رقم بين 1 ,0 . إذا كان وقوع الحدث مستحيلا ، فإن احتماله هو 0 . إذا كان الحدث لابد أن يقع ، بمعنى أن وقوعه مؤكد ، فإن احتماله هو 1 . إذا كان احتمال حدوث حدث هو p ، فإن الترجيح فى صالح حدوثه هو $p : q$. (وتقرأ « p إلى q ») ، والترجيح فى صالح عدم حدوثه هو $q : p$. بهذا فإن الترجيح فى صالح عدم ظهور 3 أو 4 فى رمية واحدة لزهرة طاولة غير متحيزة هو

$$q : p = {}^2/_3 : {}^1/_3 = 2:1$$ بمعنى 2 إلى 1

تعريف الاحتمال كتكرار نسبى :

يعيب التعريف السابق للاحتمال أن كلمة « له نفس الفرصة فى الحدوث » كلمة غامضة . وفى الواقع فإن هذه الكلمة تبدو أنها مرادفة لكلمة « متساوية الأحتمال » ، وبهذا فإن التعريف دائرى حيث نعرف الاحتمال بدلالة نفسه . ولهذا السبب فإن البعض ، يستخدم تعريفاً إحصائياً للاحتمال . وطبقاً لهذا فإن الاحتمال المقدر ، أو الاحتمال الاعتبارى . لحدث يؤخذ على أنه التكرار النسبى لحدوث هذا الحدث عندما تكون عدد المشاهدات كبيراً جداً . والاحتمال نفسه هو نهاية التكرار النسبى عندما يؤول عدد المشاهدات إلى مالا نهاية .

مثـــال :

إذا قذفت عملة 1000 مرة ونتج عنها 529 صورة ، فإن التكرار النسبى للصورة هو 0.529=529/1000 إذا قذفت العملة 1000 مرة أخرى ونتج عنها 493 صورة فإن التكرار النسبى فى مجموع 2000 رمية هو $0.511 = 2000/(493 + 529)$. وطبقاً للتعريف الإحصائى ، فإنه بالاستمرار بهذا الشكل فإننا نصبح أقرب ثم أقرب إلى رقم نسميه احتمال ظهور الصورة فى رمية واحدة للعملة . من النتيجة التى حصلنا عليها هذا الرقم يجب أن يكون 0.5 إلى رقم معنوى واحد . لحصول على أرقام معنوية أكثر فإننا يجب أن نأخذ مشاهدات أخرى .

التعريف الاحصائى ، على الرغم من أنه مفيد من الناحية العملية ، إلا أن له صعوباته من وجهة النظر الرياضية ، حيث أن الرقم الذى يمثل النهاية قد لا يوجد بالفعل . لهذا السبب فإن نظرية الاحتمال الحديثة تبنى على أساس فروض حيث مفهوم الاحتمال غير معرف مثلما النقطة والخط غير معرفين فى الهندسة .

الاحتمال الشرطى . الأحداث المستقلة والتابعة :

إذا كان E_1 و E_2 حدثين ، فإن احتمال حدوث E_2 علماً بأن E_1 قد حدث فعلا يعبر عنه $Pr\{E_2 | E_1\}$ أو $Pr\{E_2 \text{ given } E_1\}$ ويسمى بالاحتمال الشرطى لـ E_2 إذا كانت E_1 حدثت بالفعل .

إذا كان حدوث أو عدم حدوث E_1 لن يؤثر على احتمال حدوث E_2 فإن $Pr\{E_2 | E_1\} = Pr\{E_2\}$ ونقول فى هذه الحالة أن E_2 و E_1 أحداث مستقلة ، وخلاف ذلك فإنهم أحداث تابعة .

إذا كانت E_2E_1 تعبر عن الحدث « كلا من E_1 , E_2 يحدثان معاً » وتسمى فى بعض الأحيان حدث مركب ، فإن

$$\Pr\{E_1E_2\} = \Pr\{E_1\}\Pr\{E_2|E_1\} \qquad (١)$$

وعلى وجه الخصوص

$$\Pr\{E_1E_2\} = \Pr\{E_1\}\Pr\{E_2\} \qquad (٢)$$
للأحداث المستقلة

ولثلاثة أحداث E_1, E_2, E_3 فإن

$$\Pr\{E_1E_2E_3\} = \Pr\{E_1\}\Pr\{E_2|E_1\}\Pr\{E_3|E_1E_2\} \qquad (٣)$$

بمعنى أن احتمال حدوث E_1, E_2, E_3 معاً يساوى احتمال حدوث E_1 مضروباً فى احتمال حدوث E_2 علماً بأن E_1 قد حدث فعلا ، مضروباً فى احتمال حدوث E_3 علماً بأن كلا من E_1 , E_2 قد حدثا بالفعل . وعلى وجه الخصوص .

$$\Pr\{E_1E_2E_3\} = \Pr\{E_1\}\Pr\{E_2\}\Pr\{E_3\} \qquad (٤)$$
للأحداث المستقلة

وبشكل عام إذا كانت $E_1, E_2, E_3, \ldots, E_n$ عدد n من الأحداث المستقلة احتمالاتها على الترتيب $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ فإن احتمال حدوث $E_1, E_2, E_3, \ldots, E_n$ هو $p_1 p_2 p_3 \ldots, p_n$

مثال ١ :

إذا كان الحدث E_1 يعبر عن « ظهور الصورة فى الرمية الخامسة لعملة » والحدث E_2 يعبر عن « ظهور الصورة فى الرمية السادسة للعملة » فإن الحدثين E_1 , E_2 أحداث مستقلة ، وبهذا فإن احتمال ظهور الصورة فى كلا الرميتين الخامسة والسادسة هو ، بافتراض أن العملة « غير متحيزة » هو

$$\Pr\{E_1E_2\} = \Pr\{E_1\}\Pr\{E_2\} = (\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{4}$$

مثال ٢ :

إذا كان احتمال أن يظل A على قيد الحياة 20 عاماً هو 0.7 واحتمال أن يظل B على قيد الحياة 20 عاماً هو 0.5 ، فأن احتمال أن يظل الإثنان على قيد الحياة 20 عاماً هو $0.35 = (0.5)\ (0.7)$.

مثال ٣ :

افترض أن صندوقاً يحتوى على 3 كور بيضاء و 2 كرة سوداء . الحدث E_1 هو « الكرة المسحوبة فى المرة الأولى سوداء » والحدث E_2 « الكرة المسحوبة فى المرة الثانية سوداء » علماً بأن الكرة التى سحبت لا تعاد مرة ثانية .

هنا E_1, E_2 أحداث تابعة .

احتمال أن تكون الكرة المسحوبة فى المرة الأولى سوداء $\Pr\{E_1\} = \frac{2}{3+2} = \frac{2}{5}$ بينما أن احتمال أن تكون الكرة المسحوبة فى المرة الثانية سوداء علماً بأن الكرق التى سحبت فى المرة الأولى كانت سوداء $\Pr\{E_2|E_1\} = \frac{1}{3+1} = \frac{1}{4}$ بهذا فإن احتمال أن تكون الكرتين لونهما أسود هو

$$\Pr\{E_1E_2\} = \Pr\{E_1\}\Pr\{E_2|E_1\} = \tfrac{2}{5} \cdot \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{10}$$

الاحداث المتنافية :

فى حدثين أو عدة أحداث إذا كان حدوث أحدها يمنع حدوث الآخر أو الآخرين فإنه يطلق عليها أحداث متنافية . بهذا إذا كانت E_1 و E_2 أحداث متنافية فإن $\Pr\{E_1E_2\} = 0$.

إذا كان $E_2 + E_2$ يمثل الحدث بأن « أياً من E_1 أو E_2 أو كلاهما يحدثان » فإن

$$\Pr\{E_1 + E_2\} = \Pr\{E_1\} + \Pr\{E_2\} - \Pr\{E_1E_2\} \qquad (٥)$$

وعلى وجه الخصوص

للأحداث المتنافية
$$\Pr\{E_1 + E_2\} = \Pr\{E_1\} + \Pr\{E_2\} \qquad (٦)$$

وكتعميم لهذا إذا كانت $E_1, E_2, \ldots, E_n$ عدد n من الأحداث المتنافية احتمال حدوثها هو على الترتيب $p_1, p_2, \ldots, p_n$ فإن احتمال حدوث

E_1 أو E_2 أو ... أو E_n هو $p_1 + p_2 + \ldots + p_n$.

مثال ١ :

E_1 يمثل الحدث « سحب آس من مجموعة أوراق اللعب « الكوتشينة » والحدث E_2 يمثل « سحب ورقة عليها صورة الملك » إذن $\Pr\{E_1\} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$ and $\Pr\{E_2\} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$. احتمال سحب ورقة تكون إما آس أو ملك هو $\Pr\{E_1 + E_2\} = \Pr\{E_1\} + \Pr\{E_2\} = \frac{1}{13} + \frac{1}{13} = \frac{2}{13}$

حيث أن الملك والآس لا يمكن أن يظهرا معاً فى سحب واحد ولهذا فهما يعدان أحداثاً متنافية .

مثال ٢ :

E_1 يمثل الحدث « سحب آس من مجموعة أوراق اللعب » « الكوتشينة » و E_2 يمثل الحدث « سحب ورقة عليها صورة القلب » إذن E_1 و E_2 لا يعدان أحداثاً متنافية حيث يمكن أن تكون الورقة آس وعليها صورة القلب . وبهذا فإن احتمال سحب ورقة وتكون آس وعليها صورة القلب أو كليهما هو

$$\begin{aligned}\Pr\{E_1 + E_2\} &= \Pr\{E_1\} + \Pr\{E_2\} - \Pr\{E_1E_2\}\\ &= \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}\end{aligned}$$

التوزيعات الاحتمالية المتقطعة :

إذا كان المتغير X يمكن أن يأخذ مجموعة مجموعة من القيم المتقطعة $X_1, X_2, \ldots, X_K$ باحتمالات $p_1, p_2, \ldots, p_K$ على الترتيب ، حيث $p_1 + p_2 + \ldots + p_K = 1$ فإنه يمكن القول أن هذا يعد تعريفاً لتوزيع احتمال متقطع للمتغير X.

الدالة $p(X)$ والتى تأخذ القيم $p_1, p_2, \ldots, p_K$ لقيم $X = X_1, X_2, \ldots, X_K$ تسمى دالة الاحتمال أو ال تكرار X . ولأن X يمكن أن تأخذ قيما معينة باحتمالات محددة ، فإنه يسمى غالباً بالمتغير العشوائى المتقطع . المتغير العشوائى يعرف أيضاً بالمتغير التصادفى .

مثـــال :

قلقت زهرتى طاولة (غير متحيزتين) فإذا كان X يعبر عن مجموع النقط التى نحصل عليها . فإن التوزيع الأحتمالى يعطى بالجدول التالى

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p(X)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

على سبيل المثال ، احتمال الحصول على مجموع 5 هو $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$ وبهذا فإنه فى 900 رمية للزهرتين فإننا نتوقع أن 100 رمية ستعطى المجموع 5 .

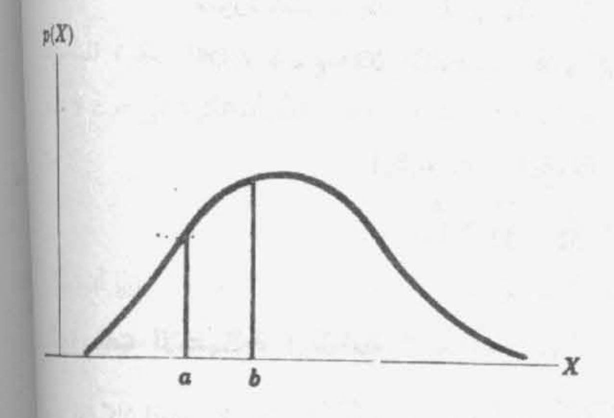
لاحظ أن هذا مناظر لتوزيع التكرارى النسبى حيث حلت الاحتمالات محل التكرارات النسبية وبهذا يمكن التفكير فى التوزيعات الاحتمالية كتوزيع نظرى أو الصورة المثالية فى النهاية للتوزيع التكرارى النسبى عندما تكون عدد المشاهدات كبير جداً . ولهذا السبب فإنه يمكن أن ننظر إلى التوزيعات الاحتمالية كتوزيعات للمجتمعات ، بينما التوزيعات التكرارية النسبية كتوزيعات للعينات المسحوبة من هذه المجتمعات .

ويمكن تمثيل التوزيعات الاحتمالية بيانياً برسم $p(X)$ مقابل X ، كما فى التوزيع التكرارى النسبى . أنظر المسألة ٦-١١

بتجميع الاحتمالات نحصل على دالة التوزيع الاحتمالى التراكمى ، والمقابلة للتوزيع التكرارى المتجمع النسبى . والدالة المرتبطة بهذا التوزيع تسمى أحياناً بدالة التوزيع .

التوزيعات الاحتمالية المتصلة :

الأفكار السابقة يمكن أن تمتد لتشمل الحالة التى يمكن أن يأخذ فيها المتغير X مجموعة من القيم المتصلة . ويعبر المضلع التكرارى النسبى للعينة ، من الناحية النظرية أو فى النهاية عن المجتمع حيث يمهد بمنحنى متصل . مثل الموضح فى الشكل ٦ - ١ . والذى تأخذ معادلته الصورة $Y = p(X)$ المساحة الكلية تحت المنحنى المحدد بالمحور X ، تساوى واحد ، والمساحة تحت المنحنى التى تقع بين الخطوط $X = a$ و $X = b$ (مظللة فى الشكل) تعطى احتمال أن X تقع بين a, b والتى يمكن التعبير عنها بـ $\Pr\{a < X < b\}$



وتسمى $p(X)$ دالة كثافة الاحتمال ، أو باختصار دالة كثافة ، وإذا أعطينا مثل هذه الدالة فإنه يمكن القول أن هذا يعد تعريفا للتوزيع الاحتمال المتصل للمتغير X . ويسمى المتغير X غالبا بمتغير عشوائى متصل .

وكما فى حالة المتغير المتقطع ، فإنه يمكن تعريف دالة التوزيع الاحتمالى التراكمى ودالة التوزيع المرتبطة بها .

التوقع الرياضى :

إذا كانت p تمثل احتمال حصول شخص على كمية من النقود S ، التوقع الرياضى ، أو ببساطة التوقع ، يعرف بأنه pS .

مثـــال :

إذا كان احتمال أن يكسب شخص جائزة قيمتها £10 هـــو $^1/_5$ ، فإن التوقع هـــو $£2 = (£10)^1/_5$.

ويمكن بسهولة تعميم مفهوم التوقع . إذا كان X يعبر عن متغير عشوائى متقطع والذى يمكن أن يأخذ القيم $X_1, X_2, \ldots, X_K$ باحتمالات $p_1, p_2, \ldots, p_K$ على الترتيب حيث $p_1 + p_2 + \ldots p_K = 1$ ، التوقع الرياضى للمتغير X أو ببساطة توقع X ، ويرمز له بالرمز $E(X)$ ، يعرف بأنه

$$E(X) = p_1X_1 + p_2X_2 + \ldots + p_KX_K = \sum_{j=1}^{K} p_jX_j = \Sigma pX \qquad (٧)$$

إذا وضعنا فى صيغة التوقع بدلا من الاحتمالات p_j ، التكرارات النسبية f_j/N حيث $N = \Sigma f_j$ فإن التوقع يختصر إلى $(\Sigma fX)/N$ وهو الوسط الحسابى $\bar{X}$ لعينة حجمها N حيث $X_1, X_2, \ldots, X_K$ تظهر مع تلك التكرارات النسبية وكلما صارت N أكبر فإن التكرارات النسبية f_j/N تقترب من الاحتمالات p_j وهذا يؤدى إلى تفسير $E(X)$ كممثل لمتوسط المجتمع التى سحبت منه العينة . فإذا رمزنا لمتوسط العينة بالرمز m فإن متوسط المجتمع المقابل يعبر عنه بالحرف اليونانى μ (ميو) .

ويمكن تعريف التوقع أيضا بالنسبة للمتغير العشوائى المستمر . ولكن التعريف يحتاج إلى استخدام علم التفاضل والتكامل .

العلاقة بين متوسط وتباين المجتمع ومتوسط وتباين العينة :

إذا سحبنا عينة عشوائية حجمها N من مجتمع (بمعنى أننا نفترض أن كل العينات ذات نفس الحجم لها نفس الفرصة فى السحب) ، فإنه من الممكن اثبات أن القيمة المتوقعة لمتوسط العينة m هو متوسط المجتمع μ .

لا يترتب على ما سبق استنتاج أن القيمة المتوقعة لأى كمية محسوبة من العينة تساوى القيمة المقابلة لها فى المجتمع . على سبيل المثال ، فإن القيمة المتوقعة لتباين العينة كما سبق أن عرفناه لا يساوى تباين المجتمع ولكن يساوى $(N - 1)/N$ مضروبا فى هذا التباين . وهذه هى الطريقة التى يختارها بعض الاحصائيين فى تعريف تباين العينة حيث يأخذون تعريفنا للتباين مضروبا فى $N/(N - 1)$.

التحليل التوافقى :

الحصول على احتمالات الحوادث المركبة يتطلب عد جميع الحالات وهذا غالبا ما يكون صعب أو ممل أو كليهما . ولتسهيل العمل المطلوب فإننا نستخدم المبادئ الأساسية للموضوع المسمى بالتحليل التوافقى .

المبادىء الأساسية :

إذا كان حدث يمكن أن يحدث بأى من n_1 طريقة إذا حدث ذلك فإن حدثا آخر يمكن أن يحدث بأى من n_2 طريقة ، فإن عدد الطرق التى يمكن أن يحدث بها الحدثان معا بهذا الترتيب هــو $n_1 n_2$.

مثـــال :

مثال : إذا كان هناك 3 مرشحين لمنصب المحافظ و 5 مرشحين لمنصب العمدة ، فإن عدد الطرق التى يمكن بها شغل الوظيفتين معا هو $15 = 3.5$ طريقة .

مضروب n :

مضروب n ، ويرمز له بالرمز $n!$ يعرف كالآتى

$$n! = n(n-1)(n-2)\dots 1 \qquad (٨)$$

وبهذا $(4.3.2.1)(3.2.1) = 144$ $4!3!$ ، 120 $5! = 5.4.3.2.1$. ومن المناسب تعريف $0! = 1$.

التباديل :

تباديل n من الأشياء المختلفة تأخذ r فى كل مرة هى تنظيمات يتركب كل منها من r مأخوذة من n من الأشياء مع الأهتمام بالترتيب فى هذه التنظيمات .

عدد تباديل n من الأشياء مأخوذة r فى المرة يرمز لها بالرمز $P_{n,r}$ أو $P(n,r)$ ، $_nP_r$ ونعرف كالآتى

$$_nP_r = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!} \qquad (٩)$$

وعلى وجه الخصوص ، عدد تباديل n شئ مأخوذة n فى المرة هــو

$$_nP_n = n(n-1)(n-2)\dots 1 = n!$$

مثـــال :

عدد تباديل الحروف a, b, c مأخوذة حرفان فى كل مرة هــو $_3P_2 = 3.2 = 6$ وهذه هى

$ab, ba, ac, ca, bc, cb.$

عدد تراتيب مجموعة من n من الأشياء مقسمة إلى n_1 من الأشياء المتشابه ، n_2 الأشياء المتشابهة و .... هو

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots} \quad \text{حيث} \quad n = n_1 + n_2 + \ldots \qquad (١٠)$$

مثـــال :

عدد تباديل الحروف فى كلمة *Statistics* هـــو $\frac{10!}{3!3!1!2!1!} = 50\,400$ حيث أنه يوجد $3\ s's$ ، $3\ t's$ ، $1\ a$ $2\ i's$ و $1\ c$.

التوافيق :

توافيق n من الأشياء المختلفة مأخوذة r فى كل مرة هى اختياوات يتركب كل منها من r من الـ n بصرف النظر عن الترتيب . عدد توافيق n من الأشياء مأخوذة r فى كل مرة يرمز لها بالرمز $_nC_r,\ C(n,r),\ C_{n,r}$ or $\binom{n}{r}$ وتعرف بما يلى :

$$_nC_r = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \frac{_nP_r}{r!} \qquad (١١)$$

مثـــال :

عدد توافيق الحروف a, b, c مأخوذة اثنان فى كل مرة هـــو $_3C_2 = \frac{3\,.\,2}{2!} = 3$

وهى ab, ac, bc . لاحظ أن ab هى نفس التوافيق مثل ba ولكنها ليست نفس التباديل .

لاحظ أن $_nC_r = {_nC_{n-r}}$. بهذا فإن $_{20}C_{17} = {_{20}C_3} = \frac{20\cdot 19\cdot 18}{3!} = 1140$ عدد توافيق n من الأشياء مأخوذة 1 أو 2 ... أو n فى كل مرة هـــو

$$_nC_1 + {_nC_2} + \cdots + {_nC_n} = 2^n - 1$$

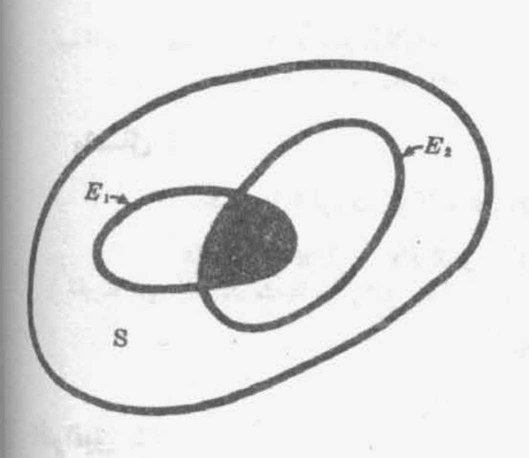
تقريب ستيرلنج لـ $n!$:

عندما تكون n كبيرة فإن حساب قيمة $n!$ مباشرة يكون غير عملى . وفى مثل هذه الحالة فإنه يمكن الاستفادة بصيغة ستيرلنج التقريبية :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n} \qquad (١٢)$$

حيث $e = 2.71828\ldots$ الأساس الطبيعى للوغاريتمات . أنظر المسألة ٦-٣٦ .

العلاقة بين الاحتمال ونظرية الفئات :



فى النظرية الحديثة للاحتمالات ، نعبر عن كل النتائج الممكنة لتجربة أو مباراة . . . . . كنقطة فى مجال (والذى يمكن أن يكون ذو بعد واحد أو بعدين أو ثلاثة أبعاد . . وهكذا) . ويسمى هذا المجال مجال العينة S (أو فراغ العينة) إذا كانت S تحتوى على عدد محدود من النقط فإنه من الممكن أن ننسب لكل نقطة رقم غير سالب يسمى بالاحتمال بحيث يكون مجموع كل هـذه الأرقام المقابلة لجميع النقط فى S هو الرقم واحد . الحدث هو فئة أو مجموعة من النقط فى S كمثال الحدث E_1 أو E_2 المشار إليهما فى الرسم ٥-٢ ، ويسمى هذا الرسم بشل أيلر أو شكل فن *Venn diagram* أو *Euler diagram* .

الحدث $E_1 + E_2$ هو مجموعة النقط التى إما تكون فى E_1 أو E_2 أو فى كليهما بينما الحدث $E_1 E_2$ مجموعة النقط المشتركة فى كل من E_1 و E_2 بهذا فإن احتمال حدث مثل E_1 هو مجموع الاحتمالات المرتبطة بجميع النقط الموجودة فى E_1 . كذلك فإن احتمال $E_1 + E_2$ ويعبر عنها $\Pr\{E_1 + E_2\}$ وهو مجموع الاحتمالات المرتبطة بجميع النقط الموجودة داخل الفئة $E_1 + E_2$. إذا لم يكن هناك نقط مشتركة بين E_1, E_2؛ بمعنى أن الأحداث متنافية ، فإن $\Pr\{E_1 + E_2\} = \Pr\{E_1\} + \Pr\{E_2\}$ أما إذا كانت هناك نقط مشتركة بينهما فإن

$$\Pr\{E_1 + E_2\} = \Pr\{E_1\} + \Pr\{E_2\} - \Pr\{E_1 E_2\}$$

الفئة $E_1 + E_2$ يرمز لها أحيانا بالرمز $E_1 \cup E_2$ وتسمى اتحاد فئتين .

الفئة $E_1 E_2$ ويرمز لها أحيانا بالرمز $E_1 \cap E_2$ وتسمى تقاطع فئتين

ومن الممكن تعميم ما سبق فى حالة وجود أكثر من فئتين . فبدلا من $E_1 + E_2 + E_3$ و $E_1 E_2 E_3$ فإنه يمكن استخدام الرموز $E_1 \cup E_2 \cup E_3$ و $E_1 \cap E_2 \cap E_3$ على الترتيب .

ويستخدم الرمز الخاص ϕ على الفئة التى لاتحتوى على أى نقط ، وتسمى بالفئة الخالية والاحتمال المرتبط بالحدث المقابل لهذه الفئة هو صفر بمعنى $\Pr\{\phi\} = 0$.

إذا كان E_2 و E_1 لايوجد بينهما نقط مشتركة ، فيمكن أن نكتب $E_1 E_2 = \phi$ والتى تعنى أن هـذه الأحداث متنافية وأن $\Pr\{E_1 E_2\} = 0$.

وفى هذا الاتجاه الحديث ، فإن المتغير العشوائى يعرف كدالة معرفة على كل نقطة فى مجال العينة ، على سبيل المثال ، فى المسألة ٦ - ٣٧ ، المتغير العشوائى هو مجموع إحداثيات كل نقطة .

وفى الحالات التى تتكون S من عدد لانهائى من النقط فإن الأفكار السابقة يمكن تعميمها باستخدام المفاهيم المعروفة فى التفاضل والتكامل .

مسائل محلولة

القواعد الاساسية للاحتمالات :

٦ – ١ حدد الاحتمال p أو تقدير له ، لكل من الأحداث التالية :

(أ) ظهور رقم فردى فى رمية واحدة لزهرة طاولة غير متحيزة .

من حالات ممكنة كل منها له نفس الفرصة فى الظهور ، 3 حالات (عندما يظهر على وجه الزهرة 5 ,3 ,1) فى صالح الحدث . إذن $p = 3/6 = 1/2$.

(ب) ظهور الصورة مرة واحدة على الأقل فى رمية عملة غير متحيزة مرتين .

إذا كانت H تعبر عن « الصورة » و T تعبر عن « الكتابة » ، فإن النتائج الممكنة فى الرميتين هى أربعة حالات لها نفس الفرصة فى الظهور وهى HH, HT, TH, TT . والثلاث حالات الأولى فقط هى التى فى صالح الحدث . إذن $p = 3/4$.

(ج) ظهور آس أو عشرة ديناري أو إثنين بستوني عند سحب ورقة واحدة من 52 ورقة من مجموعة أوراق لعب (كوتشينة) عادية مخلوطة خلطاً جيداً .

الحدث يمكن أن يتحقق فى 6 حالات (آس بستونى ، آس قلب ، آس سباتى ، آس دينارى ، عشرة دينارى وإثنين بستونى) من 52 حالة لها نفس الفرصة فى الظهور . إذن $p = 6/52 = 3/26$

(د) ظهور مجموع 7 فى رمية واحدة لظهرتين طاولة غير متحيزتين .

كل من الوجوه الستة لأحد الزهرتين يرتبط ظهوره بكل من الوجوه الستة للزهرة الأخرى ، وبهذا فإن مجموع الحالات الممكن ظهورها والتى لها نفس الفرصة فى الظهور ، هى $6.6 = 36$. وهذه يمكن التعبير عنها ، بـ

$(1, 1), (2, 1), (3, 1), \ldots, (6, 6)$

هناك 6 حالات نحصل فيها على المجموع 7 ، وهى $(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)$ (أنظر المسألة ٦ – ٣٧) إذن $p = 6/36 = 1/6$

(هـ) فى 100 رمية لعملة إذا ظهرت الصورة فى 56 رمية فإن الكتابة تظهر فى المرات الأخرى .

بما أن $44 = (100 - 56)$ صورة تظهر فى 100 رمية للعملة ، فإن الاحتمال المقدر أو الاحتمال الاعتبارى لظهور الصورة هو التكرار النسبى $44/100 = 0.44$.

٦ – ٢ تجربة مكونة من قذفه عملة وزهرة طاولة . إذا كان E_1 هو الحدث « الصورة » تظهر فى رمية العملة و E_2 الحدث « 3 أو 6 » يظهران عند رمى الزهرة ، عبر بالكلمات عن معنى كل ما يلى :

(أ) $\overline{E}_1$ ظهور كتابة على العملة وأى رقم على الزهرة .

(ب) $\overline{E}_2$ 1 أو 2 أو 4 أو 5 على الزهرة وأى شىء على العملة .

(ج) $E_1 E_2$ صورة على العملة و 3 أو 6 على الزهرة .

(د) $\Pr\{E_1\bar{E}_2\}$ احتمال ظهور صورة على العملة و 5, 4, 2, 1 على الزهرة .

(هـ) $\Pr\{E_1 | E_2\}$ احتمال الصورة على العملة علما بأن 3 أو 6 ظهرت فعلا على الزهرة .

(و) $\Pr\{\bar{E}_1 + \bar{E}_2\}$ احتمال الكتابة على العملة 5, 4, 2, 1 على الزهرة ، أو كليهما .

٦ – ٣ سحبت كرة بشكل عشوائي من صندوق به 6 كرات حمراء ، 4 كرات بيضاء ، 5 كرات زرقاء . حدد احتمال أن تكون (أ) حمراء (ب) بيضاء (ت) زرقاء (ث) ليست حمراء (ج) حمراء أو بيضاء

الحل :

اعتبر R الحدث سحب كرة حمراء ، W الحدث سحب كرة بيضاء وكذلك B الحدث سحب كرة زرقاء . إذن

(أ) $$\Pr\{R\} = \frac{\text{عدد طرق اختيار كرة حمراء}}{\text{عدد الطرق الكلية لاختيار كرة}} = \frac{6}{6+4+5} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

(ب) $$\Pr\{W\} = \frac{4}{6+4+5} = \frac{4}{15}$$

(ج) $$\Pr\{B\} = \frac{o}{6+4+5} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

(د) باستخدام (أ) $$\Pr\{\bar{R}\} = 1 - \Pr\{R\} = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

(هـ) $$\Pr\{R + W\} = \frac{\text{عدد طرق اختيار كرة حمراء أو بيضاء}}{\text{عدد الطرق الكلية لاختيار كرة}} = \frac{6+4}{6+4+5} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

طريقة اخرى :

من (٢) $$\Pr\{R + W\} = \Pr\{\bar{B}\} = 1 - \Pr\{B\} = 1 - \tfrac{1}{3} = \tfrac{2}{3}$$

لاحظ أن : $\Pr\{R + W\} = \Pr\{R\} + \Pr\{W\}$ بمعنى $\frac{2}{3} = \frac{2}{5} + \frac{4}{15}$ وهذا مثال للقاعدة العامة $\Pr\{E_1 + E_2\} = \Pr\{E_1\} + \Pr\{E_2\}$ وهذا صحيح في حالة ما إذا كانت E_2, E_1 أحداث متنافية .

٦ – ٤ قذفت زهرة غير متميزة مرتين . أوجد احتمال الحصول على 4 أو 5 أو 6 في المرة الأولى و 1 أو 2 أو 3 أو 4 في المرة الثانية .

الحل :

اعتبر E_1 = الحدث « 4 أو 5 أو 6 » في الرمية الأولى ، E_2 = الحدث « 1 أو 2 أو 3 أو 4 » في الرمية الثانية .

وبما أن كل من الستة أوجه التى يمكن أن تقع عليها الزهرة فى المرة الأولى ترتبط بكل من الستة أوجه التى يمكن أن تقع عليها الزهرة فى المرة الثانية . فإن عدد الطرق الممكنة والتى لها نفس الفرصة فى الظهور هى $36 = 6.6$ طريقة كل من الطرق الثلاث التى يظهر E_1 ترتبط بكل من الطرق الأربع التى يمكن أن يظهر بها E_2 وهذا يعطى $12 = 3.4$ طريقة يمكن أن تحدث بها E_1 و E_2 معاً أو E_1E_2 .

إذن $\Pr\{E_1E_2\} = 12/36 = 1/3$.

لاحظ أن $^4/_6 \cdot {}^3/_6 = {}^1/_3$ بمعنى $\Pr\{E_1E_2\} = \Pr\{E_1\}\Pr\{E_2\}$

وهذه الصيغة صحيحة إذا كانت E_1 و E_2 أحداثاً مستقلة .

٦ – ٥ سحب كارتان من مجموعة أوراق لعب عادية مكونة من 52 كارتاً ومخلوطة خلطاً جيداً . أوجد احتمال أن يكون كلاهما آس إذا كان الكارت الأول (أ) أعيد إلى المجموعة (ب) لم يعد إلى المجموعة .

الحـل :

اعتبر E_1 = الحدث « آس » فى السحبة الأولى ، E_2 = الحدث « آس » فى السحبة الثانية .

(أ) إذا أعيد الكارت الأول إلى المجموعة فإن E_1 و E_2 أحداث مستقلة إذن

$$\Pr(\text{الكارتان المسحوبان آس}) = \Pr\{E_1E_2\} = \Pr\{E_1\}\Pr\{E_2\} = (4/52)(4/52) = 1/169$$

(ب) الكارت الأول يمكن أن يسحب بـ 52 طريقة ، الكارت الثانى يمكن أن يسحب بـ 51 طريقة حيث أن الكارت الأول لن يعاد . بهذا فإن عدد طرق سحب كارتين هو 52.51 طريقة كلها لها نفس الفرصة فى الظهور .
بما أن هناك 4 طرق يمكن أن يحدث بها E_1 و 3 طرق يمكن أن يحدث بها E_2 وبهذا فإن كلا من E_1 وE_2 أو $E_1 E_2$ يمكن أن يحدثا بـ 4.3 طرق . إذن $\Pr\{E_1E_2\} = \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} = \frac{1}{221}$.
لاحظ أن $3/51 =$ (الكارت الثانى آس علماً بأن الكارت الأول آس) $\Pr = \Pr\{E_2|E_1\}$ وهذه النتيجة إيضاح القاعدة العامة $\Pr\{E_1E\} = \Pr\{E_1\} \Pr(E_2|E_1\}$ فى حالة ما إذا كانت E_1 و E_2 إحداثاً مستقلة .

٦ – ٦ سحبت ثلاث كرات على التوالى من الصندوق المشار إليه (بالمسألة ٦ – ٣)

أوجد احتمال أن يكون سحبوا بالترتيب أحمر ، أبيض وأزرق إذا كانت كل كرة مسحوبة (أ) تعاد مرة أخرى إلى الصندوق (ب) لاتعاد .

الحـل :

اعتبر R = الحدث « أحمر » فى السحبة الأولى W = الحدث « أبيض » فى السحبة الثانية ، B = الحدث « أزرق » فى السحبة الثالثة

والمطلوب $\Pr\{RWB\}$.

(أ) إذا أعيدت كل كرة بعد سحبها فإن $R,\ W,\ B$ تعد أحداثاً مستقلة وبهذا فإن

$$\Pr\{RWB\} = \Pr\{R\}\ \Pr\{W\}\ \Pr\{B\} = \left(\frac{6}{6+4+5}\right)\left(\frac{4}{6+4+5}\right)\left(\frac{5}{6+4+5}\right) = \left(\frac{6}{15}\right)\left(\frac{4}{15}\right)\left(\frac{5}{15}\right) = \frac{8}{225}$$

(ب) إذا لم تعد الكرة بعد سحبها ، فإن $B,\ W,\ R$ تعد أحداثاً تابعة وبهذا فإن

$$\Pr\{RWB\} = \Pr\{R\}\Pr\{W|R\}\Pr\{B|WR\} = \left(\frac{6}{6+4+5}\right)\left(\frac{4}{5+4+5}\right)\left(\frac{5}{5+3+5}\right)$$
$$= \left(\frac{6}{15}\right)\left(\frac{4}{14}\right)\left(\frac{5}{13}\right) = \frac{4}{91}$$

حيث $\Pr\{B|WR\}$ هو احتمال الشرطي للحصول على كرة زرقاء إذا كانت كرة بيضاء وكرة حمراء قد تم اختيارهما بالفعل .

٦ – ٧ فى رمية زهرة غير متميزة مرتين أوجد احتمال ظهور الرقم 4 مرة واحدة على الأقل .

الحـل :

إذا كانت E_1 = الحدث « 4 » فى الرمية الأولى ،

E_2 = الحدث « 4 » فى الرمية الثانية .

$E_1 + E_2$ = الحدث « 4 » فى الرمية الأولى أو « 4 » فى الرمية الثانية أو فى كليهما .

= الحدث ظهور « 4 » مرة واحدة على الأقل

المطلوب هو $\Pr\{E_1 + E_2\}$

الطريقة 1 :

عدد الطرق الممكنة والتى لها نفس الفرصة فى الظهور والتى يمكن أن تقع بها الزهرتان $= 6.6 = 36$

كذلك ، عدد الطرق التى يحدث بها E_1 وليس $E_2 = 5$.

عدد الطرق التى يحدث بها E_2 وليس $E_1 = 5$.

عدد الطرق التى يحدث بها لكل من $E_1,\ E_2 = 1$.

بهذا فإن عدد الطرق التى يمكن أن يحدث بها على الأقل أحد الحدثين E_1 أو $E_2 = 11 = 1 + 5 + 5$

بحيث $\Pr\{E_1 + E_2\} = 11/36$.

الطريقة 2 :

بما أن E_1 و E_2 ليست أحداثاً متنافية فإن $\Pr\{E_1 + E_2\} = \Pr\{E_1\} + \Pr\{E_2\} - \Pr\{E_1E_2\}$

كذلك ، بما أن E_1 و E_2 أحداثاً مستقلة $\Pr\{E_1E_2\} = \Pr\{E_1\}\Pr\{E_2\}$

إذن $\Pr\{E_1 + E_2\} = \Pr\{E_1\} + \Pr\{E_2\} - \Pr\{E_1\}\Pr\{E_2\} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{11}{36}$

الطريقة 3 :

إذن $\Pr$ { ظهور الرقم « 4 » على الأقل مرة } + $\Pr$ { عدم ظهور الرقم « 4 » } = 1

$\Pr$ { ظهور الرقم « 4 » على الأقل مرة } = 1 — $\Pr$ { عدم ظهور الرقم « 4 » }

= 1 — $\Pr$ { عدم ظهور « 4 » فى الرمية الأولى وعدم ظهور « 4 » فى الرمية الثانية } =

$$= 1 - \Pr\{\bar{E}_1\bar{E}_2\} = 1 - \Pr\{\bar{E}_1\}\Pr\{\bar{E}_2\}$$
$$= 1 - (\tfrac{5}{6})(\tfrac{5}{6}) = \tfrac{11}{36}.$$

٦ - ٨ كيس يحتوى على « 4 » كرات بيضاء ، « 2 » كرة سوداء ، وكيس آخر يحتوى على 3 كرات بيضاء ، 5 كرات سوداء . إذا سحبت كرة من كل كيس ، أوجد احتمال :

(أ) كلا الكرتين لونهما أبيض .

(ب) كلا الكرتين لونهما أسود .

(جـ) كرة بيضاء و كرة سوداء .

الحـــل :

إذا كانت W_1 = الحدث كرة « بيضاء » من الكيس الأولى ،

W_2 = الحدث كرة « بيضاء » من الكيس الثانى .

(أ) $\Pr\{W_1W_2\} = \Pr\{W_1\}\Pr\{W_2\} = (\tfrac{4}{4+2})(\tfrac{3}{3+5}) = \tfrac{1}{4}$

(ب) $\Pr\{\bar{W}_1\bar{W}_2\} = \Pr\{\bar{W}_1\}\Pr\{\bar{W}_2\} = (\tfrac{2}{4+2})(\tfrac{5}{3+5}) = \tfrac{5}{24}$.

(جـ) الحدث « كرة بيضاء و كرة سوداء » مثل الحدث « أما الكرة الأولى بيضاء والثانية سوداء أو الكرة الأولى سوداء والثانية بيضاء » بمعنى ، $W_1\bar{W}_2 + \bar{W}_1W_2$. بما أن الأحداث $W_1\bar{W}_2,\ \bar{W}_1W_2$ أحداث متنافية ، فإن

$$\Pr\{W_1\bar{W}_2 + \bar{W}_1W_2\} = \Pr\{W_1\bar{W}_2\} + \Pr\{\bar{W}_1W_2\}$$
$$= \Pr\{W_1\}\Pr\{\bar{W}_2\} + \Pr\{\bar{W}_1\}\Pr\{W_2\} = (\tfrac{4}{4+2})(\tfrac{5}{3+5}) + (\tfrac{2}{4+2})(\tfrac{3}{3+5}) = \tfrac{13}{24}$$

طريقة اخرى :

الاحتمال المطلوب هو $1 - \Pr\{W_1W_2\} - \Pr\{\bar{W}_1\bar{W}_2\} = 1 - \tfrac{1}{4} - \tfrac{5}{24} = \tfrac{13}{24}$

٦ - ٩ لعب A و B ، 12 دوراً فى مباراة الشطرنج كسب A ، 6 منها و B ، 4 وتعادلا فى مرتين . وقد اتفقا أن يلعب 3 أدواراً أخرى .

أوجد احتمال (أ) A يكسب المباريات الثلاث . (ب) انتهاء مباريتين بالتعادل (جـ) A و B يكسبان بالتبادل (د) B يكسب مباراة على الأقل .

الحـــل :

اعتبر أن A_1, A_2, A_3 تمثل الأحداث « A يكسب » فى المباراة الأولى A_1 ، فى المباراة الثانية A_2 ، فى المباراة الثالثة A_3 .

B_1, B_2, B_3 تمثل الأحداث « B يكسب » فى المباراة الأولى B_1 ، فى المباراة الثانية B_2 ، فى المباراة الثالثة B_3 .

و T_1, T_2, T_3 تمثل الأحداث « التعادل » فى المباراة الأولى T_1 ، فى المباراة الثانية T_2 ، فى المباراة الثالثة T_3 .

على ضوء الخبرة السابقة (احتمال اعتبارى) فسنفرض أن

$\Pr \{$ A يكسب مباراة $\} = 6/12 = 1/2$

$\Pr \{$ B يكسب مباراه $\} = 4/12 = 1/3$

$\Pr \{$ انتهاء أى مباراة بالتعادل $\} = 2/12 = 1/6$

(أ) $\Pr \{$ A يكسب جميع المباريات $\} = \Pr \{A_1 A_2 A_3\} = \Pr\{A_1\} \Pr\{A_2\} \Pr\{A_3\} = (\frac{1}{2})(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}) = \frac{1}{8}$

وذلك بافتراض أن نتيجة كل مباراة مستقلة عن نتيجة المباريات السابقة ، وهــذا الفرض يبدو منطقياً (إلا لو اعتبرنا أن اللاعبين يتأثرون نفسياً بفوز أو خسارة اللاعب الآخر فى المباريات السابقة) .

(ب) $\Pr$ (انتهاء مبارتين بالتعادل) $=$

$= \{$ انتهاء المبارتين الأولى والثانية أو الأولى والثالثة أو الثانية والثالثة بالتعادل $\}$

$$\begin{aligned}
&\Pr\{T_1 T_2 \bar{T}_3\} + \Pr\{T_1 \bar{T}_2 T_3\} + \Pr\{\bar{T}_1 T_2 T_3\} \\
&\Pr\{T_1\} \Pr\{T_2\} \Pr\{\bar{T}_3\} + \Pr\{T_1\} \Pr\{\bar{T}_2\} \Pr\{T_3\} + \Pr\{\bar{T}_1\} \Pr\{T_2\} \Pr\{T_3\} \\
&(\tfrac{1}{6})(\tfrac{1}{6})(\tfrac{5}{6}) + (\tfrac{1}{6})(\tfrac{5}{6})(\tfrac{1}{6}) + (\tfrac{5}{6})(\tfrac{1}{6})(\tfrac{1}{6}) = 15/216 = 5/72.
\end{aligned}$$

(جـ) $= \{$ B و A يكسبان بالتبادل $\}$ $\Pr$

$= \{$ A يكسب ثم B يكسب ثم A يكسب أو B يكسب ثم A يكسب ثم B يكسب $\}$ $\Pr$

$$\begin{aligned}
&= \Pr\{A_1 B_2 A_3 + B_1 A_2 B_3\} = \Pr\{A_1 B_2 A_3\} + \Pr\{B_1 A_2 B_3\} \\
&= \Pr\{A_1\} \Pr\{B_2\} \Pr\{A_3\} + \Pr\{B_1\} \Pr\{A_2\} \Pr\{B_3\} \\
&= (\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{3})(\tfrac{1}{2}) + (\tfrac{1}{3})(\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{3}) = 5/36.
\end{aligned}$$

(د) $\{$ B يخسر جميع المباريات $\}$ $\Pr - 1 = \{$ B يكسب مباراة على الأقل $\}$ $\Pr$

$$\begin{aligned}
&= 1 - \Pr\{\bar{B}_1 \bar{B}_2 \bar{B}_3\} = 1 - \Pr\{\bar{B}_1\} \Pr\{\bar{B}_2\} \Pr\{\bar{B}_3\} \\
&= 1 - (\tfrac{2}{3})(\tfrac{2}{3})(\tfrac{2}{3}) = 19/27.
\end{aligned}$$

التوزيعات الاحتمالية :

٦–١٠ أوجد احتمال وجود أولاد وبنات فى عائلات مكونة من 3 أطفال ، مفترضاً تساوى احتمال الأولاد والبنات

الحـــل :

اعتبر أن B الحدث « وجود ولد فى العائلة » .

G = الحدث « وجود بنت فى العائلة » .

وطبقاً للفرض الخاص بتساوى الاحتمالات فإن $\Pr\{B\} = \Pr\{G\} = ½$.

فى عائلات مكونة من 3 أطفال فإن الأحداث المتنافية يمكن أن تقع حسب الاحتمالات الموضحة :

(أ) ثلاثة أولاد (BBB) . إذن $\Pr\{BBB\} = \Pr\{B\}\Pr\{B\}\Pr\{B\} = \frac{1}{8}$

وقد افترضنا هنا أن ولادة ولد لن تتأثر بكون الطفل السابق ولد ، أى افترضنا أن الأحداث مستقلة .

(ب) ثلاث بنات (GGG) . إذن كما فى (أ) أو بالتماثل $\Pr\{GGG\} = 1/8$

(جـ) ولدان وبنت $(BBG + BGB + GBB)$. إذن

$$\begin{aligned}\Pr\{BBG + BGB + GBB\} &= \Pr\{BBG\} + \Pr\{BGB\} + \Pr\{GBB\}\\ &= \Pr\{B\}\Pr\{B\}\Pr\{G\} + \Pr\{B\}\Pr\{G\}\Pr\{B\} + \Pr\{G\}\Pr\{B\}\Pr\{B\}\\ &= \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} = \tfrac{3}{8}.\end{aligned}$$

(د) بنتان وولد $(GGB + GBG + BGG)$. كما فى (جـ) أو بالتماثل ، الاحتمال يساوى $3/8$.

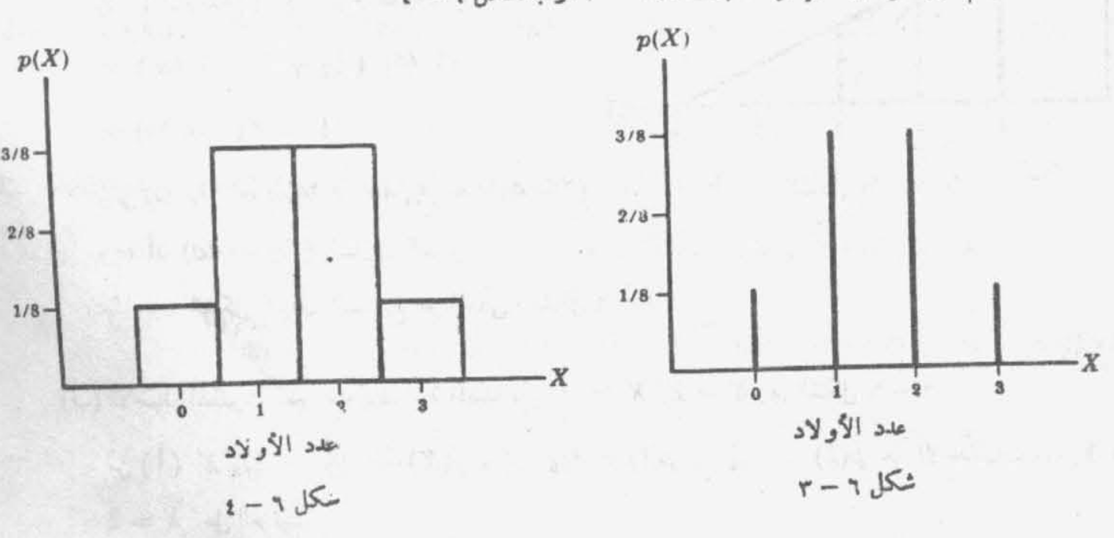
إذا أخذنا X كمتغير عشوائى يعبر عن عدد الأولاد فى العائلات المكونة من ثلاثة أطفال ، يعبر عن التوزيع الاحتمالى كما هو موضح بالجدول

Number of boys X	0	1	2	3
Probability $p(X)$	1/8	3/8	3/8	1/8

٦–١١ مثل بيانياً توزيع المسألة ٦ – ١٠ .

الحـــل :

الرسم البيانى يمكن أن يمثل أما بالشكل ٦ – ٣ أو بالشكل ٦ – ٤



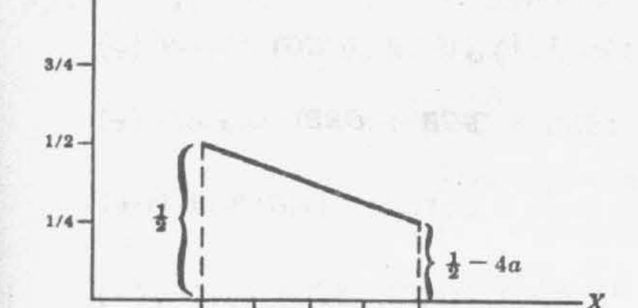
شكل ٦ – ٤ شكل ٦ – ٣

لاحظ أن مجموع مساحات المستطيلات فى الشكل ٦ – ٤ أعلاه هو واحد . فى الشكل السابق ، ويسمى بالمضلع الاحتمالى ، نعتبر المتغير X كمتغير متصل على الرغم من أن المتغير أصلا متغير متقطع وهذه الطريقة تعد مفيدة أحياناً . الشكل ٦ – ٣ ، فى الناحية الأخرى ، يستعمل عندما لانريد اعتبار المتغير كمتغير متصل .

٦ - ١٢ المتغير المتصل X يأخذ قيما بين الصفر و 4 ودالة كثافة احتماله هى $p(X) = ½ - aX$ ، حيث a مقدار ثابت .

(أ) احسب قيمة a .

(ب) أوجد $\Pr\{1 < X < 2\}$.



الشكل ٦ - ٥

الحــل :

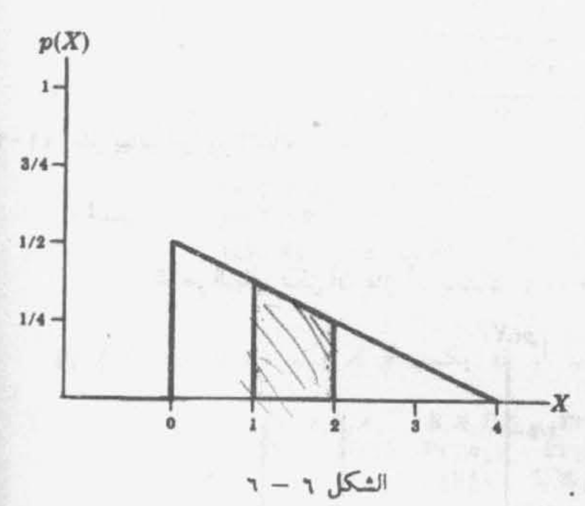
(أ) الرسم البيانى لـ $p(X) = ½ - aX$ هو خط مستقيم كما هو موضـح بالشكل ٦ - ٥ .

للحصول على قيمة a ، فإننا يجب أن نتأكد من إن المساحة الكلية المحصورة بين الخط $X = 0$, $X = 4$ وأعلى المحور X يجب أن تساوى واحداً .

عند $X = 0$ فإن $p(X) = ½$

عند $X = 4$ فإن $p(X) = ½ - 4a$

إذن يجب اختيار a بحيث تكون مساحة الشكل الرباعى = 1 .



الشكل ٦ - ٦

مساحة الشــكل الرباعى =

½ (الارتفاع) (مجموع القواعد) .

$= ½ (4) (½ + ½ - 4a)$

$= 2(1 - 4a) = 1$

ومن ذلك $(1 - 4a) = ½, 4a = ½, a = {}^1/_8$.

وبما أن $(½ - 4a)$ تساوى الصفر

بهذا فإن الشكل البيانى الصحيح هو المعطى بالشكل ٦ - ٦ .

(ب) الاحتمال المطلوب معبر عنه بالمساحة المظللة بين $X = 1$ ، $X = 2$ فى الشكل ٦ - ٦ .

من (أ) $p(X) = ½ - {}^1/_8 X$ ، إذن $p(1) = {}^3/_8$ و $p(2) = ¼$ هى الاحداثيات عند $X = 1$ ، $X = 2$ على الترتيب .

مساحة الشكل الرباعى المطلوب هى $½(1) ({}^3/_8 + ¼) = {}^5/_{16}$

وهو الاحتمال المطلوب .

التوقع الرياضى :

٦ – ١٣ اشترى شخص ورقة يانصيب واحتمال أن يكسب الجائزة الأولى وقدرها £5000 أو الثانية وقدرها £2000 هو 0.001 للأولى و 0.003 للثانية ماهو السعر العادل الذى يمكن دفعه فى هذه الورقة .

الحـل :

$$\text{التوقع} = (£5000)(0{\cdot}001) + (£2000)(0{\cdot}003) = £5 + £6 = £11$$

وهو السعر العادل الذى يجب دفعه .

٦ – ١٤ فى تجارة معينة تتضمن مخاطرة يمكن أن يكسب شخص £300 باحتمال 0.6 أو يتكبد خسارة £100 باحتمال 0.4 حدد القيمة المتوقعة بالنسبة له .

الحـل :

$$\text{التوقع} = (£300)(0{\cdot}6) - (£100)(0{\cdot}4) = £180 - £40 = £140$$

٦ – ١٥ أوجد (أ) $E(X)$ (ب) $E(X^2)$ (جـ) $E[(X-\bar{X})^2]$ للتوزيع الاحتمال التالى :

X	8	12	16	20	24
$p(X)$	1/8	1/6	3/8	1/4	1/12

الحـل :

(أ) $E(X) = \Sigma X p(X) = (8)(1/8) + (12)(1/6) + (16)(3/8) + (20)(1/4) + (24)(1/12) = 16$

وهذا يمثل متوسط هذا التوزيع

(ب) $E(X^2) = \Sigma X^2 p(X) = (8)^2(1/8) + (12)^2(1/6) + (16)^2(3/8) + (20)^2(1/4) + (24)^2(1/12) = 276$

وهذا يمثل العزم الثانى حول نقطة الأصل صفر .

$$E[(X-\bar{X})^2] = \Sigma(X-\bar{X})^2 p(X)$$
$$= (8-16)^2(1/8) + (12-16)^2(1/6) + (16-16)^2(3/8) + (20-16)^2(1/4) + (24-16)^2(1/12) = 20$$

وهذا يمثل تباين هذا التوزيع .

٦ – ١٦ كيس يحتوى على 2 كرة بيضاء و 3 كرات سوداء . أربعة أشخاص A, B, C, D وحسب ترتيب أسمائهم قام كل منهم بسحب كرة والكرة المسحوبة لاتعاد ثانية الأول الذى يسحب كرة بيضاء يحصل على £ 20 . حدد توقع كل منهم .

الحـــل :

بما أن هناك 3 كرات سوأداء فقط ، فإن شخصاً منهم سيكسب فى أول محاولة له . استخدم A, B, C, D للدلالة على الأحداث « A يكسب » « B يكسب » « C يكسب » « D يكسب » على الترتيب .

$\Pr\{A \text{ wins}\} = \Pr\{A\} = \frac{2}{3+2} = \frac{2}{5}$. $\Pr\{$ A يكسب . بهذا فإن توقع A $£4$ $\frac{2}{5}(£10)$

$\Pr\{$ A يخسرو B يكسب $\} =$ $\Pr\{\bar{A}B\} = \Pr\{\bar{A}\}\Pr\{B|\bar{A}\}$ $(\frac{3}{5})(\frac{2}{4})$ $\frac{3}{10}$.

وبهذا فإن توقع $B = £3$

$\Pr\{$ A يخسرو B يخسر و C يكسب $\} =$ $\Pr\{\bar{A}\bar{B}C\} = \Pr\{\bar{A}\}\Pr\{\bar{B}|\bar{A}\}\Pr\{C|\bar{A}\bar{B}\} = (\frac{3}{5})(\frac{2}{4})(\frac{2}{3}) = \frac{1}{5}$.

وبهذا فإن توقع $C = £2$

$$\Pr\{\bar{A}\bar{B}\bar{C}D\} = \Pr\{\bar{A}\}\Pr\{\bar{B}|\bar{A}\}\Pr\{\bar{C}|\bar{A}\bar{B}\}\Pr\{D|\bar{A}\bar{B}\bar{C}\}$$
$$= (\tfrac{3}{5})(\tfrac{2}{4})(\tfrac{1}{3})(\tfrac{1}{1}) = \tfrac{1}{10}$$

$\Pr\{$ A يخسرو B يخسرو C يخسر و D يكسب $\} =$

وبهذا فإن توقع $D = £1$.

مراجعة : $£4 + £3 + £2 + £1 = £10 \text{ and } \frac{2}{5} + \frac{3}{10} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = 1$

التباديل :

٦ – ١٧ بكم طريقة يمكن ترتيب 5 من البلى المختلفة الألوان فى صف ؟

الحـــل :

يجب أن ترتيب البليات الخمس فى خمس أماكن أى : . . . .

المكان الأول يمكن شغله بأى من البليات الخمس ، بمعنى ، هناك خمس طرق لشغل المكان الأول ، فإذا فعلنا ذلك فإن هناك 4 طرق لشغل المكان الثانى . ثم بعد ذلك هناك 3 طرق لشغل المكان الثالث ، طريقتان لشـــغل المكان الرابع وأخيراً طريقة واحدة لشغل المكان الأخير . وبهذا

$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$ = عدد طرق ترتيب 5 بليات فى صف

وبشكل عام

$n(n-1)(n-2)\ldots 1 = n!$ = عدد طرق ترتيب n من الأشياء المختلفة فى صف وهذه تسمى أيضاً عدد طرق ترتيب n من الأشياء المختلفة مأخوذة n فى كل مرة ويرمز لها بالرمز $_nP_n$.

٦ – ١٨ كم عدد طرق إجلاس 10 أشخاص على مقعد به 4 أماكن فقط ؟

الحـــل :

المكان الأول يمكن شغله بأى من 10 طرق وإذا تم ذلك فإن هناك 9 طرق لشغل المكان الثانى ، 8 طرق لشغل المكان الثالث ، 7 طرق لشغل المكان الرابع .

وبهذا $5040 = 10.9.8.7 =$ عدد طرق ترتيب 10 أشخاص مأخوذة بين 4 فى المرة

وبشكل عام

$n(n-1)\ldots(n-r+1) =$ عدد طرق ترتيب n من الأشياء المختلفة مأخوذة r فى المرة وهذا يسمى أيضاً عدد تباديل n من الإشياء المختلفة مأخوذة r فى كل مرة ويرمز لها بالرمز $P_{n,r}$ و $P(n,r)$ ، $_nP_r$.

لاحظ أنه عندما $r = n$ فإن $_nP_n = n!$ كما فى المسألة ٦ – ١٧ .

٦ – ١٩ أحسب (أ) $_8P_3$ (ب) $_6P_4$ (ت) $_{15}P_1$ (ث) $_3P_3$

الحــل :

(أ) $_8P_3 = 8.7.6 = 336$ (ب) $_6P_4 = 6.5.4.3 = 360$ (جـ) $_{15}P_1 = 15$ (د) $_3P_3 = 3.2.1 = 6$

٦ – ٢٠ من المطلوب إجلاس 5 رجال و 4 نساء فى صف بحيث يشغل النساء الأماكن ذات الأرقام الزوجية . ماهو عــدد التراتيب الممكنة ؟

الحــل :

عدد طرق إجلاس الرجال هو $_5P_5$ والنساء $_4P_4$. كل ترتيب للرجال يمكن أن يرتبط بكل ترتيب للنساء .

بهذا فإن عدد التراتيب الممكنة $= {}_5P_5 \cdot {}_4P_4 = 5!\,4! = (120)(24) = 2880$

٦ – ٢١ كم من الأعداد المكونة من 4 أرقام يمكن تكوينها من الـ 10 أرقام $0, 1, 2, 3, \ldots, 9$ إذا كانت :

(أ) يسمح بتكرار الرقم

(ب) غير مسموح بتكرار الرقم

(جـ) الرقم الأخير يجب أن يكون صفراً وغير مسموح بتكرار الأرقام .

الحــل :

(أ) الرقم الأول يمكن أن يكون أى رقم من 9 أرقام (حيث أن الصفر غير مسموح به) الرقم الثانى ، الرقم الثالث والرابع يمكن أن يكون أى رقم من الارقام العشرة . إذن $9000 = 10 . 10 . 10 . 9$ رقم يمكن تكوينهم .

(ب) الرقم الأول يمكن أن يكون أى رقم من 9 أرقام (حيث أن الصفر غير مسموح به)

الرقم الثانى يمكن أن يكون أى رقم من 9 أرقام (أى رقم ماعداً الذى ظهر فى الخانة الأولى)

الرقم الثالث يمكن أن يكو نأى رقم من 8 أرقام (أى رقم ماعداً الذى ظهر فى الخانتين الأولى والثانية) .

الرقم الرابع يمكن أن يكون أى رقم من 7 أرقام (أى رقم ماعد الذى ظهر فى الخانات الثلاث الأولى)

إذن $4536 = 9.9.8.7$ عدد يمكن تكوينه .

طريقة اخرى :

الرقم الأول يمكن أن يكون أي رقم من 9 الخانات الثلاث الأخرى يمكن اختيارها بـ $_9P_3$ طريقة .

إذن $4536 = 9.9.8.7 = {}_9P_3 .9$ عدد يمكن تكوينه .

(جـ) الرقم الأول يمكن اختياره بـ 9 طرق ، الثاني بـ 8 طرق والثالث بـ $_8P_3$ طرق .

إذن $504 = 9.8.7$ عدد يمكن تكوينه .

طريقة اخرى :

الرقم الأول يمكن اختياره بـ 9 طرق والرقمان التاليان يمكن اختيارهما بـ $_8P_2$ طرق .

إذن $504 = 9.8.7 = {}_8P_2\ 9$ عدد يمكن تكوينه .

٦ - ٢٢ أربعة كتب مختلفة في الرياضة ، ستة كتب مختلفة في الطبيعة وكتابان مختلفان في الكيمياء مطلوب ترتيبهما على رف . ماهي عدد التراتيب المختلفة والممكنة إذا .

(أ) توضع الكتب المتعلقة بنفس الموضوع متجاورة .

(ب) كتب الرياضة فقط هي التي يجب أن توضع متجاورة .

الحـل :

(أ) عدد طرق ترتيب كتب الرياضة فيما بينها هي $_4P_4 = 4!$ طريقة ، وعدد طرق ترتيب كتب الطبيعة هو $_6P_6 = 6!$ طريقة وكتب الكيمياء $_2P_2 = 2!$ طريقة وعدد طرق ترتيب المجموعات الثلاث هو $_3P_3 = 3!$

بهذا فإن عدد التراتيب الممكنة هو $4!\ 6!\ 2!\ 3! = 207\ 360$

(ب) يمكن اعتبار كتب الرياضة الأربعة ككتاب واحد كبير . بهذا يكون لدينا 9 كتب والتي يمكن ترتيبها بـ $_9P_9 = 9!$ طريقة . في كل من هذه الطرق توضع كتب الرياضة معاً . ويكون عدد طرق ترتيب كتب الرياضة فيما بينهما هو $_4P_4 = 4!$ طريقة ، إذن .

عـدد التراتيب المطلوبة $= 9!\,4! = 8709\ 120$.

٦ - ٢٣ رتب في صف خمساً من البلى الأحمر واثنين من البلى الأبيض وثلاثاً من البلى الأزرق . إذا كان البلى من نفس اللون لايمكن تمييزه من بعض ، فاهو عدد التراتيب المختلفة الممكنة :

الحـل :

نفترض أن هناك P من التراتيب المختلفة . بضرب P في عدد طرق تراتيب

(أ) البلى الخمس الأحمر فيما بينها .

(ب) إثنان من البلى الأبيض فيما بينها .

(جـ) الثلاثة من البلى الأزرق فيما بينها .

(بمعنى ضرب P فى $5!\,2!\,3!$) ، ثم نحصـــل على عدد طرق ترتيب 10 من البلى إذا كانت كل بلية متميزة عن الأخرى وهى $10!$.

إذن $P = 10!/(5!\,2!\,3!)$ و $P = 10!$ $(5!2!3!)$

وبشكل عام ، عدد طرق التراتيب المختلفة لـ n من الأشياء مقسمة إلى n_1 من الأشياء المتشابهة n_2 من الأشياء المتشابهة $n_k, \ldots$ من الأشياء المتشابهة هى $\frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!}$ حيث $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$

٦ – ٢٤ بكم طريقة يمكن أن يجلس 7 من الأشخاص حول مائدة دائرية إذا :

(أ) يمكن أن يجلسوا فى أى مكان . (ب) شخصان معينان يجب أن لايجلسوا متجاورين .

الحـــل :

(أ) اعتبر أن واحداً منهم يمكن أن يجلس فى أى مكان . وبهذا فإن الـ 6 أشخاص الباقين يمكن أن يجلسوا بـ $6! = 720$ طريقة ، وهو عدد طرق ترتيب 7 أشخاص فى دائرة .

(ب) اعتبر أن الشخصين المعينين كشخص واحد . وبهذا سيكون هناك 6 أشخاص يمكن ترتيبهم بـ $5!$ ولكن الشخصين اللذين اعتبرناهما كشخص واحد يمكن ترتيبهما فيما بينهم بـ $2!$ طريقة . وبهذا فإن عدد طرق ترتيب 6 أشخاص حول مائدة مستديرة بحيث يجلس شخصان معينان معاً $5!\,2! = 240$ باستخدام (أ) ، عدد الطرق التى يمكن أن يجلس بها 6 أشخاص حول مائدة مستديرة بحيث أن شخصين معينين لايجلسان بجوار بعضهما هو $480 = 720 - 240 =$ طريقة .

التباديل :

٦ – ٢٥ ماهى عدد الطرق التى يمكن أن يقسم بها 10 أشياء إلى مجموعتين مكونتين من 4 و 6 أشياء على الترتيب ؟

الحـــل :

هذه مثل عدد تراتيب 10 من الأشياء حيث 4 أشياء متشابهة فيما بينهما و 6 أشياء أخرى متشابهة فيما بينها .

من المسألة ٦ – ٢٣ النتيجة هى $\frac{10!}{4!\,6!} = \frac{10.9.8.7}{4!} = 210$

هـــذه المشكلة مكافئة لمشكلة الحصول على عدد اختيارات 4 من 10 من الأشياء (أو 6 من 10 من الأشياء) وذلك بدون أهمية لترتيب الاختيار .

وبشكل عام عـــدد اختيارات r من n من الأشياء ، ويسمى عدد تباديل n من الأشياء مأخوذة r فى المرة يرمزلها بالرمز $\binom{n}{r}$ ، $C(n, r)$ ، ${}_nC_r$ ويعطى بالصيغة .

$${}_nC_r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{r!} = \frac{{}_nP_r}{r!}$$

٦ - ٢٦ احسب (أ) $_7C_4$ (ب) $_6C_5$ (جـ) $_4C_4$

الحـل :

(أ) $${}_7C_4 = \frac{7!}{4!\,3!} = \frac{7.6.5.4}{4!} = \frac{7.6.5}{3.2.1} = 35$$

(ب) $${}_6C_5 = \frac{6!}{5!\,1!} = \frac{6.5.4.3.2}{5!} = 6, \text{ or } {}_6C_5 = {}_6C_1 = 6$$

(جـ) $_4C_4$ هو عدد اختيارات 4 أشياء مأخوذة كلها مرة واحدة .

إذن $_4C_4 = 1$.

لاحظ أن $_4C_4 = \frac{4!}{4!\,0!} = 1$ إذا عرفنا $0! = 1$.

٦ - ٢٧ كم طرق اختيار لجنة مكونة من 5 من 9 أشخاص ؟

الحـل :

$${}_9C_5 = \frac{9!}{5!\,4!} = \frac{9.8.7.6.5}{5!} = 126$$

٦ - ٢٨ من بين 5 من علماء الرياضة و 7 من علماء الطبيعة ، المطلوب تشكيل لجنة تكون من 2 من علماء الرياضة و 3 من علماء الطبيعة . بكم طريقة يمكن أن يتم ذلك إذا ،

(أ) أى عالم رياضى أو عالم طبيعى يمكن دخوله اللجنة .

(ب) عالم طبيعة معين يجب أن يكون ضمن اللجنة .

(جـ) إثنان معينان من علماء الرياضة يجب ألا يكونا ضمن اللجنة .

الحـل :

(أ) عدد طرق اختيار 2 من بين 5 من علماء الرياضة هى $_5C_2$ طريقة ، عدد طرق اختيار 3 من بين 7 من علماء الطبيعة هى $_7C_3$ طريقة .

عدد طرق الاختيار الممكنة = $_5C_2 \cdot {}_7C_3 = 10 . 35 = 250$

(ب) عدد طرق اختيار 2 من بين 5 من علماء الرياضة هى $_5C_2$ طريقة عدد طرق اختيار عالمين إضافيين من علماء الطبيعة من بين 6 علماء هى $_6C_2$ طريقة .

عدد طرق الاختيار الممكنة = $_5C_2 \cdot {}_6C_2 = 10 . 15 = 150$

(جـ) عدد طرق اختيار 2 من بين 3 من علماء الرياضة هى $_3C_2$ طريقة ، عدد طرق اختيار 3 من بين 7 من علماء الطبيعة هى $_7C_3$ طريقة .

عدد طرق الاختيار الممكنة = $_3C_2 \cdot {}_7C_3 = 3 . 35 = 105$

٦ – ٢٩ طفل معه خمس عملات كل عملة لها قيمة مختلفة . ماهو عدد مجموع النقود المختلفة التي يمكن له تكوينها .

الحـــل :

بما أن كل عملة يمكن التعامل معها بطريقتين ، أما أن تختار أو لا تختار . وبما أن كلا من الطريقتين التي يتم بهما التعامل مع العملة ترتبط بطريقتين للتعامل مع كل عملة من العملات الأخرى . فإن عدد طرق التعامل مع العملات الخمس هي 2^5 طريقة . ولكن الـ 2^5 طريقة تتضمن الحالة التي لاتأخذ فيها أي عملة . وبهذا يكون الرقم المطـــلوب لمجاميع النقود $= 31 = 1 - 2^5$.

طريقة أخرى :

من الممكن اختيار 1 من 5 من العملات ، 2 من 5 عملات ، ... ، 5 من 5 عملات . وبهذا فإن عدد مجاميع النقود المطلوب هو

$${}_5C_1 + {}_5C_2 + {}_5C_3 + {}_5C_4 + {}_5C_5 = 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 31$$

وبشكل عام ، ولأي قيمة صحيحة موجبة n و $\quad {}_nC_1 + {}_nC_2 + {}_nC_3 + \ldots + {}_nC_n = 2^n - 1$

٦ – ٣٠ من 7 حروف ساكنة و 5 حروف متحركة ، ماهو عدد الكلمات المكونة من 4 حروف ساكنة مختلفة و 3 حروف متحركة مختلفة ؟ ليس من الضروري أن تكون الجملة لها معنى .

الحـــل :

عدد طرق اختيار 4 حروف ساكنة مختلفة هي ${}_7C_4$ ، عدد طرق اختيار 3 حروف متحركة مختلفة هي ${}_5C_3$ طريقة . والـ 7 حروف المختلفة (4 ساكنة 3 متحركة) يمـــكن ترتيبهما بين أنفسهم بعدد طرق ${}_7P_7 = 7$

إذن $\quad {}_7C_4 \cdot {}_5C_3 \cdot 7! = 35 \cdot 10 \cdot 5040 = 1\,764\,000 =$ عدد الكلمات .

تقريب سترلينج لـــ $n!$:

٦ – ٣١ احسب $50!$.

الحـــل :

لقيم n الكبيرة

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}.$$

وبهذا فإن

$$50! \sim \sqrt{2\pi(50)}\, 50^{50} e^{-50} = S.$$

ولحساب قيمة S تستخدم اللوغاريتمات للأساس 10 . إذن

$$\begin{aligned}\log S = \log(\sqrt{100\pi}\ \ 50^{50} e^{-50}) &= \tfrac{1}{2}\log 100 + \tfrac{1}{2}\log \pi + 50\log 50 - 50\log e \\ &= \tfrac{1}{2}\log 100 + \tfrac{1}{2}\log 3{\cdot}142 + 50\log 50 - 50\log 2{\cdot}718 \\ &= \tfrac{1}{2}(2) + \tfrac{1}{2}(0{\cdot}4972) + 50(1{\cdot}6990) - 50(0{\cdot}4343) = 64{\cdot}4836\end{aligned}$$

ومنها $S = 3{\cdot}04 \times 10^{64}$ ، وهو عدد له 65 رقم .

الاحتمال والتحليل التوافقى :

٦ – ٣٢ صندوق يحتوى على 8 كرات حمراء ، 3 بيضاء و 9 كرات زرقاء . إذا سحبت 3 كرات عشوائياً ، أوجد احتمالات . (أ) الكرات الثلاث الحمراء . (ب) 2 حمراء وكرة بيضاء . (جـ) على الأقل كرة بيضاء . (د) كرة من كل لون تم سحبها . (هـ) الكرات سحبت بالترتيب حمراء ، بيضاء ، زرقاء .

الحـل :

(أ) الطريقة الأولى :

اعتبر R_1, R_2, R_3 تعبر عن الأحداث R_1 كرة حمراء فى السحبة الأولى ، R_2 كرة حمراء فى السحبة الثانية ، R_3 كرة حمراء فى السحبة الثالثة .

إذن R_1, R_2, R_3 تعبر عن الحدث « كل الكرات المسحوبة حمراء » .

$$\Pr\{R_1R_2R_3\} = \Pr\{R_1\}\Pr\{R_2|R_1\}\Pr\{R_3|R_1R_2\} = (8/20)(7/19)(6/18) = 14/285$$

الطريقة الثانية :

$$\text{الاحتمال المطلوب} = \frac{\text{عدد طرق اختيار 3 من 8 من الكرات الحمراء}}{\text{عدد طرق اختيار 3 من 20 من الكرات}} = \frac{{}_8C_3}{{}_{20}C_3} = \frac{14}{285}$$

(ب) باستخدام الطريقة الموضحة فى (أ) ، $\Pr\{\text{(الكرات الثلاث البيضاء)}\} = \frac{{}_3C_3}{{}_{20}C_3} = \frac{1}{1140}$

الطريقة الأولى المشار إليها فى (أ) يمكن أيضاً استخدامها .

(جـ) $\Pr\{\text{كرتان حمراء وكرة بيضاء}\} =$

$$= \frac{\text{(اختيار 2 من 8 من الكرات الحمراء) (اختيار كرة من 3 كرات بيضاء)}}{\text{عدد اختيار 3 كرات من 20 كرة}}$$

$$\frac{{}_8C_2 \cdot {}_3C_1}{{}_{20}C_3} = \frac{7}{95}$$

(د) $\Pr\{\text{عدم وجود كرات بيضاء}\} \quad \frac{{}_{17}C_3}{{}_{20}C_3} = \frac{34}{57}$

إذن $\Pr\{\text{وجود كرة بيضاء على الأقل}\} = 1 - \frac{34}{57} = \frac{23}{57}$

(هـ) $\Pr\{\text{سحب كرة من كل لون}\} = \frac{{}_8C_1 \cdot {}_3C_1 \cdot {}_9C_1}{{}_{20}C_3} = \frac{18}{95}$

$\Pr\{\text{الكرات المسحوبة بالترتيب أحمر ، أبيض ، ازرق}\} = 1/3!\ \Pr\{\text{سحب كرة من كل لون}\}$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{18}{95}\right) = \frac{3}{95}$$

باستخدام (و) .

طريقة اخرى : $\Pr\{R_1W_2B_3\} = \Pr\{R_1\}\Pr\{W_2|R_1\}\Pr\{B_3|R_1W_2\} = (8/20)(3/19)(9/18) = 3/95$

٦ – ٣٣ سحبت خمسة كروت من مجموعة أوراق لعب مكونة من 52 كارت ممزوجة مزجاً جيداً . أوجد احتمال الحصول على (أ) 4 آس (ب) 4 آس وكارت ملك (جـ) 3 عليها العدد 10 و 2 ولد (د) 9 ,10 ، ولد ، الملكة ، الملك بأى ترتيب (هـ) 3 من نفس المجموعة و 2 من مجموعة أخرى (و) الحصول على آس على الأقل .

الحـــل :

(أ)
$$\Pr\{\text{4 آس}\} = \frac{{}_4C_4 \cdot {}_{48}C_1}{{}_{52}C_5} = \frac{1}{54\,145}$$

(ب)
$$\Pr\{\text{4 آس ، 1 ملك}\} = \frac{{}_4C_4 \cdot {}_4C_1}{{}_{52}C_5} = \frac{1}{649\,740}$$

(جـ)
$$\Pr\{\text{3 عشرة ، 2 ولد}\} = \frac{{}_4C_3 \cdot {}_4C_2}{{}_{52}C_5} = \frac{1}{108\,290}$$

(د)
$$\Pr\{\text{10 ، 9 ولد ، ملكة وملك فى أى ترتيب}\} = \frac{{}_4C_1 \cdot {}_4C_1 \cdot {}_4C_1 \cdot {}_4C_1 \cdot {}_4C_1}{{}_{52}C_5} = \frac{6}{162\,435}$$

(هـ)
$$\Pr\{\text{3 من أى مجموعة ، 2 من مجموعة أخرى}\} = \frac{4\,{}_{13}C_3 \cdot 3\,{}_{13}C_2}{{}_{52}C_5} = \frac{429}{4165}$$

حيث أن هناك 4 طرق لاختيار المجموعة الأولى و 3 طرق لاختيار المجموعة الثانية .

(و)
$$\Pr\{\text{عدم الحصول على آس}\} = \frac{{}_{48}C_5}{{}_{52}C_5} = \frac{35\,673}{54\,145}$$

$$\Pr\{\text{الحصول على آس على الأقل}\} = 1 - \frac{35\,673}{54\,145} = \frac{18\,472}{54\,145}$$

٦ – ٣٤ أوجد احتمال ظهور الرقم 6 ثلاث مرات فى 5 رميات لزهرة طاولة متوازنة .

الحـــل :

اعتبر أن رمية زهرة الطاولة يمـــكن تمثيلها كخمس مسافات – – – – – فى كل مسافة سيكون لدينا أما الحدث 6 أو الحدث ليس 6 $(\bar{6})$. على سبيل المثال ثلاثة من الأرقام 6 ورقمان من غير الأرقام 6 يمكن حدوثها كالآتى : $6\,6\,\bar{6}\,6\,\bar{6}$ or $6\,\bar{6}\,6\,\bar{6}\,6$

وهكذا احتمال حدث مثل $6\,6\,\bar{6}\,6\,\bar{6}$ هو

$$\Pr\{6\,6\,\bar{6}\,6\,\bar{6}\} = \Pr\{6\}\Pr\{6\}\Pr\{\bar{6}\}\Pr\{6\}\Pr\{\bar{6}\} = \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{5}{6}\cdot\tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{5}{6} = (\tfrac{1}{6})^3(\tfrac{5}{6})^2$$

كذلك $\Pr\{6\,\bar{6}\,6\,\bar{6}\,6\} = (\tfrac{1}{6})^3(\tfrac{5}{6})^2$ ، وهكذا ، لكل الأحداث المكونة من ثلاثة من الرقم 6 ، ورقمان ليسا 6 . ولكن هناك $_5C_3 = 10$ من هذه الأحداث وهـــذه الأحداث أحداث متنافية . وبهذا فإن الاحتمال المطلوب هو

$$\Pr\{6\,6\,\bar{6}\,6\,\bar{6} \text{ or } 6\,\bar{6}\,6\,\bar{6}\,6 \text{ or etc.}\} = {}_5C_3(\tfrac{1}{6})^3(\tfrac{5}{6})^2 = \tfrac{125}{3888}$$

وبشكل عام ، إذا كان $p = \Pr\{E\}$ ، $q = \Pr\{\bar{E}\}$ ، فانه باستخدام نفس المبررات التى ذكرناها فيما سبق فإن احتمال الحصول على X E's بالضبط من N محاولة هو

$$_N C_X \, p^X q^{N-X}$$

٦ – ٣٥ فى مصنع لوحظ أن متوسط الوحدات التالفة بالنسبة لمواصفات معينة فى انتاج آلة معينة لإنتاج المسامير هو 20% إذا اختير 10 مسامير عشوائياً من الانتاج اليومى لهذه الآلة ، أوجد احتمال وجود :

(أ) 2 بالضبط تالفين (ب) 2 أو أكثر تالفين (جـ) أكثر من 5 من الإنتاج تالف .

الحـل :

(أ) $\Pr\{$عدد المسامير التالفة 2$\} = {}_{10}C_2(0{\cdot}2)^2(0{\cdot}8)^8 = 45(0{\cdot}04)(0{\cdot}1678) = 0{\cdot}0302$

باستخدام مبررات مماثلة المسألة ٦ – ٣٤ .

(ب)

$\Pr\{$عدد المسامير التالفة 2 أو أكثر$\}$

$= 1 - \Pr\{$عدد المسامير التالفة 0$\} - \Pr\{$عدد المسامير التالفة 1$\}$

$$= 1 - {}_{10}C_0(0{\cdot}2)^0(0{\cdot}8)^{10} - {}_{10}C_1(0{\cdot}2)^1(0{\cdot}8)^9$$
$$= 1 - (0{\cdot}8)^{10} - 10(0{\cdot}2)(0{\cdot}8)^9 \quad 1 - 0{\cdot}1074 - 0{\cdot}2684 = 0{\cdot}6242$$

(جـ)

$\Pr\{$عدد المسامير التالفة أكثر من 5$\} =$

$\Pr\{$6 تالف$\} + \Pr\{$7 تالف$\} + \Pr\{$8 تالف$\} + \Pr\{$9 تالف$\} + \Pr\{$10 تالف$\}$

$$= {}_{10}C_6(0{\cdot}2)^6(0{\cdot}8)^4 + {}_{10}C_7(0{\cdot}2)^7(0{\cdot}8)^3 + {}_{10}C_8(0{\cdot}2)^8(0{\cdot}8)^2$$
$$+ {}_{10}C_9(0{\cdot}2)^9(0{\cdot}8) + {}_{10}C_{10}(0{\cdot}2)^{10}$$
$$= 0{\cdot}006\,37.$$

٦ – ٣٦ فى 1000 عينة كل عينة مكونة من 10 مسامير مأخوذة حسب بيانات المسألة السابقة ، كم من هذه العينة نتوقع أن نجد

(أ) عدد المسامير التالفة 2 بالضبط

(ب) عدد المسامير التالفة 2 أو أكثر

(جـ) عدد المسامير التالفة أكثر من 5 ؟

الحـل :

(أ) $(1000)(0{\cdot}0302) = 30$ = العدد المتوقع من المسألة ٦ – ٣٥ (أ)

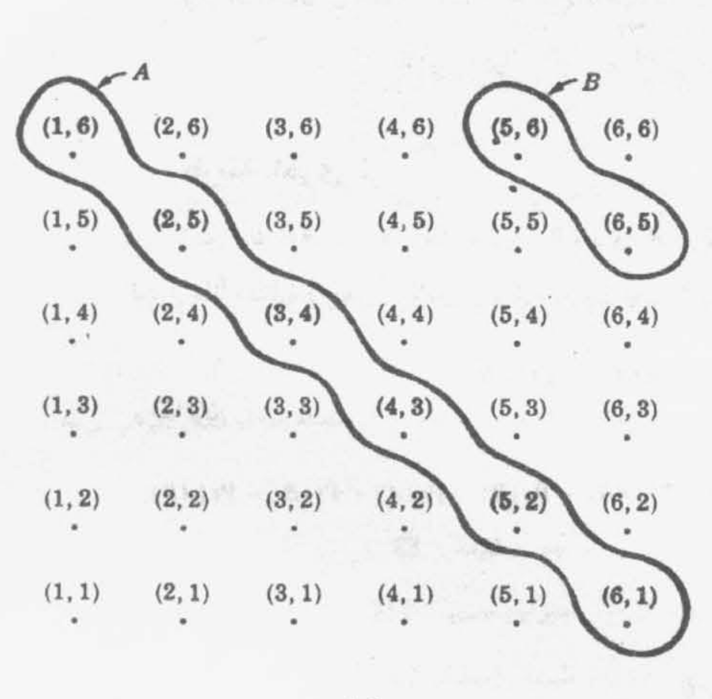
(ب) $(1000)(0{\cdot}6242) = 624$ = العدد المتوقع من المسألة ٦ – ٣٥ (ب)

(جـ) $(1000)(0{\cdot}006\,37) = 6$ = العدد المتوقع من المسألة ٦ – ٣٥ (جـ)

مجال العينة وأشكال أيلر :

٦ – ٣٧ (أ) كون مجال العينة لرمية زهرقى طاولة غير متحيزتين مرة واحدة .

(ب) من مجال العينة أوجد احتمال أن المجموع فى رمية زهرقى طاولة هو إما 7 أو 11 .



شكل ٦ – ٧

الحـــل :

(أ) يتكون مجال العينة من مجموعة النقطة المبينة فى الشكل ٦ – ٧ . الاحداثى الأول لكل نقطة بين العدد الموضح على إحدى الزهرتين والأحـــداثى الثانى يبين العدد الموضح على الزهرة الأخرى . العدد الكلى للنقط هو 36 ونخصص لكل نقطة احتمالا قدره 1/36 . وبهذا يكون مجموع احتمالات جميع النقط فى المجال هو 1 .

(ب) مجموع النقط المقابلة للأحداث « المجموع 7 » مشار إليها بـ A و « المجموع 11 » مشار إليها بـ B .

$\Pr\{A\} =$ مجموع الاحتمالات المرتبطة بكل نقطة فى A $= 6/36$

$\Pr\{B\} =$ مجموع الاحتمالات المرتبطة بكل نقطة فى B $= 2/36$

$\Pr\{A+B\} =$ { مجموع احتمالات النقط الموجودة فى A أو فى B أو فى كليهما } $= (6+2)/36 = 8/36 = 2/9$

لاحظ أنه فى هذه الحالة $\Pr\{A+B\} = \Pr\{A\} + \Pr\{B\}$.

نظراً لأن B و A ليس بينهما نقط مشتركة ، بمعنى أنهما أحداث متنافية .

٦ – ٣٨ باستخدام مجال عينة ، وضح أن

(أ) $\Pr\{A+B\} = \Pr\{A\} + \Pr\{B\} - \Pr\{AB\}$

(ب) $\Pr\{A+B+C\} = \Pr\{A\} + \Pr\{B\} + \Pr\{C\} - \Pr\{AB\} - \Pr\{BC\} - \Pr\{AC\} + \Pr\{ABC\}$

الحـــل :

(أ) اعتبر أن B و A مجموعتان من النقط بينهما نقط مشتركة ممثلة بـ AB كما فى الشكل ٦ – ٨ .

تتكون A من $A\bar{B}$ و AB بينما B تتكون من AB و $B\bar{A}$.

المجموع الكلى للنقط فى $A + B$ (أما فى A أو فى B أو فى كليهما)

= المجموع الكلى للنقط فى A + المجموع الكلى للنقط فى B — المجموع الكلى للنقط فى AB .

و بما أن احتمال أى حدث أو فئة = مجموع الاحتمالات المرتبطة بنقط الفئة فإن

$$\Pr\{A + B\} = \Pr\{A\} + \Pr\{B\} - \Pr\{AB\}$$

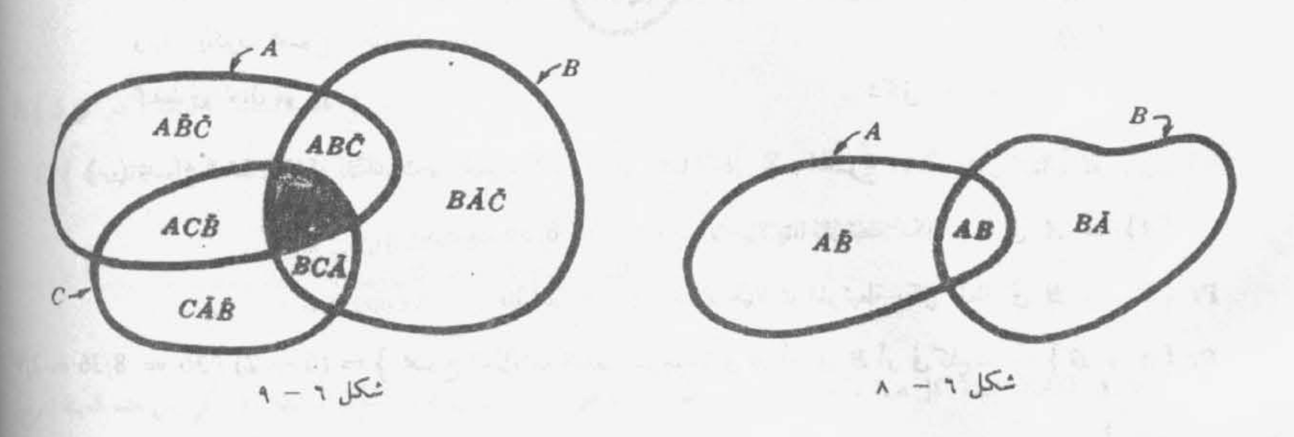
طريقة اخرى :

اعتبر أن AB — A تمثل مجموعة النقط فى A والتى ليست فى B (مثل $A\bar{B}$) فإن $A - AB, B$ تعد أحداثاً متنافية (بمعنى أنه لايوجد نقط مشتركة بينهما) . كذلك

$$\Pr\{A - AB\} = \Pr\{A\} - \Pr\{AB\}.$$

و بهذا فإن

$$\Pr\{A + B\} = \Pr\{A - AB\} + \Pr\{B\} = \Pr\{A\} - \Pr\{AB\} + \Pr\{B\} = \Pr\{A\} + \Pr\{B\} - \Pr\{AB\}$$



شكل ٦ — ٩

شكل ٦ — ٨

(ب) اعتبر أن A, B, C مجموعات ثلاث من النقط كما هوموضح بالشكل ٦ — ٩ الرمز $AB\bar{C}$ يعنى النقط الموجودة فى A, B معاً وغير الموجودة فى C والرموز الأخرى لها معان مشابهة .

من الممكن اعتبار أن النقط الموجودة أما فى A أو B أو C أنها النقط المتضمنة فى ال 7 مجموعات المتنافية بالشكل ٦ — ٩ أعلاه ، منها 4 مجموعات مظللة و 3 غير مظللة . الاحتمال المطلوب هو .

$$\Pr\{A + B + C\} = \Pr\{A\bar{B}\bar{C}\} + \Pr\{B\bar{C}\bar{A}\} + \Pr\{C\bar{A}\bar{B}\} + \Pr\{AB\bar{C}\} + \Pr\{BC\bar{A}\} + \Pr\{CA\bar{B}\} + \Pr\{ABC\}$$

والآن للحصول على $A\bar{B}\bar{C}$ ، على سبيل المثال ، فإننا نحذف النقطة المشتركة بين B و A وكذلك بين A, C ، ولكن هذا يؤدى إلى أن نحذف النقطة المشتركة بين A, B, C مرتين .

وبهذا فإن $A\bar{B}\bar{C} = A - AB - AC + ABC$

$$\Pr\{A\bar{B}\bar{C}\} = \Pr\{A\} - \Pr\{AB\} - \Pr\{AC\} + \Pr\{ABC\}$$

وبنفس الطريقة ، نجد أن

$$\begin{aligned}
\Pr\{B\bar{C}\bar{A}\} &= \Pr\{B\} - \Pr\{BC\} - \Pr\{BA\} + \Pr\{BCA\}\\
\Pr\{C\bar{A}\bar{B}\} &= \Pr\{C\} - \Pr\{CA\} - \Pr\{CB\} + \Pr\{CAB\}\\
\Pr\{BC\bar{A}\} &= \Pr\{BC\} - \Pr\{ABC\}\\
\Pr\{CA\bar{B}\} &= \Pr\{CA\} - \Pr\{BCA\}\\
\Pr\{AB\bar{C}\} &= \Pr\{AB\} - \Pr\{CAB\}\\
\Pr\{ABC\} &= \Pr\{ABC\}
\end{aligned}$$

بتجميع هذه المعادلات السبع مع الأخذ فى الاعتبار أن $\Pr\{AB\} = \Pr\{BA\}$ فأننا نحصل على

$$\Pr\{A + B + C\} = \Pr\{A\} + \Pr\{B\} + \Pr\{C\} - \Pr\{AB\} - \Pr\{BC\} - \Pr\{AC\} + \Pr\{ABC\}$$

٦ - ٣٩ فى بحث شمل 500 طالب يدرسون مادة أو أكثر من المواد ، الجبر ، الطبيعة ، الإحصاء خلال فصل دراسى وجدت الأرقام التالية للطلبة الذين يدرسون المواد الموضحة .

الجبر	329	جبر وطبيعة	83
طبيعة	186	جبر وإحصاء	217
إحصاء	295	طبيعة وإحصاء	63

كم عدد الطلبة الذين يدرسون

(أ) كل المواد الثلاث (ب) يدرسون الجبر ولا يدرسون الإحصاء

(جـ) يدرسون الطبيعة ولا يدرسون الجبر

(د) يدرسون الإحصاء ولا يدرسون الطبيعة

(هـ) يدرسون الجبر أو الإحصاء ولا يدرسون الطبيعة

(و) يدرسون الجبر ولا يدرسون الطبيعة أو الإحصاء

الحـــل :

اعتبر أن A ترمز لمجموعة الطلبة الذين يدرسون الجبر ، و A يرمز لعدد الطلبة المنتمين لهذه المجموعة . كذلك اعتبر أن B يرمز لعدد الطلبة الذين يدرسون الطبيعة ، C عدد الطلبة الذين يدرسون الإحصاء .

بهذا فإن $(A + B + C)$ يرمز للعدد الذين يدرسون أما الجبر أو الطبيعة أو الإحصاء أو أى توافيق منها ، (AB) ترمز لعدد الذين يدرسون كلا من الجبر والطبيعة . وهكذا . وكما فى المثال السابق ، فإن

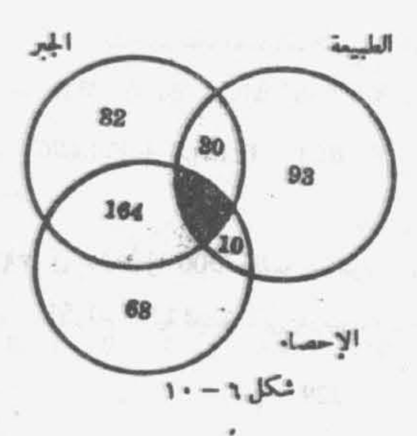
$$(A + B + C) = (A) + (B) + (C) - (AB) - (BC) - (AC) + (ABC)$$

(أ) بالتعويض بالأرقام المعطاة فى هذه الصيغة فإننا نجد

$$500 = 329 + 186 + 295 - 83 - 63 - 217 + (ABC)$$

أو $(ABC) = 53$ ، وهو عدد الطلبة الذين يدرسون الجبر والطبيعة والإحصاء . لاحظ أن الاحتمال (الاعتبارى) لأن يدرس الطالب المواد الثلاث هو 53/500 .

(ب) لحصول على المعلومات المطلوبة من الملائم تكوين شكل أيلر يبين عدد الطلبة الذين ينتمون لكل مجموعة .



شكل ٦ — ١٠

تبدأ من حقيقة أن هناك 53 طالب يدرسون المواد الثلاث ، ومنه نستنتج أن عدد الطلبة الذين يدرسون الجبر والإحصاء ولا يدرسون الطبيعة هو $217 - 53 = 164$ وهو الموضح بالرسم ٦ — ١٠ . ومن البيانات المعطاة فإننا نحصل على الأرقام الموضحة .

من البيانات المعطاة، عدد الطلبة الذين يدرسون الجبر ولا يدرسون الإحصاء هو $329 - 217$ أو من الشكل ٦ — ١٠ ، $82 + 30 = 112$.

(جـ) عدد الذين يدرسون الطبيعة ولا يدرسون الجبر $103 = 10 + 93$.

(د) عدد الذين يدرسون الإحصاء ولا يدرسون الطبيعة $232 = 164 + 68$.

(هـ) عدد الذين يدرسون الجبر أو الإحصاء ولا يدرسون الطبيعة $314 = 82 + 164 + 68$.

(و) عدد الذين يدرسون الجبر ولا يدرسون الطبيعة أو الأحصاء = 82 .

مســـائل اضــافية

المبادىء الأساسية للاحتمالات :

٦ — ٤٠ أوجد الاحتمال p ، أو تقدير له ، لكل من الأحداث التالية :

(أ) ظهور ملك ، آس ، ولد سباتى ، أو بنت دينارى عند سحب ورقة واحدة من مجموعة أوراق لعب (كوتشينة) مخلوطة خلطاً جيداً .

(ب) ظهور مجموع 8 فى رمية واحدة لزهرتى طاولة غير متحيزتين .

(جـ) وجود مسمار غير تالف من600 مسمار تم اختيارها ووجد أن بها 12 مسمار تالف .

(د) ظهور مجموع 7 أو 11 فى رمية واحدة لزهرتى طاولة غير متحيزتين .

(هـ) ظهور الصورة مرة على الأقل فى رمية عملة متوازنة ثلاث مرات .

ج : (أ) 5/26 (ب) 5/36 (جـ) 0.98 (د) 2/9 (هـ) 7/8 .

٦ – ٤١ فى تجربة مكونة من سحب ثلاثة كروت على التوالى من مجموعة أوراق لعب عادية مخلوطة خلطاً جيداً . اعتبر E_1 يمثل الحدث « ملك » فى السحبة الأولى ، E_2 الحدث « ملك » فى السحبة الثانية E_3 الحدث « ملك » فى السحبة الثالثة .
عبر بالكلمات على كل مما يلى :

(أ) $\Pr\{E_1\bar{E}_2\}$ (ب) $\Pr\{E_1 + E_2\}$ (جـ) $\bar{E}_1 + \bar{E}_2$

(د) $\Pr\{E_3|E_1\bar{E}_2\}$ (هـ) $\bar{E}_1\bar{E}_2\bar{E}_3$ (و) $\text{pr}\{E_1E_2 + \bar{E}_2E_3\}$.

ج : (أ) احتمال ظهور الملك فى السحبة الأولى وعدم ظهور الملك فى السحبة الثانية .

(ب) احتمال ظهور الملك أما فى السحبة الأولى أو فى السحبة الثانية أو كليهما .

(جـ) عدم ظهور الملك لا فى السحبة الأولى ولا فى السحبة الثانية ولا فى كليهما معاً .

(د) احتمال ظهور الملك فى السحبة الثالثة علماً بأن الملك قد ظهر فى السحبة الأولى ولم يظهر فى السحبة الثانية .

(هـ) عدم ظهور الملك فى أى من السحبات الثلاث .

(و) احتمال ظهور الملك فى كل من السحبتين الأولى والثانية معاً أو عدم ظهور الملك فى السحبة الثانية مع ظهوره فى السحبة الثالثة .

٦ – ٤٢ سحبت كرة عشوائياً من صندوق به 10 كرات حمراء ، 30 كرة بيضاء ، 20 كرة زرقاء و 15 كرة برتقالية .
أوجد احتمال أن تكون الكرة :

(أ) برتقالية أو حمراء . (ب) ليست حمراء أو زرقاء . (جـ) ليست زرقاء .

(د) بيضاء . (هـ) حمراء أو بيضاء أو زرقاء .

ج : (أ) 1/3 (ب) 3/5 (جـ) 11/15 (د) 2/5 (هـ) 4/5

٦ – ٤٣ سحبت كرتان على التوالى من الصندوق الموضح فى المسألة السابقة ، ويتم إعادة الكرة المسحوبة بعد كل سحبة . أوجد احتمال أن تكون :

(أ) الكرتان بيضاء . (ب) الأولى حمراء والثانية بيضاء . (جـ) لا توجد بينهما كرة برتقالية .

(د) الكرتان إما كلاهما حمراء أو كلاهما بيضاء أو إحداهما حمراء والأخرى بيضاء .

(هـ) الكرة الثانية ليست زرقاء . (و) الكرة الأولى برتقالية .

(ز) على الأقل واحدة زرقاء . (ح) على الأكثر واحدة حمراء .

(ط) الأولى بيضاء ولكن الثانية ليست بيضاء . (ى) كرة واحدة فقط حمراء .

ج : (أ) 4/25 (ب) 4/75 (جـ) 16/25 (د) 64/225 (هـ) 11/15 (و) 1/5 (ز) 104/225
(ح) 221/225 (ط) 6/25 (ى) 52/225 .

٦ – ٤٤ حل المسألة السابقة إذا كانت الكرة التي تسحب لا تعاد مرة أخرى .

ج : (أ) 29/185 (ب) 2/37 (جـ) 118/185 (د) 52/185 (هـ) 11/15 (و) 1/5
(ز) 86/185 (ح) 182/185 (ط) 9/37 (ى) 26/111 .

٦ – ٤٥ في رميتين لزهرتي طاولة متوازنتين أوجد احتمال تسجيل مجموع 7 نقط

(أ) مرة (ب) على الأقل مرة (جـ) مرتين

ج : (أ) 5/18 (ب) 11/36 (جـ) 1/36

٦ – ٤٦ سحبت ورقتان على التوالي من مجموعة أوراق لعب عادية مكونة من 52 ورقة مخلوطة خلطاً جيداً . أوجد احتمال أن

(أ) الورقة الأولى ليست عشرة سباتي أو آس .

(ب) الورقة الأولى آس ولكن الورقة الثانية ليست آس .

(جـ) ورقة على الأقل تحمل علامة الديناري

(د) الورقتان ليستا من نفس المجموعة .

(هـ) لا يوجد أكثر من ورقة عليها صورة (الولد ، البنت ، الملك)

(و) الورقة الثانية ليست من الأوراق التي عليها صورة .

(ز) الورقة الثانية ليست من الأوراق التي عليها صورة علماً بأن الورقة الأولى من الأوراق التي عليها صورة .

(ح) الورقتان إما من الأوراق التي عليها صورة أو من الأوراق التي عليها رسم البستوني أو كلاهما .

ج : (أ) 47/52 (ب) 16/221 (جـ) 15/34 (د) 13/17 (هـ) 210/221
(و) 10/13 (ز) 40/51 (ح) 77/442 .

٦ – ٤٧ صندوق يحتوي على 9 تذاكر مرقمة من 1 إلى 9 (بما فيها الرقم 9 نفسه) .

إذا سحبت ثلاث تذاكر من الصندوق تذكرة في كل مرة ، أوجد احتمال أن تكون أرقامها بالتبادل إما فردي ، زوجي ، فردي أو زوجي ، فردي ، زوجي .

ج : 5/18 .

٦ – ٤٨ معامل الترجيح لصالح A لكسب مباراة في الشطرنج ضد B هو $3:2$. إذا لعبت ثلاث مباريات ، ما هو معامل الترجيح .

(أ) لصالح أن يكسب A على الأقل مباراتين من ثلاث .

(ب) ضد A أن يخسر أول المباراتين الأولى والثانية مع B .

ج : (أ) 44 : 81 (ب) 4 : 21

٦ – ٤٩ كيس نقود يحتوى على قطعتين من النقود الفضية و 4 قطع نقود نحاسية وكيس آخر يحتوى على 4 قطع نقود فضية و 3 نحاسية . إذا اخترت قطعة نقود عشوائياً من أحد الكيسين ، ما هو احتمال أن تكون قطعة نقود فضية ؟

ج : 19/42 .

٦ – ٥٠ احتمال أن يبقى رجل على قيد الحياة 25 سنة أخرى وهو 3/5 واحتمال أن تبقى زوجته على قيد الحياة 25 سنة أخرى 2/3 ما هو احتمال :

(أ) أن يبقى الإثنان على قيد الحياة .

(ب) أن يبقى الرجل فقط على قيد الحياة .

(جـ) أن تبقى الزوجة فقط على قيد الحياة .

(د) أن يبقى واحداً منهما على قيد الحياة .

ج : (أ) 2/5 (ب) 1/5 (جـ) 4/15 (د) 13/15

٦ – ٥١ من 800 عائلة بكل عائلة 4 أطفال ، ما هى النسبة المئوية المتوقعة للعائلات التى بها .

(أ) ولدان وبنتان .

(ب) ولد على الأقل

(جـ) ليس بها بنات .

(د) بنتان على الأكثر ؟ مفترضاً أن الأولاد والبنات لهما احتمال متساو فى الوجود .

ج : (أ) 37.5% (ب) 93.75% (جـ) 6.25% (د) 68.75% .

التوزيعات الاحتمالية :

٦ – ٥٢ إذا كان X متغيراً عشوائياً يمثل عدد الأولاد فى العائلات المكونة من 4 أطفال (أنظر المسألة ٦ – ٥١)

(أ) كون جدولا يمثل التوزيع الاحتمالى لـ X .

(ب) مثل التوزيع فى (أ) بيانياً .

ج : (أ)

X	0	1	2	3	4
$p(X)$	1/16	4/16	6/16	4/16	1/16

٦ – ٥٣ المتغير العشوائى المتصل X يأخذ قيماً بين $X = 2$ و $X = 8$ (بما فيها (2,8) ، ودالة كثافة احتماله معرفة بـ $a(X+3)$ حيث a مقدار ثابت .

(أ) احسب قيمة a . (ب) أوجد $\Pr\{3 < X < 5\}$.

(جـ) $\Pr\{X \geq 4\}$ (د) $\Pr\{|X - 5| < 0.5\}$.

ج : (أ) 1/48 (ب) 7/24 (جـ) 3/4 (د) 1/6

٦ – ٥٤ ثلاث كرات بلى سحبت بدون إرجاع من وعاء يحتوى على 4 كرات بلى حمراء و 6 كرات بلى بيضاء . إذا كان X متغير عشوائى يعبر عن عدد الكرات الحمراء المسحوبة .

(أ) كون جدولا موضحاً به التوزيع الاحتمالى لـ X .

(ب) مثل التوزيع بيانياً .

ج : (أ)

X	0	1	2	3
$p(X)$	1/6	1/2	3/10	1/30

٦ – ٥٥ فى المسألة السابقة ، أوجد (أ) $\Pr\{X = 2\}$ (ب) $\Pr\{1 \leqq X \leqq 3\}$ وفسر النتيجة .

ج : (أ) 3/10 ، وهذا احتمال سحب ما مجموعة 2 من الكرات الحمراء .

(ب) 5/6 ، وهذا احتمال سحب 1 أو 2 أو 3 من الكرات الحمراء ، سحب كرة حمراء على الأقل .

التوقع الرياضى :

٦ – ٥٦ ما هو السعر العادل للاشتراك فى لعبة احتمال أن يكسب فيها الشخص £25 هو 0.2 واحتمال أن يكسب £10 هو 0.4 ؟

ج : £9 .

٦ – ٥٧ إذا أمطرت السماء ، فإن بائع مظلات واقية من المطر يمكن أن يكسب £30 فى اليوم . إذا كان الجو معتدلا فإنه يخسر £6 فى اليوم . ما هو توقعه إذا كان احتمال سقوط المطر هو 0.3 ؟

ج : £4.80 فى اليوم .

٦ – ٥٨ A و B يشتركان فى لعبة حيث يقذفان بعملة متوازنة ثلاث مرات والذى يحصل على الصورة أولا يكسب اللعبة . إذا قذف A العملة أولا وإذا كانت القيمة الإجمالية للرهان هو £20 ، ما هو المبلغ الذى يجب أن يساهم به كل منهم بحيث يمكن اعتبار اللعبة عادلة ؟

ج : A, £12.50; B, £7.50

٦ – ٥٩ أوجد (أ) $E(X)$ (ب) $E(X^2)$ (جـ) $E[(X - \bar{X})^2]$ (د) $E(X^3)$ للتوزيع الاحتمالى التالى .

X	−10	−20	30
$p(X)$	1/5	3/10	1/2

ج : (أ) 7 (ب) 590 (جـ) 541 (د) 10900

٦-٦٠ أوجد (أ) الوسط (ب) التباين و (جـ) الانحراف المعيارى لتوزيع X بالمسألة ٦-٥٤ وفسر نتائجك .

ج : (أ) 1.2 (ب) 0.56 (جـ) $\sqrt{0.56} = 0.75$.

٦-٦١ متغير عشوائى يأخذ القيمة 1 باحتمال p و 0 باحتمال $q = 1 - p$ أثبت أن

(أ) $E(X) = p$ (ب) $E[(X - \bar{X})^2 = pq$.

٦-٦٢ أثبت أن (أ) $E(2X + 3) = 2E(X) + 3$ (ب) $E[(X - \bar{X})^2] = E(X^2) - [E(X)]^2$

٦-٦٣ إذا كان X, Y متغيرين عشوائيين لهما نفس التوزيع .

وضح أن $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.

التباديل :

٦-٦٤ احسب (أ) ${}_4P_2$ (ب) ${}_7P_5$ (جـ) ${}_{10}P_3$ ج : (أ) 12 (ب) 2520 (جـ) 720

٦-٦٥ لأى قيمة من قيم n ، ${}_{n+1}P_3 = {}_nP_4$ ؟ ج : $n = 5$

٦-٦٦ بكم طريقة يمكن أجلاس 5 أشخاص على كنبة إذا كان عدد الأماكن المتاحة هو 3 فقط ؟ ج : 60

٦-٦٧ بكم طريقة يمكن ترتيب 7 كتب على رف إذا كان (أ) أى ترتيب ممكن (ب) ثلاثة كتب معينة يجب أن تكون معاً ، (جـ) كتابان معينان يجب أن يشغلا النهاية ؟

ج : (أ) 5040 (ب) 720 (جـ) 240

٦-٦٨ كم من الأعداد المكونة من خمسة أرقام بكل منها يمكن تكوينها من الأرقام $1, 2, 3, \ldots, 9$ إذا (أ) الأرقام يجب أن تكون فردية (ب) الرقمان الأوليان من كل عدد أرقام زوجية ؟

ج : (أ) 8400 ، (ب) 2520

٦-٦٩ حل المسألة السابقة إذا كان تكرار الرقم مسموحاً به .

ج : (أ) $32\ 805$ (ب) 11664

٦-٧٠ كم من الأعداد المكونة من ثلاثة أرقام يمكن تكوينها من ثلاثة أرقام أربعة وأربعة أرقام اثنين ، ورقمان ثلاثة ؟

ج : 20

٦-٧١ بكم طريقة يمكن أجلاس 3 رجال و 3 نساء حول مائدة إذا كان (أ) لا توجد قيود موضوعة .
(ب) اثنتان معينتان من النساء يجب ألا يجلسا معاً . (جـ) كل واحدة من النساء يجب أن تجلس بين رجلين .

ج : (أ) 120 (جـ) 72 (ت) 12

التوافيق :

٦ – ٧٢ احسب (أ) ${}_5C_3$ (ب) ${}_8C_4$ (جـ) ${}_{10}C_8$.

ج : (أ) 10 (ب) 70 (جـ) 45

٦ – ٧٣ لأى قيمة من قيم n تكون $7 . {}_nC_2 = 3 . {}_{n+1}C_3$ ؟ ج : $n=6$

٦ – ٧٤ بكم طريقة يمكن اختيار 6 أسئلة من 10 أسئلة ؟ ج : 210

٦ – ٧٥ كم عدد اللجان المكونة من 3 رجال 4 نساء يمكن تكوينها من 8 رجال و 6 نساء ؟ ج : 840

٦ – ٧٦ بكم طريقة يمكن اختيار 2 من الرجال ، 4 سيدات ، 3 أولاد و 3 بنات من 6 من الرجال ، 8 سيدات ، 4 أولاد و 5 بنات إذا كان

(أ) لا توجد أى قيود على الاختيار .

(ب) رجل معين وسيدة معينة يجب اختيارهما ؟

ج : (أ) 42 000 (ب) 7000

٦ – ٧٧ بكم طريقة يمكن تقسيم 10 أشخاص إلى (أ) مجموعتين مكونتين من 7 أشخاص ، 3 أشخاص (ب) ثلاثة مجموعات مكونة من 4 أشخاص ، 3 أشخاص ، شخصان ؟ ج : (أ) 120 (ب) 12 600

٦ – ٧٨ من 5 إحصائيين ، 6 اقتصاديين يراد تكوين لجنة من 3 احصائيين ، 2 من الأقتصاديين . كم لجنة يمكن تكوينها إذا كان :

(أ) لا توجد قيود على الاختيار .

(ب) 2 معينين من الاحصائيين يجب أن يكونا فى اللجنة .

(جـ) اقتصادى معين يجب أن يكون فى اللجنة . ؟

ج : (أ) 150 (ب) 45 (جـ) 100

٦ – ٧٩ أوجد عدد (أ) التوافيق (ب) التباديل ، المكون كل منها من أربعة حروف والتى يمكن تكوينها من الكلمة *Tennessee*؟

ج : (أ) 17 (ب) 163

٦ – ٨٠ أثبت أن $1 - {}_nC_1 + {}_nC_2 - {}_nC_3 + \cdots + (-1)^n {}_nC_n = 0$

تقريب سترلينج لـ $n!$:

٦ – ٨١ بكم طريقة يكن اختيار 30 مفردة من 100 ؟ ج : 2.95×10^{25}

٦ – ٨٢ وضح أنه لقيم n الكبيرة ${}_{2n}C_n = 2^{2n}/\sqrt{\pi n}$ تقريباً .

مســائل متنوعــة X

٦ – ٨٣ سحبت ثلاث ورقات من مجموعة أوراق لعب مكونة من 52 كارت . أوجد احتمال (أ) ورقتان عليهما صورة الولد وورقة عليها صورة الملك (ب) جميع الورقات من نفس النوع (ج) جميع الورقات من مجموعات مختلفة (د) وجود ورقتى آس على الأقل .

ج : (أ) 6/5525 (ب) 22/425 (ج) 169/425 (د) 73/5525

٦ – ٨٤ أوجد احتمال الحصول على مجموع 7 مرتين على الأقل فى رمية زهرة أربعة مرات ؟

ج : 171/1296

٦ – ٨٥ إذا كان 10% من إنتاج آلة فى مصنع إنتاجاً تالفاً ، إذا اختيرت 5 مسامير عشوائياً فما هو احتمال (أ) أن لايكون أى منها تالف (ب) وجود مسمار واحد تالف (ج) وجود مسمارين على الأقل تالفين ؟

ج : (أ) 0.590 49 (ب) 0.328 05 (ج) 0.088 66

٦ – ٨٦ (أ) كون مجال العينة لنتائج رميتين لعملة غير متحيزة مستخدماً 1 لتمثل « الصورة » و0 لتمثل « الكتابة » .

(ب) من مجال العينة أوجد احتمال ظهوره الصورة مرة على الأقل .

(ج) هل يمكن لك تكوين مجال العينة لنتائج ثلاث رميات لعملة ؟ إذا كان ممكناً حدد بمساعدة هذا التكوين احتمال ظهور صورتين على الأقل .

ج : (ب) ¾ (ج) $^7/_8$.

٦ – ٨٧ فى استطلاع لرأى 200 ناخب أظهر المعلومات التالية والخاصة بثلاثة مرشحين A, B, C من حزب معين والذين يخوضون الانتخابات للحصول على ثلاثة مقاعد مختلفة .

28 مؤيدين لكل من A, B

122 مؤيدين لـ B أو C ولكن غير مؤيدين لـ A

98 مؤيدين لـ A أو B ولكن غير مؤيدين لـ C

64 مؤيدين لـ C ولكن غير مؤيدين لـ A أو B

42 مؤيدين لـ B ولكن غير مؤيدين لـ A أو C

14 مؤيدين لـ A و C ولكن غير مؤيدين لـ B

كم عدد الناخبين المؤيدين لـ (أ) جميع المرشحين الثلاثة (ب) A بغض النظر عن B أو C . (ج) B بغض النظر عن A أو C (د) C بغض النظر عن A أو B (هـ) A و B وليس C (و) مرشح واحد فقط ؟

ج : (أ) 8 (ب) 78 (ج) 86 (د) 102 (هـ) 20 (و) 142

٦ – ٨٨ (أ) أثبت أنه لأى حدثين E_1 و E_2 فإن $\Pr\{E_1 + E_2\} \leqq \Pr\{E_1\} + \Pr\{E_2\}$

(ب) عمم النتيجة التى حصلت عليها فى (أ)

٦ – ٨٩ إذا كانت E_1, E_2, E_3 عبارة عن 3 أحداث من المعروف أن واحد منها على الأقل قد وقع . وإذا افترضنا أن أياً من هذه الأحداث يمكن أن ينتج عنه حدث آخر وليكن A ومن المعروف أن هذا الحدث أيضاً قد وقع . إذا كانت جميع الاحتمالات $\Pr\{E_1\}, \Pr\{E_2\}, \Pr\{E_3\}$ و $\Pr\{A|E_1\}, \Pr\{A|E_2\}, \Pr\{A|E_3\}$ يفترض أنها معلومة أثبت أن

$$\Pr\{E_1|A\} = \frac{\Pr\{E_1\}\Pr\{A|E_1\}}{\Pr\{E_1\}\Pr\{A|E_1\} + \Pr\{E_2\}\Pr\{A|E_2\} + \Pr\{E_3\}\Pr\{A|E_3\}}$$

ويمكن الحصول على نتيجة مشابهة لكل من $\Pr\{E_2|A\}$ و $\Pr\{E_3|A\}$. هذه الصيغة معروفة باسم «قاعدة بايز أو نظرية بايز» . وهى مفيدة لحساب احتمالات الفروض المختلفة E_1 أو E_2 أو E_3 والتى ينتج عنها الحدث A . والنتيجة السابقة يمكن تعميمها .

٦ – ٩٠ ثلاثة صناديق مجوهرات متماثلة تماماً ولكل صندوق درجان . فى كل من أدراج الصندوق الأول ساعة ذهبية . وفى كل من أدراج الصندوق الثانى يوجد ساعة فضية . فى أحد أدراج الصندوق الثالث توجد ساعة ذهبية بينما فى الدرج الآخر توجد ساعة فضية . اختير صندوق عشوائياً وفتح أحد الأدراج ووجد به ساعة فضية ، ماهو احتمال أن يكون بالدرج الثانى ساعة ذهبية ؟

(ملحوظة : طبق نتيجة المسألة ٦ – ٨٩)

ج : $^1/_3$

٦ – ٩١ قدر كلا من A و B أن يتقابلا فيما بين الساعة الثالثة والرابعة بعد الظهر على أن لاينتظر أى منهما الآخر أكثر من 10 دقائق . ماهو احتمال أن يتقابلا .

ج : $^{11}/_{36}$

٦ – ٩٢ اختيرت نقطتان عشوائياً على خط طوله $a > 0$. أوجد احتمال أن تكون الخطوط الثلاثة المكونة من ذلك يمكن أن تكون أضلاع مثلث .

ج : ¼ .

الفصل السابع

توزيعات ذى الحدين ، الطبيعى وبواسون

توزيع ذى الحدين :

إذا كانت p احتمال وقوع حدث ما فى أى محاولة وحيدة (وتسمى احتمال النجاح) و $q = 1 - p$ احتمال عدم وقوع الحدث فى أى محاولة وحيدة (وتسمى احتمال الفشل) فإن احتمال وقوع الحدث مرات عددها X بالضبط فى N محاولة (حدوث X نجاح و $N - X$ فشل) يعطى كالآتى :

$$p(X) = {}_NC_X p^X q^{N-X} = \frac{N!}{X!(N-X)!} p^X q^{N-X} \qquad (1)$$

حيث $X = 0, 1, 2, \ldots$ و $N! = N(N-1)(N-2)\ldots 1$ و $0! = 1$ بالتعريف (أنظر الفصل السادس المسألة ٦-٣٤) .

مثال ١ — احتمال الحصول على صورتين بالضبط من 6 رميات لعملة غير متحيزة هـو

$${}_6C_2(\tfrac{1}{2})^2(\tfrac{1}{2})^{6-2} = \frac{6!}{2!\,4!}(\tfrac{1}{2})^6 = \tfrac{15}{64}$$

باستخدام (١) بوضع $X = 2$ ، $N = 6$ و $p = q = ½$.

مثال ٢ — احتمال الحصول على 4 صورة فى 6 رميات لعملة غير متحيزة .

$${}_6C_4(\tfrac{1}{2})^4(\tfrac{1}{2})^{6-4} + {}_6C_5(\tfrac{1}{2})^5(\tfrac{1}{2})^{6-5} + {}_6C_6(\tfrac{1}{2})^6 = \tfrac{15}{64} + \tfrac{6}{64} + \tfrac{1}{64} = \tfrac{11}{32} \qquad (2)$$

التوزيع الاحتمالى المتقطع (١) يسمى غالبا بتوزيع ذى الحدين حيث أنه لقيم $X = 0, 1, 2, \ldots, N$ يقابل الحدود المتتالية لصيغة ذى الحدين أو مفكوك ذى الحدين .

$$(q + p)^N = q^N + {}_NC_1 q^{N-1} p + {}_NC_2 q^{N-2} p^2 + \ldots + p^N$$

حيث 1 و ${}_NC_1$ و ${}_NC_2$ و ... تسمى معاملات ذى الحدين .

مثال :

$$\begin{aligned}(q + p)^4 &= q^4 + {}_4C_1 q^3 p + {}_4C_2 q^2 p^2 + {}_4C_3 q p^3 + p^4 \\ &= q^4 + 4q^3 p + 6q^2 p^2 + 4qp^3 + p^4\end{aligned}$$

التوزيع (١) يسمى أيضا توزيع برنولى بعد أن اكتشفه جيمس برنولى فى نهاية القرن السابع عشر .

بعض خصائص توزيع ذى الحدين مذكورة فى الجدول التالى :

جدول ٧ – ١

الوسط	$\mu = Np$
التباين	$\sigma^2 = Npq$
الانحراف المعيارى	$\sigma = \sqrt{Npq}$
معامل الالتواء باستخدام العزوم	$\alpha_3 = \dfrac{q-p}{\sqrt{Npq}}$
معامل التفرطح باستخدام العزوم	$\alpha_4 = 3 + \dfrac{1-6pq}{Npq}$

مثال : فى 100 رمية لعملة غير متحيزة فإن متوسط ظهور الصورة هو $\mu = Np = (100)(\frac{1}{2}) = 50$ وهذا هو الرقم المتوقع لظهور الصورة فى 100 رمية لعملة .

الانحراف المعيارى $\sigma = \sqrt{Npq} = \sqrt{(100)(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})} = 5$

التوزيع الطبيعى :

أحد الأمثلة الهامة للتوزيع الاحتمالى المتصل هو التوزيع الطبيعى ، أو المنحنى الطبيعى أو توزيع جاوس ، ويعرف بالمعادلة .

$$Y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(X-\mu)^2/\sigma^2} \qquad (٣)$$

حيث μ = الوسط و σ = الانحراف المعيارى و $\pi = 3{\cdot}141\,59\ldots,\ e = 2{\cdot}718\,28\ldots$

المساحة الكلية المحصورة بين المنحنى (٣) والأحداثى السينى X تساوى واحدا ، وبهذا فإن المساحة تحت المنحنى بين الأحداثيات $X = a$ و $X = b$ حيث $a < b$ ، تمثل احتمال أن تقع X بين a و b ، ويعبر عنها بـ $\Pr\{a < X < b\}$.

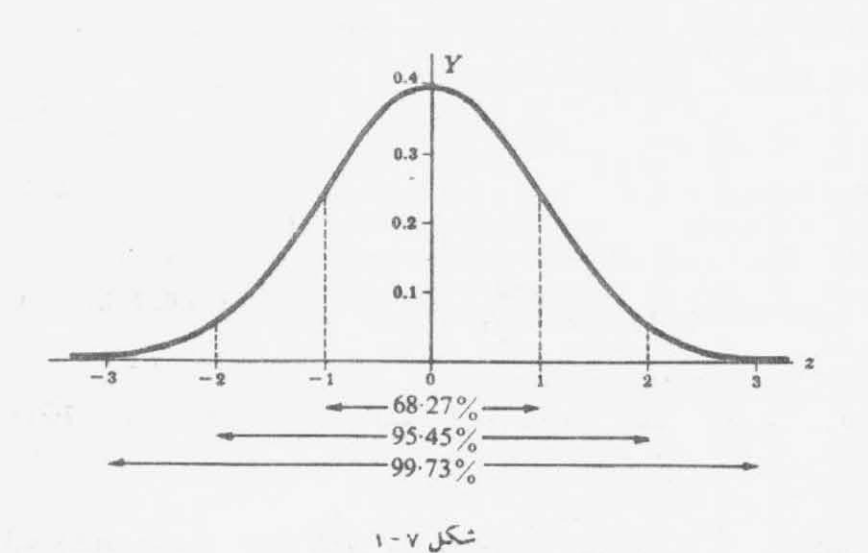
وعندما نعبر عن المتغير X بدلالة الوحدات المعيارية . $z = (X - \mu)/\sigma$ ، فإن المعادلة (٣) يستبدل بها ما يسمى بالصورة القياسية أو المعيارية .

$$Y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \qquad (٤)$$

وفى هذه الحالة فإنه يقال أن z تتوزع توزيعا معتدلا متوسطه الصفر وتباينه الوحدة .

الشكل البيانى المنحنى الطبيعى المعيارى يظهر فى الشكل ٧–١ . فى هذه الشكل أوضحنا أن المساحة الواقعة بين $z = -1 , +1$ هى 68.27% وبين $z = -2 , +2$ هى 95.45% وكذلك بين $z = -3 , +3$ هى 99.73% من المساحة الكلية والتى تساوى واحد .

يمثل الجدول فى الملحق II المساحة تحت المنحنى والمحصورة بين الأحداق $z = 0$ و أى قيمة موجبة لـ z ، ومن هذا الجدول فإن المساحة بين أى نقطتين يمكن الحصول عليها باستخدام تماثل المنحنى حول $z = 0$.



شكل ٧ - ١

بعض خصائص التوزيع الطبيعى المعرف بالمعادلة (٣) : مذكورة فى الجدول ٧ - ٢

الجدول ٧ – ٢

μ	الوسط
σ^2	التباين
σ	الانحراف المعيارى
$\alpha_3 = 0$	معامل الالتواء باستخدام العزوم
$\alpha_4 = 3$	معامل التفرطح باستخدام العزوم
$\sigma\sqrt{2/\pi} = 0.7979\sigma$	الانحراف المتوسط

العلاقة بين توزيع ذى الحدين والتوزيع الطبيعى :

إذا كانت N كبيرة وكلا من q و p ليسا قريبين من الصفر ، فإن توزيع ذى الحدين يمكن تقريبه بصورة جيدة بالتوزيع الطبيعى ذى المتغير المعيارى المعطى بـ $z = \frac{X - Np}{\sqrt{Npq}}$. ويصير التقريب أكثر جودة كلما زادت N ، وفى المالانهاية تصير العلاقة مضبوطة . وهذا موضح فى الجدول ٧–١ ، ٧–٢ حيث يتضح أنه عندما تزيد N فإن التواء وتفرطح توزيع ذى الحدين يقترب من التوزيع الطبيعى . ومن الناحية العملية فإن التقريب يعد جيدا إذا كان كل من Nq و Np أكبر من 5 .

توزيع بواسون :

التوزيع الاحتمالى المتقطع

$$p(X) = \frac{\lambda^X e^{-\lambda}}{X!} \qquad (X = 0, 1, 2, \ldots) \qquad (٥)$$

حيث $e = 2.71828\ldots$ ، λ ثابت معطى ، يسمى توزيع بواسون ، عقب اكتشاف بواسون له فى أوائل القرن التاسع عشر .

ويمكن حساب قيمة $p(X)$ باستخدام الجدول VI فى **صفحة ٥٣٨** الذى يعطى قيم $e^{-\lambda}$ لقيم λ المختلفة ، أو باستخدام اللوغاريتمات .

بعض خصائص توزيع بواسون :

بعض خصائص توزيع بواسون معطاة فى الجدول التالى

جدول ٧ – ٣

$\mu = \lambda$	الوسط
$\sigma^2 = \lambda$	التباين
$\sigma = \sqrt{\lambda}$	الانحراف المعيارى
$\alpha_3 = 1/\sqrt{\lambda}$	معامل الالتواء باستخدام العزوم
$\alpha_4 = 3 + 1/\lambda$	معامل التفرطح باستخدام العزوم

العلاقة بين توزيع ذى الحدين وتوزيع بواسون :

فى توزيع ذى الحدين (١) ، إذا كانت N كبيرة بينما احتمال وقوع حدث p قريبا من الصفر بحيث تكون $q=(1-p)$ قريبة من 1 ، فإن الحدث يسمى حدثا نادرا . ومن الناحية العملية فإننا سنعتبر أن الحدث نادر إذا كان عدد المحاولات 50 على الأقل $(N \geqq 50)$ بينما Np أقل من 5 فى هذه الحالات فإن التوزيع ذى الحدين (١) يمكن تقريبه بشكل جيد بتوزيع بواسون (٥) . وهذا يتضح من مقارنة الجداول ٧ - ١ و ٧ - ٣ أعلاه ، حيث لو عوضنا عن $Np = \lambda$ و $q \approx 1$ و $p \approx 0$ فى الجدول ٧ - ١ نحصل على النتائج بالجدول ٧ - ٣ .

وبما أن هناك علاقة بين توزيع ذى الحدين والتوزيع الطبيعى . فإنه يمكن أن نبين أن توزيع بواسون يقترب من التوزيع الطبيعى ذى المتغير المعيارى $(X-\lambda)/\sqrt{\lambda}$ عند تؤول λ إلى مالا نهاية .

توزيع كثيرات الحدود :

إذا كانت الأحداث $E_1, E_2, \ldots, E_K$ تحدث باحتمالات $p_1, p_2, \ldots, p_K$ على الترتيب ، فإن احتمال حدوث $E_1, E_2, \ldots, E_K$ مرات عددها على الترتيب $X_1, X_2, \ldots, X_K$ هو

$$\frac{N!}{X_1!\,X_2!\cdots X_K!}\,p_1^{X_1}p_2^{X_2}\cdots p_K^{X_K} \qquad (٦)$$

حيث $X_1 + X_2 + \ldots + X_K = N$

هذا التوزيع والذى يعد تعميما لتوزيع ذى الحدين ، يسمى توزيع كثيرات الحدود حيث (٦) هى الحد العام فى مفكوك كثيرات الحدود $(p_1 + p_2 + \ldots + p_K)^N$

مثال : إذا قذفت زهرة 12 مرة ، فإن احتمال الحصول على 1, 2, 3, 4, 5, 6 نقطة مرتين بالضبط لكل منها هـو

$$\frac{12!}{2!\,2!\,2!\,2!\,2!\,2!}\left(\tfrac{1}{6}\right)^2\left(\tfrac{1}{6}\right)^2\left(\tfrac{1}{6}\right)^2\left(\tfrac{1}{6}\right)^2\left(\tfrac{1}{6}\right)^2\left(\tfrac{1}{6}\right)^2 = \frac{1925}{559\,872} = 0{\cdot}003\,44$$

العدد المتوقع لوقوع $E_1, E_2, \ldots, E_K$ فى N محاولة هـو $Np_1, Np_2, \ldots, Np_K$ على الترتيب .

توفيق توزيع نظرى للتوزيع التكرارى لعينة :

إذا كان لدى الشخص بعض الأدلة على شكل توزيع مجتمع معين سواء لمبررات احتمالية أو غيرها ، فإنه غالبا ما يمكن توفيق مثل هذا التوزيع النظرى (يسمى أيضا «نموذجا» أو توزيعا «متوقعا») للتوزيع التكرارى لعينة من هذا المجتمع . والطريقة المستخدمة بشكل عام تتضمن استعمال الوسط والانحراف المعيارى للعينة لتقدير الوسط والانحراف المعيارى للمجتمع . أنظر المسائل ٧ - ٣١ ، ٧ - ٣٣ و ٧ - ٣٤ .

ولاختبار جودة توفيق هذا التوزيع النظرى ، تستخدم اختبار كا تربيع والمعطى فى الفصل الثانى عشر .

ولمحاولة تقدير ما إذا كان التوزيع الطبيعى يمثل توفيقا جيدا للبيانات المعطاة ، فإنه من المناسب استخدام ورق رسم بيانى المنحنى الطبيعى أو ورق رسم بيانى احتمالى كما يسمى أحيانا (أنظر المسألة ٧ - ٣٢) .

توزيع ذى الحدين :

مسائل محلولة

توزيع ذى الحدين :

٧-١ أحسب (أ) $5!$ (ب) $\frac{6!}{2!4!}$ (جـ) ${}_8C_3$ (د) ${}_7C_5$ (هـ) ${}_4C_4$ (و) ${}_4C_0$

الحـــل

(أ) $5! = 5.4.3.2.1 = 120$

(ب) $\frac{6!}{2!4!} = \frac{6.5.5.3.2.1}{(2.1)(4.3.2.1)} = \frac{6.5}{2.1} = 15$

(جـ) ${}_8C_3 = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8.7.6.5.4.3.2.1}{(3.2.1)(5.4.3.2.1)} = \frac{8.7.6}{3.2.1} = 56$

(د) ${}_7C_5 = \frac{7!}{5!2!} = \frac{7.6.5.4.3.2.1}{(5.4.3.2.1)(2.1)} = \frac{7.6}{2.1} = 21$

(هـ) ${}_4C_4 = \frac{4!}{4!0!} \quad 1$ (حيث $0! = 1$ بالتعريف)

(و) ${}_4C_0 = \frac{4!}{0!4!} \quad 1$

٧-٢ عند رمى عملة متوازنة ثلاث مرات أوجد احتمال ظهور الآتى :

(أ) 3 صور (ب) صورتان وكتابة (جـ) 2 كتابة ، 1 صورة (د) 3 كتابـــة

الحـــل :

الطريقة ١ :

أعتبر أن H تعبر عن « الصورة » و T تعبر عن « الكتابة » وافترض أن الرمز HTH ، على سبيل المثال يعنى ظهور الصورة فى الرمية الأولى ، الكتابة فى الرمية الثانية ثم الصورة فى الرمية الثالثة .

بما أن هناك أحد الشيئين (الصورة أو الكتابة) يمكن حدوثهما فى كل رمية ، فإن هناك $8 = (2)(2)(2)$ نتيجة ممكنة وهى

HHH, HHT, HTH, HTT, TTH, THH, THT, TTT

بما أن فرص هذه الامكانيات متساوية فى الظهور ، فإن احتمال كل هـو $^1/_8$.

(أ) 3 صور (HHH) تحدث مرة واحدة فقط ، وبهذا فإن احتمال ظهور ثلاث صور هـو $^1/_8$.

(ب) 2 صورة وكتابة تحدث ثلاث مرات (HHT, HTH, THH) وبهذا فإن

$\Pr$ { 2 صورة وكتابة } $= {}^3/_8$

(جـ) 2 كتابة وصورة تحدث ثلاث مرات (THT و TTH و HTT) إذن $\Pr$ { 2 كتابة وصورة } $= {}^3/_8$

(د) 3 كتابة (TTT) تحدث مرة واحدة فقط ، إذن $\Pr\{TTT\} = \Pr$ { 3 كتابة } $= {}^1/_8$.

الطريقة ٢ : (باستخدام القانون)

(أ) $\Pr$ { 3 صور } $= {}_3C_3(\frac{1}{2})^3(\frac{1}{2})^0 = (1)(\frac{1}{8})(1) = \frac{1}{8}$

(ب) $\Pr$ { 2 صورة وكتابة } $= {}_3C_2(\frac{1}{2})^2(\frac{1}{2})^1 = (3)(\frac{1}{4})(\frac{1}{2}) = \frac{3}{8}$

(جـ) $\Pr$ { 1 صورة و 2 كتابة } $= {}_3C_1(\frac{1}{2})^1(\frac{1}{2})^2 = (3)(\frac{1}{2})(\frac{1}{4}) = \frac{3}{8}$

(د) $\Pr$ { 3 كتابة } $= {}_3C_0(\frac{1}{2})^0(\frac{1}{2})^3 = (1)(1)(\frac{1}{8}) = \frac{1}{8}$

كذلك يمكن متابعة الحل كما فى الفصل السادس . المسألة ٦–١٠ .

٧–٣ فى خمس رميات لزهرة طاولة غير متحيزة أوجد احتمال أن يظهر الرقم 3

(أ) صفر من المرات (عدم ظهوره إطلاقا) (ب) مرة واحدة (جـ) مرتان

(د) ثلاث مرات (هـ) أربع مرات (و) خمس مرات .

الحـل :

احتمال ظهور 3 فى رمية واحدة $p = {}^1/_6$

احتمال عدم ظهور 3 فى رمية واحدة $= {}^5/_6$ ، $q = 1 - p$ إذن

(أ) $\Pr$ (عدم ظهور 3 إطلاقا) $= {}_5C_0(\frac{1}{6})^0(\frac{5}{6})^5 = (1)(1)(\frac{5}{6})^5 = \frac{3125}{7776}$

(ب) $\Pr$ (ظهور 3 مرة واحدة) $= {}_5C_1(\frac{1}{6})^1(\frac{5}{6})^4 = (5)(\frac{1}{6})(\frac{5}{6})^4 = \frac{3125}{7776}$

(جـ) $\Pr$ (ظهور 3 مرتان) $= {}_5C_2(\frac{1}{6})^2(\frac{5}{6})^3 = (10)(\frac{1}{36})(\frac{125}{216}) = \frac{625}{3888}$

(د) $\Pr$ (ظهور 3 ثلاث مرات) $= {}_5C_3(\frac{1}{6})^3(\frac{5}{6})^2 = (10)(\frac{1}{216})(\frac{25}{36}) = \frac{125}{3888}$

(هـ) $\Pr$ (ظهور 3 أربع مرات) $= {}_5C_4(\frac{1}{6})^4(\frac{5}{6})^1 = (5)(\frac{1}{1296})(\frac{5}{6}) = \frac{25}{7776}$

(و) $\Pr$ (ظهور 3 خمس مرات) $= {}_5C_5(\frac{1}{6})^5(\frac{5}{6})^0 = (1)(\frac{1}{7776})(1) = \frac{1}{7776}$

لاحظ أن هذه الاحتمالات تمثل حدود مفكوك ذى الحدين

$$(\tfrac{5}{6}+\tfrac{1}{6})^5 = (\tfrac{5}{6})^5 + {}_5C_1(\tfrac{5}{6})^4(\tfrac{1}{6}) + {}_5C_2(\tfrac{5}{6})^3(\tfrac{1}{6})^2 + {}_5C_3(\tfrac{5}{6})^2(\tfrac{1}{6})^3 + {}_5C_4(\tfrac{5}{6})(\tfrac{1}{6})^4 + (\tfrac{1}{6})^5$$

٧ - ٤ اكتب مفكوك ذى الحدين لـ (أ) $(q+p)^4$ ، (ب) $(q+p)^6$

الحـــل :

(أ)
$$\begin{aligned}(q+p)^4 &= q^4 + {}_4C_1q^3p + {}_4C_2q^2p^2 + {}_4C_3qp^3 + p^4\\ &= q^4 + 4q^3p + 6q^2p^2 + 4qp^3 + p^4\end{aligned}$$

(ب)
$$\begin{aligned}(q+p)^6 &= q^6 + {}_6C_1q^5p + {}_6C_2q^4p^2 + {}_6C_3q^3p^3 + {}_6C_4q^2p^4 + {}_6C_5qp^5 + p^6\\ &= q^6 + 6q^5p + 15q^4p^2 + 20q^3p^3 + 15q^2p^4 + 6qp^5 + p^6\end{aligned}$$

المعاملات 1, 4, 6, 4, 1 تسمى معاملات ذى الحدين المقابلة لـ $N = 4$ وكذلك 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1 تسمى معاملات ذى الحدين المقابلة لـ $N = 6$. بكتابة هذه المعاملات لقيم $N = 0, 1, 2, 3, \ldots$ كما هو موضح بالشكل ، نحصل على تراتيب تسمى بمثلث باسكال . لاحظ أن الرقم الأول والأخير فى كل صف هو الرقم ١ وأى رقم آخر يمكن الحصول عليه بجمع الرقمين إلى يمين وإلى يسار هذا الرقم فى الصف السابق .

```
            1
          1   1
        1   2   1
      1   3   3   1
    1   4   6   4   1
  1   5   10  10  5   1
1   6   15  20  15  6   1
```

٧ - ٥ فى عائلة لها 4 أطفال أوجد احتمال أن يكون بها . (أ) ولد على الأقل

(ب) ولد وبنت على الأقل .

افترض أن احتمال ولادة ولد هـــو ½

الحـــل :

(أ)

$\Pr$ (ولد) $= {}_4C_1(\frac{1}{2})^1(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{4}$ ، $\Pr$ (3 أولاد) $= {}_4C_3(\frac{1}{2})^3(\frac{1}{2})^1 = \frac{1}{4}$

$\Pr$ (ولدين) $= {}_4C_2(\frac{1}{2})^2(\frac{1}{2})^2 = \frac{3}{8}$ ، $\Pr$ (4 أولاد) $= {}_4C_4(\frac{1}{2})^4(\frac{1}{2})^0 = \frac{1}{16}$

إذن $\Pr$ (ولد على الأقل) $= \Pr$ (ولد) $+ \Pr$ (ولدين) $+ \Pr$ (3 أولاد) $+ \Pr$ (4 أولاد)

$$= \tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{8} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{16} = \tfrac{15}{16}$$

طريقة أخرى : $\Pr$ (ولد على الأقل) $= 1 - \Pr$ (عدم وجود ولد) $= 1 - (\frac{1}{2})^4 = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$

(ب) $\Pr$ (ولد وبنت على الأقل) $= 1 - \Pr$ (عدم وجود ولد) $- \Pr$ (عدم وجود بنت) $= 1 - \frac{1}{16} - \frac{1}{16} = \frac{7}{8}$

٧ – ٦ من 2000 عائلة بكل منها 4 أطفال ، ما هو العدد المتوقع للعائلات التى بها (ا) على الأقل ولد واحد (ب) ولدان (جـ) بنت أو بنتان (د) لا يوجد بها بنات ؟ أرجع إلى المسألة ٧ – ٥ (ا)

الحـــل :

(ا) العدد المتوقع للعائلات التى يوجد بها ولد على الأقل $= 1875 = 2000(^{15}/_{16})$

(ب) العدد المتوقع للعائلات التى يوجد بها ولدان $750 = 2000\ (^{5}/_{8}) = 2000.\text{Pr}\ \{\text{ولدان}\}$

(جـ) $\text{Pr}\ \{\text{بنت أو بنتان}\} = \text{Pr}\ \{\text{بنت}\} + \text{Pr}\ \{\text{بنتان}\}$

$= \text{Pr}\ \{\text{ولد}\} + \text{Pr}\ \{\text{ولدان}\}$

$= 1/4 + {}^{3}/_{8} = {}^{5}/_{8}$

العدد المتوقع للعائلات التى يوجد بها بنت أو بنتان $= 1250 = 2000\ (\ ^{5}/_{8}\ )$

(د) العدد المتوقع للعائلات التى لا يوجد بها بنات $= 125 = 2000\ (^{1}/_{16})$

٧ – ٧ إذا كان 20 % من إنتاج آلة لصناعة المسامير هــو إنتاج تالف ، أوجـــد احتمال أن يكون بين 4 مسامير اختيرت عشوائيا (ا) 1 (ب) 0 (جـ) على الأكثر مساران ، ستكون تالفة .

الحـــل :

احتمال وجود مسمار تالف هـــو $0.2 = p$ ، ووجود مسمار غير تالف $0.8 = q = 1 - p$

(ا) $\text{Pr}\ (\text{مسمار تالف من 4 مسامير}) \doteq {}_4C_1(0{\cdot}2)^1(0{\cdot}8)^3 = 0{\cdot}4096$

(ب) $\text{Pr}\ (\text{عدم وجود أى مسمار تالف}) = {}_4C_0(0{\cdot}2)^0(0{\cdot}8)^4 = 0{\cdot}4096$

(جـ) $\text{Pr}\ (\text{وجود مسمارين تالفين}) = {}_4C_2(0{\cdot}2)^2(0{\cdot}8)^2 = 0{\cdot}1536.$

إذن

$\text{Pr}\ \{\text{وجود مسمارين تالفين على الأكثر}\} = \text{Pr}\ \{\text{0 مسمار تالف}\} + \text{Pr}\ \{\text{1 مسمار تالف}\} + \text{Pr}\ \{\text{2 مسمار تالف}\}$

$= 0{\cdot}4096 + 0{\cdot}4096 + 0{\cdot}1536 = 0{\cdot}9728$

٧ – ٨ إذا كان احتمال أن يتخرج طالب التحق بكلية هو 0.4 . حدد احتمال أن يكون من بين 5 طلبة (ا) لا يتخرج أحد (ب) يتخرج واحد على الأقل .

الحـــل :

(ا) $\text{Pr}\ (\text{لا يتخرج أحـــد}) = {}_5C_0(0{\cdot}4)^0(0{\cdot}6)^5 = 0{\cdot}077\,76,$
أو حوالى 0.08

(ب) $\text{Pr}\ (\text{يتخرج واحـــد}) = {}_5C_1(0{\cdot}4)^1(0{\cdot}6)^4 = 0{\cdot}2592$
أو حوالى 0.26

(جـ) $\text{Pr}\ (\text{أن يتخرج واحد على الأقل}) = 1 - \text{Pr}\ (\text{أن لا يتخرج أحد})$
أو حوالى 0.92

٧ - ٩ ما هو احتمال الحصول على ما مجموعة 9 (ا) مرتان ، (ب) على الأقل مرتان فى 6 رميات لزهرتى طاولة ؟

الحـل :

كل من الـ 6 طرق التى يمكن أن تقع بها الزهرة الأولى يمكن أن ترتبط بكل من الـ 6 طرق التى يمكن أن تقع بها الزهرة الثانية ، وبهذا يكون هناك $36 = 6.6$ طريقة يمكن أن تقع بها الزهرتان . حيث هناك : 1 فى الزهرة الأولى ، 1 فى الزهرة الثانية ، 1 فى الزهر الأولى و 2 فى الزهرة الثانية وهكذا ... ، ويرمز لها $(1, 2)$ و$(1, 1)$

من هذه الـ 36 طريقة ، وكلها لها نفس الفرصة فى الظهور إذا كانت الزهرتان متوازنتان ، ما مجموعة 9 يحدث فى أربع حالات : $(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)$. وبهذا يكون احتمال ظهور ما مجموعة 9 فى رمية واحدة لزهرتين هـو $1/9 = 4/36 = p$ واحتمال عدم الحصول على ما مجموعة 9 فى رمية زهرتين $q = 1 - p = 8/9$.

(ا) $\Pr$ (اثنين 9 فى ست رميات) $= {}_6C_2(\frac{1}{9})^2(\frac{8}{9})^{6-2} = \frac{61\,440}{531\,441}$

$\Pr$ { وجود اثنين 9 على الأقل } $=$ $\Pr$ { اثنين 9 } $+$ $\Pr$ { ثلاثة 9 } $+$ $\Pr$ { أربعة 9 } $+$ $\Pr$ { خمسة 9 } $+$ $\Pr$ { ستة 9 }

$$= {}_6C_2(\tfrac{1}{9})^2(\tfrac{8}{9})^4 + {}_6C_3(\tfrac{1}{9})^3(\tfrac{8}{9})^3 + {}_6C_4(\tfrac{1}{9})^4(\tfrac{8}{9})^2 + {}_6C_5(\tfrac{1}{9})^5\tfrac{8}{9} + {}_6C_6(\tfrac{1}{9})^6$$

$$= \frac{61\,440}{531\,441} + \frac{10\,240}{531\,441} + \frac{960}{531\,441} + \frac{48}{531\,441} + \frac{1}{531\,441} + \frac{72\,689}{531\,441}$$

طريقة اخرى :

$\Pr$ { اثنين 9 على الأقل } $= 1 - \Pr$ { عدم وجود 9 } $- \Pr$ { واحد 9 }

$$= 1 - {}_6C_0(\tfrac{1}{9})^0(\tfrac{8}{9})^6 - {}_6C_0(\tfrac{1}{9})^1(\tfrac{8}{9})^5 = \frac{72\,689}{531\,441}$$

٧-١٠ احسب (ا) $\sum_{X=0}^{N} Xp(X)$ (ب) $\sum_{X=0}^{N} X^2 p(X)$ حيث $p(X) = {}_NC_X p^X q^{N-X}$

الحـل :

(ا)
$$\sum_{X=0}^{N} X p(X) = \sum_{X=1}^{N} X \frac{N!}{X!\,(N-X)!} p^X q^{N-X} = Np \sum_{X=1}^{N} \frac{(N-1)!}{(X-1)!\,(N-X)!} p^{X-1} q^{N-X}$$
$$= Np(q+p)^{N-1} = Np$$

بما أن $q + p = 1$

$$\sum_{X=0}^{N} X^2 p(X) = \sum_{X=1}^{N} X^2 \frac{N!}{X!\,(N-X)!} p^X q^{N-X} = \sum_{X=1}^{N} [X(X-1) + X] \frac{N!}{X!\,(N-X)!} p^X q^{N-X}$$

$$= \sum_{X=2}^{N} X(X-1) \frac{N!}{X!\,(N-X)!} p^X q^{N-X} + \sum_{X=1}^{N} X \frac{N!}{X!\,(N-X)!} p^X q^{N-X}$$

$$= N(N-1)p^2 \sum_{X=2}^{N} \frac{(N-2)!}{(X-2)!\,(N-X)!} p^{X-2} q^{N-X} + Np = N(N-1)p^2 (q+p)^{N-2} + Np \quad \text{(ب)}$$

$$= N(N-1)p^2 + Np$$

ملحوظة : النتيجة فى (ا) و (ب) هى القيمة المتوقعة لكل من X^2 و X ويرمز لهما $E(X^2)$ و $E(X)$ على الترتيب (أنظر الفصل السادس) .

٧–١١ إذا كان متغير له توزيع ذى الحدين ، أوجد (ا) وسطه μ (ب) تباينه σ^2

الحــل :

$$\mu = \text{توقع المتغير} = \sum_{X=0}^{N} X p(X) = Np \quad \text{(ا)}$$

من المسألة ٧ – ١٠ (ا)

$$\sigma^2 = \sum_{X=0}^{N} (X-\mu)^2 p(X) = \sum_{X=0}^{N} (X^2 - 2\mu X + \mu^2) p(X) = \sum_{X=0}^{N} X^2 p(X) - 2\mu \sum_{X=0}^{N} X p(X) + \mu^2 \sum_{X=0}^{N} p(X) \quad \text{(ب)}$$

$$= N(N-1)p^2 + Np - 2(Np)(Np) + (Np)^2(1) = Np - Np^2 = Np(1-p) = Npq$$

باستخدام $\mu = Np$ ونتيجة المسألة ٧–١٠ فإننا نستنتج أن الانحراف المعيارى للمتغير الذى يتوزع كتوزيع ذى الحدين هــو $\sigma = \sqrt{Npq}$.

طريقة أخرى : $E[(X-\bar{X})]^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 = N(N-1)p^2 + Np - N^2p^2 = Np - Np^2 = Npq$

من المسألة ٦–٦٢ (ا) الفصل السادس .

٧–١٢ إذاكان احتمال وجود مسمار معيب هــو 0.1 أوجــد

(ا) الوسط (ب) الانحراف المعيارى ، لتوزيع المسامير المعيبة من مجموع 400 مسمار .

(ا) الوسط $= Np = 400(0.1) = 40$ ، بمعنى أننا نتوقع وجود 40 مسمار معيب

(ب) التباين $= N pq = 400\,(0.1)\,(0.9) = 36$ وبهذا فإن الانحراف المعيارى $= \sqrt{36} = 6$

٧–١٣ أوجد باستخدام العزوم معاملات (ا) الالتواء (ب) التفرطح للتوزيع فى المسألة ٧–١٢

الحــل :

(ا) معامل الالتواء باستخدام العزوم $= \frac{q - p}{\sqrt{Npq}} = \frac{0.9 - 0.1}{6} = 0.133$

وبما أن هذا المقدار موجب فإن التوزيع ملتو إلى اليمين

(ب) $3.01 = \frac{1 - 6(0.1)(0.9)}{36} + 3 = \frac{1 - 6pq}{Npq} + 3 =$ معامل التفرطح باستخدام العزوم

التوزيع مدبب بشكل بسيط بالمقارنة بالتوزيع الطبيعى (له قة أعلى نسبيا ، أنظر الفصل الخامس)

التوزيع الطبيعى :

٧–١٤ فى امتحان نهائى فى الرياضة كان المتوسط 72 والانحراف المعيارى 15 . أوجد الدرجات المعيارية (الدرجات معبرا عنها بوحدات من الانحراف المعيارى) للطلبة الحاصلين على درجات (أ) 60 (ب) 93 (جـ) 72

الحـل :

(أ) $z = \frac{X - \bar{X}}{s} = \frac{60 - 72}{15} = -0.8$ (ب) $z = \frac{X - \bar{X}}{s} = \frac{93 - 72}{15} = 1.4$

(جـ) $z = \frac{X - \bar{X}}{s} = \frac{72 - 72}{15} = 0$

٧–١٥ بالرجوع إلى المسألة ٧–١٤ أوجد الدرجات المقابلة للدرجات المعيارية (أ) -1 (ب) 1.6

الحـل :

(أ) $X = \bar{X} + zs = 72 + (-1)(15) = 57$ (ب) $X = \bar{X} + zs = 72 + (1.6)(15) = 96$

٧–١٦ أخبر طالبان بأنهما قد حصلا على درجات معيارية 0.4 — , 0.8 فى امتحان للقدرات فى اللغة الانجليزية . فإذا كانت درجاتهما هى 64 و 88 على الترتيب ، أوجد الوسط والانحراف المعيارى لدرجات الامتحان .

الحـل :

باستخدام المعادلة $X = \bar{X} + zs$ للطالب الأول

(١) $88 = \bar{X} + 0.8s$

وباستخدام للطالب الثانى $64 = \bar{X} - 0.4s$ (٢)

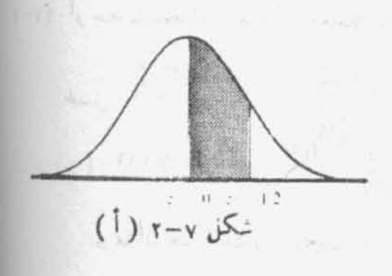
وبحل (١) ، (٢) معا نحصل على : الوسط $\bar{X} = 72$ والانحراف المعيارى $s = 20$.

٧–١٧ أوجد المساحة تحت المنحنى الطبيعى فى كل من الحالات (أ) إلى (ز) التالية . باستخدام الجدول فى صفحة ٥٣٣

(أ) بين $z = 0$ و $z = 1.2$.

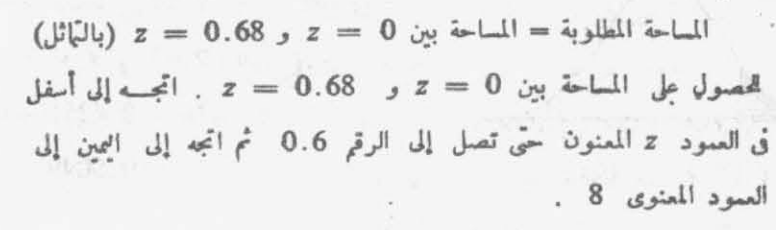
فى الجدول صفحة ٥٣٨ . أبدأ بالعمود المعنون z حتى تصل إلى الرقم 1.2 ثم اتجه إلى اليمين إلى العمود المعنوى 0

النتيجة 0.3849 هى المساحة المطلوبة وتمثل احتمال أن تقع z بين صفر و 1.2 ، ويرمز لها بالتعبير $\Pr\{0 \leq z \leq 1.2\}$

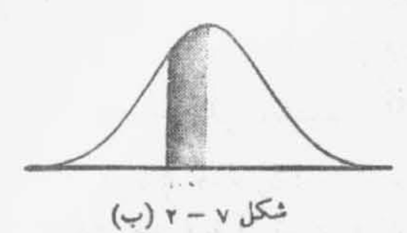


شكل ٧–٢ (أ)

(ب) بين $z = -0.68$ و $z = 0$.



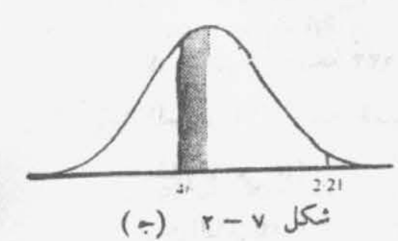
المساحة المطلوبة = المساحة بين $z = 0$ و $z = 0.68$ (بالتماثل) لحصول على المساحة بين $z = 0$ و $z = 0.68$. اتجه إلى أسفل فى العمود z المعنون حتى تصل إلى الرقم 0.6 ثم اتجه إلى اليمين إلى العمود المعنوى 8 .



شكل ٧ - ٢ (ب)

النتيجة 0.2517 هى المساحة المطلوبة وتمثل احتمال أن z تقع بين -0.68 و 0 ، ويرمز لها بالتعبير $\Pr\{-0.68 \leq z \leq 0\}$

(جـ) بين $z = -0.46$ و $z = 2.21$.



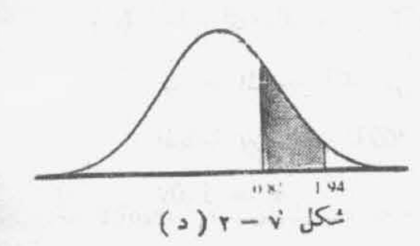
شكل ٧ - ٢ (جـ)

المساحة المطلوبة = (المساحة بين $z = 0.46$ و $z = 0$)

\+ (المساحة بين $z = 0$ و $z = 2.21$)

$0.1772 + 0.4864 = 0.6636$

(د) بين $z = 0.81$ و $z = 1.94$



شكل ٧ - ٢ (د)

المساحة المطلوبة = (المساحة بين $z = 0$ و $z = 1.94$)

− (المساحة بين $z = 0$ و $z = 0.81$)

$0.1828 = 0.4738 - 0.2910 =$

(هـ) إلى يسار $z = 0.6$

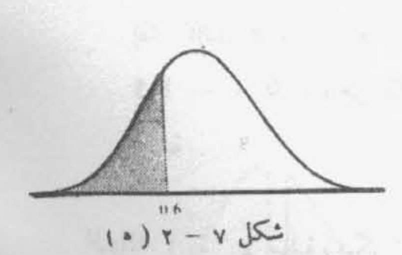
المساحة المطلوبة = (المساحة إلى يسار $z = 0$)

— (المساحة بين $z = -0.6$ و $z = 0$)

= (المساحة إلى يسار $z = 0$)

— (المساحة بين $z = 0$ و $z = 0.6$)

$0.2742 = 0.5 - 0.2258$



شكل ٧ - ٢ (هـ)

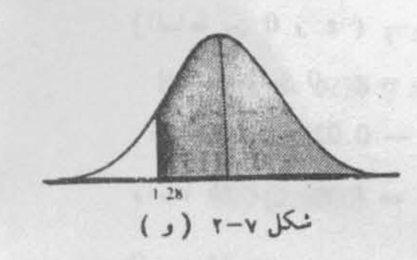
(و) إلى يمين $z = 1.28$

المساحة المطلوبة = (المساحة بين $z = -1.28$ و $z = 0$)

\+ (المساحة إلى يمين $z = 0$)

$0.8997 = 0.3997 + 0.5$

وهذه مثل $\Pr\{z \geq -1.28\}$



شكل ٧-٢ (و)

(ز) إلى يمين $z = 2.05$ وإلى يسار $z = -1.44$

المساحة المطلوبة = المساحة الكلية – (المساحة بين $z = 1.44$ و $z=0$)

– (المساحة بين $z = 0$ و $z = 2.05$).

$= 1 - 0.4251 - 0.4798$

$1 - 0.9049 = 0.0951$

شكل ٧ – ٢ (ز)

٧–١٨ حدد قيمة أو قيم z فى كل من الحالات من (ا) إلى (جـ) ، حيث المساحة تمثل تلك التى تقع تحت المنحنى الطبيعى .

(ا) إذا كانت المساحة بين 0 و z هى 0.3770

فى الملحق II صفحة ٥٣٣ ، القيمة 0.3770 تتحدد إلى اليمين فى الصف المعنون 1.1 وتحت العمود المعنوى 0.6 . وبهذا تكون قيمة z المطلوبة هى 1.16 .

ومن التماثل $z = -1.16$ قيمة أخرى . وبهذا فان $z = \pm 1.16$

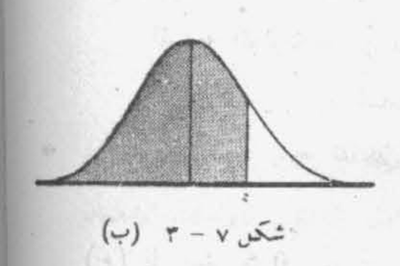
شكل ٧–٣ (ا)

(ب) المساحة إلى يسار z هى 0.8621

بما أن المساحة أكبر من 0.5 ، فإن z يجب أن تكون موجبة .

المساحة بين 0 و $z = 0.8621 - 0.5 = 0.3621$ ومنها

$z = 1.09$



شكل ٧ – ٣ (ب)

(جـ) المساحة بين -1.5 و z هى 0.0217

إذا كانت z موجبة فإن المساحة يجب أن تكون أكبر من المساحة بين -1.5 و 0 ، وهى 0.4332 ، وبهذا فإن z يجب أن تكون سالبة .

الحالة ١ : z سالبة ولكن إلى يمين -1.5

المساحة بين -1.5 و z =

= (المساحة بين -1.5 و 0) – (المساحة بين 0 و z)

$0.0217 = 0.4322 -$ (المساحة بين 0 و z)

إذن المساحة بين 0 ، z =

$= 0.4332 - 0.0217 = 0.4115$

ومنها $z = -1.35$

شكل ٧ – ٣ (جـ)

(ب) الأوراق التى طولها أكبر من 185 mm يجب أن يكون مقاييسها على الأقل 185.5 mm

185.5mm معبرا عنها بوحدات معيارية $= (185.5-151)/15 = 2.30$

نسبة الأوراق المطلوبة = (المساحة إلى يمين $z = 2.30$)

= (المساحة إلى يمين $z = 0$) — (المساحة بين $z = 0$ و $z = 2.30$)

$0.5 - 0.4893 = 0.0107$

2.30

شكل ٧ - ٤ (ب)

وبهذا فإن عدد الأوراق التى تكون أطوالها أكبر من 185 mm هــو $5 = 500\,(0.107)$.

إذا كانت L تمثل طول ورقة اختيرت عشوائيا ، فإنه يمكن تلخيص النتائج السابقة باستخدام الاحتمال بكتابة .

$$\Pr\{L > 185\cdot5\} = 0\cdot0107 \quad , \quad \Pr\{119\cdot5 \leq L \leq 155\cdot5\} = 0\cdot6000$$

٧-٢١ حدد عدد الأوراق فى المسألة السابقة التى طولها (ا) أقل من 128 mm (ب) 128 mm ، (جـ) أقل من أو يساوى 128 mm .

الحــل :

(ا) الأوراق التى يكون طولها أقل من 128 mm يجب أن يكون مقياسها أقل من 127.5 mm

127.5mm معبرا عنها بوحدات قياسية $= -1.57 = (127.5-151)/15$

نسبة الأوراق المطلوبة = (المساحة على يسار $z = -1.57$)

= (المساحة على يسار $z = 0$) — (المساحة بين $z = -1.57$ و $z = 0$)

$0.5 - 0.4418 = 0.0582$

شكل ٧-٥ (ا)

وبهذا فإن عدد الأوراق التى يكون طولها أقل من 128 mm $= 29 = 500(0.0582)$.

(ب) الأوراق التى تقاس 128 mm تقع أطوالها بين 127.5 و 128.5 mm . أنظر الشكل ٧ - ٥ (ب) أدناه .

127.5 mm معبرا عنها بوحدات معيارية $= -1.57 = (127.5 - 151)/15$

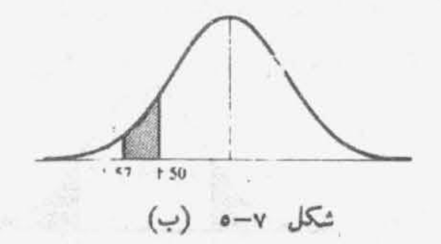
128.5 mm معبرا عنها بوحدات معيارية $= -1.50 = (128.5 - 151)/15$

نسبة الأوراق المطلوبة = (المساحة بين $z = -1.57$ و $z = -1.50$)

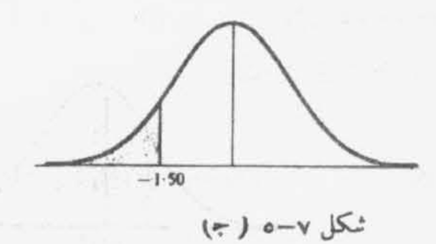
= (المساحة بين $z = -1.57$ و $z = 0$) — (المساحة بين $z = -1.5$ و $z = 0$)

$0.4418 - 0.4332 = 0.0086$

وبهذا فإن عدد الأوراق التى لها 128 mm هو 4 = (0.0086) 500



شكل ٧–٥ (ب)



شكل ٧–٥ (جـ)

(جـ) الأوراق التى يكون طولها أقل من أو يساوى 128 mm يجب أن يكون مقياسها أقل من 128.5 mm . أنظر الشكل ٧ – ٥ (جـ).

128.5 mm معبرا عنها بوحدات معيارية = $(128.5 - 151)/15 = -1.50$

نسبة الأوراق المطلوبة = (المساحة إلى يسار $z = -1.50$)

(المساحة إلى يسار $z = 0$) — (المساحة بين $z = -1.50$ و $z = 0$)

$= 0.5 - 0.4332 = 0.0668$

وبهذا فإن عدد الأوراق التى لها طول 128 mm أو أقل هو 33 = (0.0668) 500)

طريقة أخرى : باستخدام الأجزاء (أ) ، (ب)

عدد الأوراق التى لها طول أقل من أو يساوى 128 mm يساوى (عدد الأوراق التى طولها أقل من 128 mm) + (عدد الأوراق التى طولها 128 mm) = 33 = 4 + 29

٧–٢٢ كانت الدرجات فى امتحان مفاجئ قصير فى البيولوجى 10 ,... ,2 ,0,1 نقطة ، معتمدا على عدد الاجابات الصحيحة من 10 من أسئلة . وكان متوسط الدرجات 6.7 وانحرافها المعيارى هو 1.2 . إذا افترضنا أن الدرجات تتوزع حسب التوزيع الطبيعى ، حدد (أ) النسبة المئوية لعدد الطلبة الدين سجلوا 6 نقط (ب) أكبر درجة سجلها أقل 10% من طلبة الفصل (جـ) أقل درجة سجلها أحسن 10% من طلبة الفصل .

الحـــل :

(أ) لاستخدام التوزيع الطبيعى لبيـــانات متقطعة ، نجد أنه من الضرورى معالجة هذه البيـــانات كما لو كـــانت بيانات متصلة . وبهذا فإن تسجيل 6 نقط تعتبر كما لو كانت من 5.5 إلى 6.5 نقطة . أنظر الشكل ٧ – ٦ (أ).

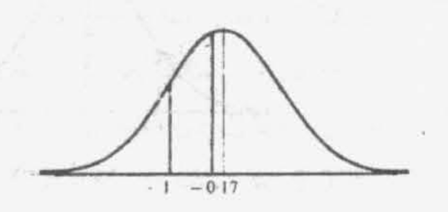
5.5 كوحدات معيارية = $(5.5 - 6.7)/1.2 = -1.0$

6.5 كوحدات معيارية = $(6.5 - 6.7)/1.2 = -0.17$

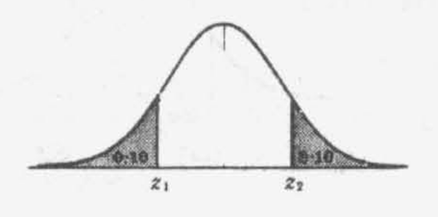
النسبة المطلوبه = (المساحه بين $z = -1$ و $z = -0.17$)

= (المساحة بين $z = -1$ و $z = 0$) — (المساحة بين $z = -0.17$ و $z = 0$) .

$= 0.3413 - 0.0675 = 0.2738 = 27\%$



شكل ٧–٦ (أ)



شكل ٧–٦ (ب)

(ب) اعتبر أن X_1 هى الدرجة الكبرى المطلوبة و z_1 هى الدرجة معبرا عنها بوحدات معيارية .
من الشكل ٧–٦ (ب) فإن المساحة إلى يسار z_1 هى $0.10 = 10\%$ وبهذا فإن (المساحة بين z_1 و 0) $= 0.40$ ، و $z_1 = -1.28$ (بشكل قريب جدا) .

إذن $1.28 = (X_1 - 6.7)/1.2 = z_1$ و $X_1 = 5.2$ أو $X_1 = 5$ إلى أقرب رقم صحيح .

(جـ) اعتبر أن X_2 هى الدرجة الصغرى المطلوبة و z_2 هى الدرجة معبراً عنها بوحدات معيارية .
من (ب) ، وبالتماثل ، $z_2 = 1.28$. إذن $(X_2 - 6.7)/1.2 = 1.28$ و $X_2 = 8.2$ أو $X_2 = 8$
إلى أقرب رقم صحيح .

٧ - ٢٣ متوسط القطر الداخلى فى عينة من 200 جلبة مستديرة من إنتاج آلة معينة هو 5.02 mm وانحرافها المعيارى 0.05 mm والهدف من استخدام هذه الجلب يسمح بانحراف فى القطر أقصاه من 4.96 إلى 5.08 mm ، وفيما عدا ذلك تعتبر الجلبة معيبة . أوجد النسبة المئوية للجلب التالفة فى إنتاج هذه الآلة ، مفترضاً أن الأقطار تتوزع توزيعاً طبيعياً .

الحــل :

4.96 معبراً عنها بوحدات لمعيارية $= (4.96 - 5.02)/0.05 = -1.2$

5.08 معبراً عنها بوحدات معيارية $= (5.08 - 5.02)/0.05 = 1.2$

نسبة الجلب غير التالفة

(المساحة تحت المنحنى الطبيعى بين $z = -1.2$ و $z = 1.2$)

= (ضعف المساحة بين $z = 0$ و $z = 1.2$)

$2\,(0.3849) = 0.7698$

أو 77%

شكل ٧ – ٧

وبهذا فإن نسبة الجلب التالفة $= 100\% - 77\% = 23\%$

* لاحظ أنه لو اعتبرنا أن الفترة من 4.96 إلى 5.08 mm تمثل فعلا الأقطار من 4.955 إلى 5.085 mm فإن النتيجة السابقة تعدل تعديلا طفيفاً . وعلى أية حال فإلى رقين عشريين فإن النتيجة لن تختلف .

التوزيع الطبيعى كتقريب لتوزيع ذى الحدين :

٧-٢٤ أوجد احتمال الحصول على مابين 3 و 6 صورة (6 متضمنة فى الفترة) فى 10 رميات لعملة متوازنة باستخدام (أ) توزيع ذى الحدين ، (ب) التوزيع الطبيعى كتقريب لتوزيع ذى الحدين

الحل :

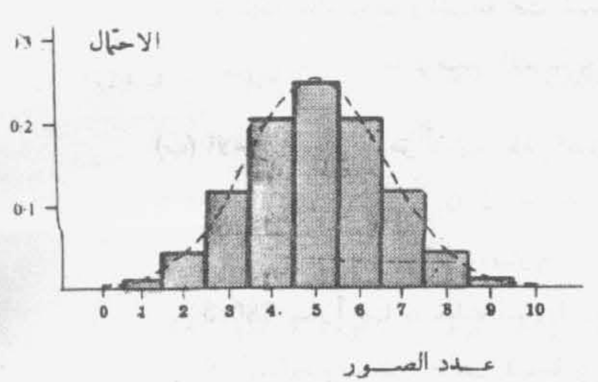
(أ)

$\Pr\{3 \text{ صور}\} = {}_{10}C_3(\frac{1}{2})^3(\frac{1}{2})^7 = \frac{15}{128}$ $\qquad$ $\Pr\{5 \text{ صور}\} = {}_{10}C_5(\frac{1}{2})^5(\frac{1}{2})^5 = \frac{63}{256}$

$\Pr\{4 \text{ صور}\} = {}_{10}C_4(\frac{1}{2})^4(\frac{1}{2})^6 = \frac{105}{512}$ $\qquad$ $\Pr\{6 \text{ صور}\} = {}_{10}C_6(\frac{1}{2})^6(\frac{1}{2})^4 = \frac{105}{512}$

إذن $\Pr\{\text{مابين } 3 \text{ , } 6 \text{ صور بما فيها } 6\} = \frac{15}{128} + \frac{105}{512} + \frac{63}{256} + \frac{105}{512} = \frac{99}{128} = 0.7734.$

شكل ٧ – ٨ (أ)



شكل ٧ – ٨ (ب)

(ب) توزيع الاحتمال لعدد الصور فى 10 رميات لعملة موضح بيانياً فى الأشكال ٧ – ٨ (أ) و ٧ – ٨ (ب) أعلاه ، حيث الشكل ٧ – ٨ (ب) تعامل البيانات كما لو كانت متصلة . والاحتمال المطلوب هو مجموع مساحات المستطيلات المظللة بالشكل ٧ – ٨ (ب) ويمكن تقريبها بالمساحة تحت المنحنى الطبيعى المقابل والمرسوم بخطوط متقطعة .

باعتبار البيانات متصلة ، فإنه يترتب على ذلك اعتبار من 3 إلى 6 صور مثل من 2.5 إلى 6.5 صورة . كذلك فإن متوسط وتباين توزيع ذى الحدين معطى بـ $\mu = Np = 10(\frac{1}{2}) = 5$ and $\sigma = \sqrt{Npq} = \sqrt{(10)(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})} = 1.58.$

والآن 2.5 معبراً عنها بوحدات معيارية $= (2.5 - 5)/1.58 = -1.58$

و 6.5 معبراً عنها بوحدات معيارية $= (6.5 - 5)/1.58 = 0.95$

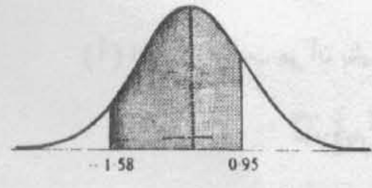
الاحتمال المطلوب = (المساحة بين $z = -1.58$ و $z = 0.95$)

= المساحة بين $z = -1.58$ و $z = 0$) +

(المساحة بين $z = 0$ و $z = 0.95$)

$= 0.4429 + 0.3289 = 0.7718$

والذى يقارن بشكل جيد مع القيمة الحقيقية 0.7734 التى حصلنا عليه فى الجزء (أ) .



شكل ٧ – ٩

وتزداد درجة الدقة لقيم N الأكبر .

٧-٢٥ عملة متوازنة قذفت 500 مرة . أوجد احتمال أن عدد الصور لن تختلف عن 250

(أ) بأكثر من 10 (ب) بأكثر من 30

الحـــل :

$$\mu = Np = (500)(\tfrac{1}{2}) = 250 \quad \sigma = \sqrt{Npq} = \sqrt{(500)(\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2})} = 11.18$$

(أ) المطلوب هو احتمال أن يكون عدد الصور يقع بين 240 و 260 أو ، إذا اعتبرنا أن البيانات متصلة ، يقع بين 239.5 و 260.5 .

239.5 معبراً عنها بوحدات معيارية $0.94 - = (239.5 - 250)/11.18$

260.5 معبراً عنها بوحدات معيارية $= 0.94$

الاحتمال المطلوب = (المساحة تحت المنحنى الطبيعى بين $z = -0.94$ و $z = 0.94$)

= (ضعف المساحة بين $z = 0$ و $z = 0.94$) $= 0.6528 = 2(0.3264)$

(ب) الاحتمال المطلوب هو أن يقع عدد الصور بين 220 و 280 أو ، إذا اعتبرنا أن البيانات متصلة ، بين 219.5 و 280.5

219.5 معبراً عنها بوحدات معيارية $= (219.5 - 250)/11.18 = -2.73$.

280.5 معبراً عنها بوحدات معيارية $= 2.73$

الاحتمال المطلوب = (ضعف المساحة بين $z = 0$ و $z = -2.73$)

$2(0.4968) = 0.9936$

ومن هذا يتضح أنه يمكن أن تكون على درجة كبيرة من الثقة أن عدد الصور لن تختلف عن القيمة المتوقعة (250) بأكثر من 30 . أما إذا حدث أن كان عدد الصور الفعلى هو 280 . فإننا سنعتقد اعتقاداً قوياً بأن العملة متحيزة أى مغشوشة .

٧-٢٦ قذفت زهرة 120 مرة . أوجد احتمال أن يظهر الوجه 4 :

(أ) 18 مرة أو أقل (ب) 14 مرة أو أقل . مفترضاً أن الزهرة غير متحيزة .

الحـــل :

احتمال ظهور الوجه الذى عليه الرقم 4 هو $p = {}^{1}/_{6}$ ، واحتمال عدم ظهوره هو $q = {}^{5}/_{6}$

(أ) الاحتمال المطلوب هو أن يظهر الوجه 4 بين 0 و 18 مرة . وهذا بالضبط يساوى

$${}_{120}C_{18}(\tfrac{1}{6})^{18}(\tfrac{5}{6})^{102} + {}_{120}C_{17}(\tfrac{1}{6})^{17}(\tfrac{5}{6})^{103} + \cdots + {}_{120}C_{0}(\tfrac{1}{6})^{0}(\tfrac{5}{6})^{120}$$

وبما أن العمل المطلوب فى الحساب عمل شاق ، فإننا نستخدم التقريب باستخدام المنحنى الطبيعى .

وإذا اعتبرنا أن البيانات متصلة ، ينتج عن ذلك أن ظهور الوجه 4 بين 0 إلى 18 مرة يمكن اعتباره مثل ظهور هذا الوجه بين 0.5 — إلى 18.5 . كذلك

$$\mu = Np = 120(\tfrac{1}{6}) = 20 \quad \text{و} \quad \sigma = \sqrt{Npq} = \sqrt{(120)(\tfrac{1}{6})(\tfrac{5}{6})} = 4.08$$

إذن 0.5 — معبراً عنها بوحدات معيارية $= (-0.5 - 20)/4.08 = -5.02$

18.5 معبراً عنها بوحدات معيارية $= -0.37$

الاحتمال المطلوب = (المساحة تحت المنحنى الطبيعى بين $z = -5.02$ و $z = -0.37$)

= (المساحة بين $z = 0$ و $z = -5.02$) — (المساحة بين $z = 0$ و $z = -0.37$)

$$0.5 - 0.1443 = 0.3557$$

(ب) خطوط الحل كما فى (أ) ، مستخدمين 14 بدلا من 18

إذن 0.5 — بوحدات معيارية = 5.02 ، 14.5 بوحدات معيارية $= (14.5 - 20)/4.08 = 1.35$.

الاحتمال المطلوب = (المساحة تحت المنحنى الطبيعى بين $z = -5.02$ و $z = -1.35$)

= (المساحة بين $z = 0$ و $z = -5.02$) — (المساحة بين $z = 0$ و $z = -1.35$)

$$0.5 - 0.4115 = 0.0885$$

ومن هذا فإنه لو كررنا عينات كل منها مكون من 120 رمية لزهرة ، فإن الوجه 4 يظهر 14 مرة أو أقل فى حوالى 1/10 من هذه العينات .

توزيع بواسون :

٧-٢٧ عشرة فى المائة من الأدوات المنتجة فى عملية صناعية معينة هى أدوات تالفة . أوجد احتمال أن يكون فى 10 من هذه الأدوات وحدتان تالفتان بالضبط باستخدام (أ) توزيع ذى الحدين (ب) تقريب بواسون لتوزيع ذى الحدين .

الحـــل :

احتمال وجود أداة تالفة $= p = 0.1$

(أ) $\Pr\{\text{2 أداة تالفة من 10}\} = {}_{10}C_2(0{\cdot}1)^2(0{\cdot}9)^8 = 0{\cdot}1937 \text{ or } 0{\cdot}19.$

(ب) $\lambda = Np = 10(0{\cdot}1) = 1.$

$$\Pr\{\text{2 أداة تالفة من 10}\} = \frac{\lambda^X e^{-\lambda}}{X!} = \frac{(1)^2 e^{-1}}{2!} = \frac{e^{-1}}{2} = \frac{1}{2e} = 0{\cdot}1839$$

أو 0.18 ، باستخدام $e = 2.718$

بشكل عام فإن التقريب يعتبر جيداً إذا كانت $p \leqq 0.1$ و $\lambda = Np \leqq 5$.

٧–٢٨ إذا كان احتمال أن يعانى شخص من رد فعل سيىء عند حقنه بمصل معين هو 0.001 ، أوجد احتمال أنه من 2000 شخص (أ) 3 بالضبط (ب) أكثر من شخصين ، سيعانون من رد فعل سيىء .

الحـــل :

$$\Pr\{ X \text{ شخص يعانى من رد فعل سيىء } \} = \frac{\lambda^X e^{-\lambda}}{X!} = \frac{2^X e^{-2}}{X!}$$

حيث $\lambda = Np\ (2000)(0{\cdot}001) = 2$

(أ) $\Pr\{ 3 \text{ أشخاص سيعانون من رد فعل سيىء } \} = \frac{2^3 e^{-2}}{3!} = \frac{4}{3e^2} = 0{\cdot}180$

(ب)

$$\Pr\{ 0 \text{ سيعانى } \} = \frac{2^0 e^{-2}}{0!} = \frac{1}{e^2}$$

$$\Pr\{ 1 \text{ سيعانى } \} = \frac{2^1 e^{-2}}{1!} = \frac{2}{e^2}$$

$$\Pr\{ 2 \text{ سيعانى } \} = \frac{2^2 e^{-2}}{2!} = \frac{2}{e^2}$$

$$\Pr\{ \text{أكثر من شخصين سيعانون} \} = 1 - \Pr\{ \text{0 أو 1 أو 2 سيعانون} \}$$

$$= 1 - (1/e^2 + 2/e^2 + 2/e^2) = 1 - 5/e^2 = 0{\cdot}323.$$

لاحظ أنه طبقا لتوزيع ذى الحدين فإن الاحتمالات المطلوبة هى :

(أ) $_{2000}C_3 (0{\cdot}001)^3 (0{\cdot}999)^{1997}$

(ب) $1 - \{ _{2000}C_0 (0{\cdot}001)^0 (0{\cdot}999)^{2000} + {_{2000}C_1} (0{\cdot}001)^1 (0{\cdot}999)^{1999} + {_{2000}C_2} (0{\cdot}001)^2 (0{\cdot}999)^{1998} \}$

والتى من الصعب حساب قيمتها مباشرة .

٧–٢٩ إذا كان توزيع بواسون معطى كالآتى : $p(X) = \dfrac{(0.72)^X e^{-0.72}}{X!}$.

أوجد (أ) $p(0)$ (ب) $p(1)$ (جـ) $p(2)$ (د) $p(3)$

الحـــل :

(أ) $p(0) = \frac{(0{\cdot}72)^0 e^{-0{\cdot}72}}{0!} = \frac{(1)e^{-0{\cdot}72}}{1} = e^{-0{\cdot}72} = 0{\cdot}4868$ باستخدام الجدول بالملحق (VI) ، صفحة ٥٣٨

(ب) $p(1) = \frac{(0{\cdot}72)^1 e^{-0{\cdot}72}}{1!} = 0{\cdot}72 e^{-0{\cdot}72} = (0{\cdot}72)(0{\cdot}4868) = 0{\cdot}3505$

(جـ) $p(2) = \frac{(0{\cdot}72)^2 e^{-0{\cdot}72}}{2!} = \frac{(0{\cdot}5184) e^{-0{\cdot}72}}{2} = (0{\cdot}2592)(0{\cdot}4868) = 0{\cdot}1262$

طريقة أخرى : $p(2) = \frac{0{\cdot}72}{2} p(1) = (0{\cdot}36)(0{\cdot}3505) = 0{\cdot}1262$

(د) $p(3) = \frac{(0{\cdot}72)^3 e^{-0{\cdot}72}}{3!} = \frac{0{\cdot}72}{3} p(2) = (0{\cdot}24)(0{\cdot}1262) = 0{\cdot}0303$

٧-٣٢ استخدام ورق رسم بيانى احتمالى لتحديد ما إذا كان التوزيع التكرارى المذكور بالجدول ٢ - ١ صفحة ٤٥ ، من الممكن تقريبه بصورة جيدة من التوزيع الطبيعى .

الحـــل :

الجـــدول ٧ - ٥

التكرار المتجمع النسبى (٪)	الوزن (kg)
5·0	أقل من 62·5
23·0	أقل من 65·5
65·0	أقل من 68·5
92·0	أقل من 71·5
100·0	أقل من 74·5

التكرار المتجمع النسبى (٪)

الوزن (kg)

شكل ٧ - ١٠

٧-٣٣ وفق منحنى طبيعى لبيانات الجدول ٢ - ١ . صفحه

الحـــل :

جـــدول ٧ - ٦

التكرار المشاهد	التكرار المتوقع	المساحة لكل فئة		المساحة تحت المنحنى الطبيعى من 0 إلى z	z لحدود الفئات	حدود الفئات X	الوزن (kg)
				0·4967	2·72	59·5	
5	4·13 or 4	0·0413					60-62
				0·4554	−1·70	62·5	
18	20·68 or 21	0·2068					63-65
				0·2486	−0·67	65·5	
42	38·92 or 39	0·3892	Add →				66-68
				0·1406	0·36	68·5	
27	27·71 or 28	0·2771					69-71
				0·4177	1·39	71·5	
8	7·43 or 7	0·0743					72-74
				0·4920	2·41	74·5	

$\bar{X} = 67·45$ kg. ، 2·92 kg

يمكن تنظيم الحل كما فى الجدول ٧ - ٦ . عند حساب z لحدود الفئات ، تستخدم $z = (X - \bar{X})/s$ حيث الوسط $\bar{X}$ والانحراف المعيارى s حصلنا عليهما من المسألة ٣ - ٢٢ ، الفصل الثالث والمسألة ٤ - ١٧ الفصل الرابع على الترتيب .

فى العمود الرابع من اليسار ، المساحات تحت المنحنى الطبيعى من 0 إلى z حصلنا عليها باستخدام الجدول فى الملحق II ، صفحة ٥٣٣ . ومنها نحصل على المساحات تحت المنحنى الطبيعى بين القيم المتتالية لـ z كما فى العمود الخامس . وهذه نحصل عليها بطرح المساحات المتتالية فى العمود الرابع عندما تكون قيم z المقابلة لها نفس الإشارة ، وبالإضافة عندما تكون قيم z لها إشارة مختلفة (والتى حدثت مرة واحدة فى الجدول) . والسبب فى ذلك يبدو واضحاً من الشكل البيانى .

بضرب القيم فى العمود الخامس من اليسار (والذى يمثل التكرارات النسبية) بالتكرار الكلى (فى هذه الحالة 100) ينتج عنه التكرارات المتوقعة كما فى العمود السادس . حيث يشاهد أنها تتفق مع التكرارات الفعلية أو المشاهدة والموضحة بالعمود الأخير .

وإذا أردنا ، فإنه يمكن تعديل الانحراف المعيارى باستخدام معامل تصحيح شبرد (أنظر المسألة ٤ – ٢١ (أ) ، الفصل الرابع) .

« جودة التوفيق » لهذا التوزيع سوف تدرس فى المسألة ١٢ – ١٣ ، الفصل الثانى عشر .

٧-٣٤ الجدول ٧ – ٧ يبين عدد الأيام f فى فترة 50 يوماً والتى حدث خلالها X حادث سيارة فى مدينة معينة . وفق توزيع بواسون لهذه البيانات .

الحــل :

متوسط عدد الحوادث هو

$$\lambda = \frac{\Sigma fX}{\Sigma f} = \frac{(21)(0) + (18)(1) + (7)(2) + (3)(3) + (1)(4)}{50} = \frac{45}{50} = 0.90$$

وبهذا ، طبقاً لتوزيع بواسون

$$\Pr\{\text{حادث } X\} = \frac{(0.90)^X e^{-0.90}}{X!}$$

جدول ٧ – ٧

عدد الأيام f	عدد الحوادث X
21	0
18	1
7	2
3	3
1	4

المجموع 50

الجدول ٧ – ٨ يبين احتمالات 0, 1, 2, 3, 4 حادث كما حصلنا عليها من توزيع بواسون السابق ، مقروناً بالعدد المتوقع أو النظرى لعدد الأيام والتى وقع خلالها X حادثة (حصلنا عليه بضرب الاحتمالات المقابلة فى 50) .

ولتسهيل المقارنة كتب فى العمود الأخير العدد الفعلى للأيام

جـــــدول ٧ – ٨

العـدد الفعـلى للأيام	العـدد المتوقع للأيام	$Pr\{$حادثة $X\}$	عدد الحوادث X
0	0·4066	20·33 or 20	21
1	0·3659	18·30 or 18	18
2	0·1647	8·24 or 8	7
3	0·0494	2·47 or 2	3
4	0·0111	0·56 or 1	1

لاحظ أن توفيق توزيع بواسون للبيانات المعطاة يعد توفيقا جيداً .

لتوزيع بواسون الحقيقى ، التباين $\sigma^2 = \lambda$. وحساب التباين للتوزيع المعطى نجد أنه 0.97 . وهذا يقارن بشكل مقبول مع قيمة λ وهى 0.90 ، ويمكن اعتبار ذلك دليلا اخر لملاءمة توزيع بواسون كتقريب لبيانات العينة .

مسائل اضافية

توزيع ذى الحدين :

٧–٣٥ احسب قيمة (أ) !7 (ب) $10!/(6!4!)$ (جـ) ${}_9C_5$ (د) ${}_{11}C_8$ (هـ) ${}_6C_1$

ج : (أ) 5040 (ب) 210 (جـ) 126 (د) 165 (هـ) 9

٧–٣٦ أوجد مفكوك (أ) $(q+p)^7$ ، (ب) $(q+p)^{10}$

ج : (أ) $q^7 + 7q^6p + 21q^5p^2 + 35q^4p^3 + 35q^3p^4 + 21q^2p^5 + 7qp^6 + p^7$

(ب) $q^{10} + 10q^9p + 45q^8p^2 + 120q^7p^3 + 210q^6p^4 + 252q^5p^5 + 210q^4p^6 + 120q^3p^7 + 45q^2p^8 + 10qp^9 + p^{10}$

٧–٣٧ فى رمية عملة متوازنة 6 مرات أوجد احتمال ظهور (أ) 0 (ب) 1 (جـ) 2 (د) 3 (هـ) 4 (و) 5 صورة

ج : (أ) 1/64 (ب) 3/32 (جـ) 15/64 (د) 5/16 (هـ) 15/64 (و) 3/32

٧–٣٨ فى رمية واحدة لست عملات غير متحيزة أوجد احتمال ظهور (أ) 2 أو أكثر صورة (ب) أقل من 4 صور

ج : (أ) 57/64 (ب) 21/32

٧–٣٩ إذا كانت X تعبر عن عدد الصور فى رمية واحدة لأربع عملات متوازنة ،

أوجد (أ) $\Pr\{X = 3\}$ (ب) $\Pr\{X < 2\}$ (جـ) $\Pr\{X \leqq 2\}$ (د) $\Pr\{1 < X \leqq 3\}$

ج : (أ) ¼ (ب) 5/16 (جـ) 11/16 (د) 5/8

٧–٤٠ فى 800 عائلة بكل منها 5 أطفال ، ماهو عدد الأسر المتوقع أن يكون بها (أ) 3 أولاد (ب) 5 بنت (جـ) 2 أو 3 أولاد . مفترضاً أن احتمال وجود بنت أو ولد احتمال متساو .

ج : (أ) 250 (ب) 25 (جـ) 500

٧–٤١ أوجد احتمال الحصول على ما مجموعة 11 (أ) مرة واحدة ، (ب) مرتان ، فى رميتين لزهرتين متوازنتين .

ج : (أ) 17/162 (ب) 1/324

٧–٤٢ أوجد احتمال الحصول على 9 بالضبط مرة واحدة فى 3 رميات لزهرتين

ج : 64/243

٧–٤٣ أوجد احتمال تخمين الإجابة الصحيحة على 6 أسئلة على الأقل من 10 أسئلة فى امتحان « خطأ – صواب » .

ج : 193/512

٧-٤٤ مندوب تأمين باع بوالص تأمين إلى 5 أشخاص ، جميعهم فى نفس العمر وفى صحة جيدة . طبقاً لجداول التأمين فإن احتمال بقاء شخص على قيد الحياة له هذه المواصفات 30 عاماً تالياً هو 2/3 . أوجد احتمال أنه فى خلال 30 عاماً يبقى على قيد الحيـــاة .

(أ) كل الـ 5 رجال (ب) على الأقل 3 رجال (ج) رجلان فقط (د) على الأقل رجل واحد .

ج (أ) 32/243 (ب) 192/243 (ج) 40/243 (د) 242/243

٧-٤٥ أحسب (أ) الوسط (ب) الانحراف المعيارى

(ج) معامل الالتواء باستخدام العزوم (د) معامل التفرطح باستخدام العزوم . لتوزيع ذى الحدين حيث $p = 0.7$ و $N = 60$. فسر النتيجة التى تحصل عليها .

ج : (أ) 42 (ب) 3.550 (ج) 0.1127 — (د) 2.927

٧-٤٦ وضح أنه إذا كان توزيع ذى الحدين حيث $N = 100$ متماثل ، فإن معامل التفرطح باستخدام العزوم هو 2.98 .

٧-٤٧ أحسب (أ) $\Sigma(X - \mu)^3 p(X)$ ، (ب) $\Sigma(X - \mu)^4 p(X)$ لتوزيع ذى الحدين

ج (أ) $Npq(q-p)$ (ب) $Npq(1 - 6pq) + 3N^2p^2q^2$

٧-٤٨ برهن الصيغة المذكورة فى صفحة ١٩٦ لمعاملات الالتواء والتفرطح باستخدام العزوم .

التوزيع الطبيعى :

٧-٤٩ فى امتحان للاحصاء كان الوسط 78 والانحراف المعيارى 10

(أ) أوجد الدرجات المعيارية لطالبين درجاتهما 93 و 62

(ب) أوجد درجات طالبين درجاتهما المعيارية 0.6 — و 1.2

ج : (أ) 1.5 و 1.6 — (ب) 72 و 90

٧-٥٠ أوجد (أ) الوسط (ب) الانحراف المعيارى فى امتحان كانت الدرجات به 70 و 88 مقابلة للدرجات المعياريه 0.6 — و 1.4 على الترتيب .

ج (أ) 75.4 (ب) 9

٧-٥١ أوجد المساحة تحت المنحنى الطبيعى بين (أ) $z = -1.20$ و $z = 2.40$

(ب) $z = 1.23$ و $z = 1.87$ (ج) $z = -2.35$ و $z = -0.50$

ج : (أ) 0.8767 (ب) 0.0786, (ج) 0.2991

٧–٥٢ أوجد المساحة تحت المنحنى الطبيعى (أ) إلى يسار $z = -1.78$ (ب) إلى يسار $z = 0.56$
(ج) إلى يمين $z = -1.45$ (د) المقابلة ل $z \geqq 2.16$ (هـ) المقابلة ل $-0.80 \leqq z \leqq 1.53$
(و) إلى يسار $z = -2.52$ وإلى يمين $z = 1.83$.

ج : (أ) 0.0375 (ب) 0.7123 (ج) 0.9265 (د) 0.0154 (هـ) 0.7251 (و) 0.0395

٧–٥٣ إذا كانت z تتوزع توزيعاً طبيعياً متوسطة 0 وتباينه 1 ، أوجد (أ) $\Pr\{z \geqq -1.64\}$
(ب) $\Pr\{-1.96 \leqq z \leqq 1.96\}$ (ج) $\Pr\{|z| \geqq 1\}$

ج : (أ) 0.9495 (ب) 0.9500 (ج) 0.6826

٧–٥٤ أوجد احتمال z بحيث تكون (أ) المساحة إلى يمين z هى 0.2266 (ب) المساحة إلى يسار z هى 0.0314
(ج) المساحة بين -0.23 و z هى 0.5722 (د) المساحة بين 1.15 و z هى 0.0730
(هـ) المساحة بين $-z$ و z هى 0.9000

ج : (أ) 0.75 (ب) -1.86 (ج) 2.08 (د) 0.849 أو 1.625 (هـ) ± 1.645

٧–٥٥ أوجد z_1 إذا كان $\Pr\{z \geqq z_1\} = 0.84$ ، حيث يتوزع z توزيعاً طبيعياً متوسطة 0 وتباينه 1 .

ج : 0.995

٧–٥٦ أوجد إحداثيات المنحنى الطبيعى عند (أ) $z = 2.25$ (ب) $z = -0.32$ (ج) $z = -1.18$

ج : (أ) 0.0317 (ب) 0.3790 (ج) 0.1989

٧–٥٧ إذا كانت أوزان 300 طالباً تتوزع توزيعاً طبيعياً متوسطة 68.0 kg وانحرافه المعيارى هو 3.0 kg كم عدد الطلبة الذين تكون أوزانهم (أ) أكبر من 72 kg (ب) أقل من أو يساوى 64 kg
(ج) بين 65 و 71 kg (متضمنة 71) (د) مساوية 68 kg .
مفترضاً أن القياسات مسجلة إلى أقرب كيلوجرام .

ج : (أ) 20 (ب) 36 (ج) 227 (د) 40

٧–٥٨ إذا كانت أوزان رولمان بلى تتوزع توزيعاً طبيعياً بمتوسط 0.6140 newtons وانحراف معيارى 0.0025 newtons، حدد النسبة المئوية لرولمان البلى الذى يكون وزنه (أ) بين 0.610 و 0.618 newtons (متضمنة 0.618) ،
(ب) أكبر من 0.617 newtons (ج) أقل من 0.608 newtons (د) مساو 0.615 newtons

ج : (أ) 93% (ب) 8.1 (ج) 0.47% (د) 15%

٧–٥٩ إذا كان متوسط الدرجات فى امتحان نهائى هو 72 والانحراف المعيارى 9 . إذا كان ال 10% الأول من الطلبة يحصلون على تقدير A . ماهى أدنى درجة يمكن أن يحصل عليها الطالب بحيث يحصل أيضاً على A ؟

ج : 84

٧-٦٠ إذا كانت مجموعة من القياسات تتوزع توزيعا طبيعيا ، ما هى النسبة المئوية فيها والتى تختلف عن الوسط (ا) بأكثر من نصف الانحراف المعيارى (ب) أقل من ثلاثة أرباع الانحراف المعيارى .

ج : (ا) 61.7% (ب) 54.7%

٧-٦١ إذا كان $\overline{X}$ الوسط الحسابى و S الانحراف المعيارى لمجموعة من القياسات تتوزع توزيعا طبيعيا ، ما هى النسبة المئوية للقياسات التى تقع (ا) داخل المدى $(\overline{X} \pm 2s)$ ، (ب) خارج المدى $(\overline{X} \pm 1.2s)$ (جـ) أكبر من $(\overline{X} - 1.5s)$ ؟

ج : (ا) 95.4% (ب) 23.0% (جـ) 93.3%

٧-٦٢ فى المسألة السابقة أوجد قيمة الثابت a بحيث تكون النسبة المئوية فى الحالات (ا) داخل المدى $(\overline{X} \pm as)$ هى 75% (ب) أقل من $(\overline{X} - as)$ هى 22%

ج : (ا) 1.15 (ب) 0.77

التوزيع الطبيعى كتقريب لتوزيع ذى الحدين :

٧-٦٣ فى 200 رمية لعملة أوجد احتمال ما يلى (ا) بين 80 و 120 صورة بما فيها الرقمان 80 و 120 (ب) أقل من 90 صورة (جـ) أقل من 85 أو أكبر من 115 صورة . (د) 100 صورة بالضبط .

ج : (ا) 0.9962 (ب) 0.0687 (جـ) 0.0286 (د) 0.0558

٧-٦٤ أوجد احتمال أن يخمن طالب تخمينا صحيحا الاجابة على (ا) 12 أو أكثر من 20 (ب) 24 أو أكثر من 40 سؤالا فى امتحان « خطأ - صواب » .

ج (ا) 0.2511 (ب) 0.1342

٧-٦٥ آلة تنتج مسامير 10% منها تالف . أوجد احتمال أنه فى عينة عشوائية مكونة من 400 مسمار من انتاج هذه الآلة يكون هناك

(ا) على الأكثر 30 (ب) بين 30 و 50 (جـ) بين 35 و 45 (د) 55 أو أكثر مسمار تالف .

ج (ا) 0.0567 (ب) 0.9198 (جـ) 0.6404 (د) 0.0079

٧-٦٦ أوجد احتمال الحصول على أكثر من 25 « سبعة » فى 100 رمية لزهرتى طاولة متوازنتين .

ج : 0.0089

توزيع بواسون :

٧-٦٧ إذا كان 3% من اللمبات الكهربائية المنتجة فى شركة معينة هى لمبات تالفة ، أوجد احتمال أن يظهر فى عينة من 100 لمبة (ا) 0 (ب) 1 ، (جـ) 3 (د) 4 (هـ) 5 لمبة تالفة .

ج : (ا) 0.04979 (ب) 0.1494 (جـ) 0.2241 (د) 0.1680 (هـ) 0.1008

٧-٦٨ فى المسألة السابقة ، أوجد احتمال وجود (ا) أكثر من 5 (ب) بين 1 و 3 (جـ) أقل من أو يساوى 2 لمبة تالفة .

ج : (ا) 0.0838 (ب) 0.5976 (جـ) 0.4232

٧-٦٩ صندوق يحتوى على بلية حمراء وسبع بليات بيضاء . سحبت بلية من الصندوق وسجل لونها . وأعيدت مرة أخرى إلى الصندوق وخلطت البليات خلطا جيدا . باستخدام (ا) توزيع ذى الحدين (ب) توزيع بواسون كتقريب لتوزيع ذى الحدين ، أوجد احتمال فى 8 من هذه السحبات يتم سحب كرة حمراء مرات بالضبط .

ج : (ا) 0.056 (ب) 0.061 31

٧-٧٠ طبقا لإحصاءات المكتب القومى للاحصاءات الحيوية ، ادارة الصحة والتعليم والخدمات الاجتماعية الأمريكية ، فإن متوسط حوادث الغرق العارضة فى السنة بالولايات المتحدة هى 3.0 لكل 100 000 من السكان . فى مدينة تعداد سكانها 200 000 أوجد احتمال أن يكون بها .

(ا) 0 (ب) 2 (جـ) 6 (د) 8 (هـ) بين 4 و 8 (و) أقل من 3 حالات غرق عارضة فى السنة .

ج : (ا) 0.00248 (ب) 0.04462 (جـ) 0.1607 (د) 0.1033 (هـ) 0.6964 (و) 0.0620

٧-٧١ بين الساعة 2 p.m. والساعة 4 p.m. ، كان متوسط عدد طلبات المكالمات التليفونية فى الدقيقة فى لوحة تليفونات شركة معينة هو 2.5 . أوجد احتمال أنه خلال دقيقة معينة سيكون هناك (ا) 0 (ب) 1 (جـ) 2 (د) 3 (هـ) 4 أو أقل (و) أكثر من 6 طلبات مكالمة .

ج : (ا) 0.08208 (ب) 0.2052 (جـ) 0.2565 (د) 0.2138 (هـ) 0.8911 (و) 0.0142

توزيع كثيرات الحدود :

٧-٧٢ زهـرة متوازنة قذفت 6 مرات . أوجد احتمال ظهور (ا) 1 «واحد» ، 2 «اثنان» ، 3 «ثلاثة» .
(ب) كل جانب يظهر مرة واحدة فقط .

ج : (ا) 5/3888 (ب) 5/324

٧-٧٣ صندوق يحتوى على عدد كبير من البلى ألوانه أحمر وأبيض وأزرق وأصفر بنسبة (أصفر) 1 : (أزرق) 2 : (أبيض) 3 : (أحمر) 4 . فى 10 سحبات أوجد احتمال أن تكون مكونة من (ا) 4 أحمر ، 3 أبيض ، 2 أزرق ، 1 أصفر (ب) 8 أحمر و 2 أصفـر .

ج : (ا) 0.000348 (ب) 0.000295

٧-٧٤ أوجد احتمال عدم الحصول على 1 أو 2 أو 3 فى أربع رميات لزهرة متوازنة .

ج : 3/8

توفيق البيانات باستخدام توزيعات نظرية :

٧-٧٥ وفق توزيع ذى الحدين للبيانات التالية .

X	0	1	2	3	4
f	30	62	46	10	2

ج : $p(X) = {}_4C_X(0{\cdot}32)^X(0{\cdot}68)^{4-X}$

التكرارات المتوقعة هى 2 ,13 ,43 ,60 ,32 على الترتيب .

٧-٧٦ باستخدام ورق الرسم البيانى الاحتمالى حدد ما إذا كانت بيانات المسألة ٣-٥٩ بالفصل الثالث يمكن تقريبها بدقة بالتوزيع الطبيعى .

٧-٧٧ وفق توزيع طبيعى لبيانات المسألة ٣-٥٩ بالفصل الثالث .

ج : التكرارات المتوقعة 1·7, 5·5, 12·0, 15·9, 13·7, 7·6, 2·7 and 0·6 على الترتيب .

٧-٧٨ وفق توزيع طبيعى لبيانات المسألة ٣-٦١ ، الفصل الثالث .

ج : التكرارات المتوقعة 1·1, 4·0, 11·1, 23·9, 39·5, 50·2, 49·0, 36·6, 21·1, 9·4, 3·1 and 1·0 على الترتيب .

٧-٧٩ وفق توزيع بواسون لبيانات المسألة ٧-٧٥ وقارن ذلك بالتوفيق الذى حصلت عليه باستخدام توزيع ذى الحدين .

ج : التكرارات المتوقعة 41·7, 53·4, 34·2, 14·6 and 4·7 على الترتيب .

٧-٨٠ فى 10 وحدات من وحدات الفرسان بالجيش البروسى كان عدد الوفيات الناتجة من رفسة حصان فى كل وحدة على مدى 20 سنة من 1875 — 1894 كما هو مبين بالجدول .

وفق توزيع بواسون لهذه البيانات .

X	0	1	2	3	4
f	109	65	22	3	1

ج : $p(X) = \dfrac{(0{\cdot}61)^X e^{-0{\cdot}61}}{X!}$، التكرارات المتوقعة هى 108.7, 66.3, 20.2, 4.1, 0.7 على الترتيب .

الفصل الثامن

مبادىء نظرية العينات

نظرية العينات :

نظرية العينات هى دراسة للعلاقة الموجودة بين مجتمع والعينات المسحوبة من هذا المجتمع . وهذه لها أهمية كبيرة من كثير فى الأمور . على سبيل المثال فإنها مفيدة فى تقدير الكيات غير المعلومة للمجتمع (مثل متوسط المجتمع ، تباينه ، . . وغير ذلك) والتى تسمى بمعالم المجتمع أو باختصار ، المعالم ، وذلك من معرفة الكيات المقابلة لها فى العينة (مثل متوسط العينة ، تباينها ، . . وغير ذلك) ، والتى تسمى بالإحصائيات المستخرجة من العينة أو باختصار إحصائيات . وسوف تدرس مشاكل التقدير فى الفصل التاسع .

وتفيد نظرية العينات فى تحديد ما إذا كانت الاختلافات المشاهدة بين عينتين ترجع إلى تقلبات الصدفة أو إلى اختلافات معنوية فعلا . هذه الأسئلة ، على سبيل المثال، تظهر عند اختبار مصل جديد لعلاج مريض معين أو عند تقرير ما إذا كانت عملية صناعية معينة أحسن من عملية أخرى . إجابات هذه الأسئلة متضمنة فى استخدام ما يسمى بالاختبارات المعنوية والفروض والتى لها أهميتها فى نظرية اتخاذ القرارات . وهذه سوف تدرس فى الفصل العاشر .

وبشكل عام ، فإن دراسة الاستدلال الخاص بالمجتمع باستخدام عينات مسحوبة منه ، مع المؤشرات الخاصة بدرجة دقة الاستدلال باستخدام نظرية الاحتمال ، يسمى بالاستدلال الإحصائى .

المعاينة العشوائية ـ الأرقام العشوائية :

لضمان أن تكون الاستنتاجات المعتمدة على نظرية العينات والاستدلال الإحصائى سليمة ، فإن العينات يجب أن تختار بحيث تكون ممثلة للمجتمع . وتسمى دراسة طرق المعاينة والمشاكل المتصلة بها بتصميم التجارب .

أحد طرق الحصول على عينة ممثلة هو استخدام أسلوب يسمى بالمعاينة العشوائية . والتى طبقاً لها تكون لكل مفردة المجتمع نفس الفرصة فى أن تكون ضمن العينة . أحـد الأساليب فى الحصول على عينة عشوائية هو إعطاء رقم لكل مفردة فى المجتمع ، وتكتب هذه الأرقام على قطع صغيرة من الورق ، وتوضع فى وعاء وتسحب الأرقام من هذا الوعاء ، على أن يراعى أن تخلط هذه الأرقام خلطاً جيداً قبل كل عملية سحب . ويمكن إحلال هذه الطريقة بطريقة أخرى باستخدام جداول الأرقام العشوائية (أنظر صفحة ٥٣٩) والتى صممت خصيصاً لهذا الغرض . أنظر المسألة ٨-٦ .

المعاينة بارجاع وبدون ارجاع :

فى سحب رقم من الوعاء ، فإنه يكون لنا الخيار فى إرجاع هذا الرقم أو عدم إرجاعه قبل إجراء السحبة التالية . فى حالة الأولى فإن الرقم يمكن أن يظهر مرات أخرى ، بينما فى الطريقـة الثانية يمكن أن يظهر الرقم مرة واحـدة فقط . فى العينات التى يمكن أن

نختار فيها مفردات المجتمع أكثر من مرة تسمى بالمعاينة بإرجاع ، بينما إذا كانت المفردة فى المجتمع لا يمكن اختيارها أكثر من مرة فتسمى المعاينة بدون إرجاع .

المجتمعات إما تكون محدودة أو غير محدودة . فعلى سبيل المثال ، لو سحبنا كرات سحباً متتالياً بدون أرجاع من وعاء يحتوى على 100 كرة فإننا نماين ، أو نسحب عينة من مجتمع محدود ، بينما لو قذفنا عملة 50 مرة وحسبنا عدد الصور ، فإننا نماين من مجتمعاً غير محدود .

فى المجتمع المحدود حيث تسحب العينة مع الإرجاع يمكن اعتباره من الناحية النظرية ، مجتمعاً غير محدود حيث أن أى عدد من العينات يمكن سحبه بدون أن يستفيد المجتمع . لأغلب الأغراض العمليه ، يمكن اعتبار المعاينة من مجتمع محدود ولكنه كبير مثل المعاينة من مجتمع غير محدود .

توزيعات المعاينة :

أعتبر كل العينات الممكنة ذات الحجم N والتى يمكن سحبها من مجتمع معين (أما بإرجاع أو بدون إرجاع) . من كل عينة يمكننا حساب إحصائية ، مثل الوسط الحسابى . الانحراف المعيارى ، وغيرها . والذى سيختلف من عينة إلى أخرى . وبهذه الطريقة نحصل على توزيع الإحصائية الذى يسمى توزيع المعاينة لهذه الإحصائية .

على سبيل المثال لو كانت الإحصائية المستخدمة هى الوسط الحسابى للعينة ، فإن توزيعها يسمى توزيع العينة للأوساط أو توزيع المعاينة للوسط الحسابى . وبنفس الصورة ، يمكن أن نحصل على توزيعات المعاينة للانحراف المعيارى ، التباين ، الوسيط ، النسب ، وغيرها .

ولكل توزيع معاينة ، يمكن أن نحسب له الوسط الحسابى ، الانحراف المعيارى ، وغير ذلك . وبهذا يمكن أن نتحدث عن الوسط الحسابى والانحراف المعيارى لتوزيع المعاينة للأوساط الحسابية ، وغيرها .

توزيع المعاينة للأوساط :

إذا افترضنا أن كل العينات الممكنة ذات الحجم N سحبت بدون إرجاع من مجتمع محدود حجمه $N_p>N$. وإذا رمزنا لوسط الحسابى لتوزيع المعاينة بالرمز $\mu_{\bar{x}}$ ولانحرافه المعيارى بالرمز $\sigma_{\bar{x}}$ وللوسط الحسابى للمجتمع بالرمز μ ولانحرافه المعيارى بالرمز σ ، فإن

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{N_p - N}{N_p - 1}} \quad \text{و} \quad \mu_{\bar{x}} = \mu \qquad (١)$$

إذا كان المجتمع غير محدود أو كان السحب بإرجاع ، فإن النتيجة السابقة تختصر . إلى

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \quad \text{و} \quad \mu_{\bar{x}} = \mu \qquad (٢)$$

ولقيم N الكبيرة ($N \geqq 30$) فإن توزيع المعاينة للأوساط يتوزع تقريباً كالتوزيع الطبيعى بمتوسط $\mu_{\bar{x}}$ وانحراف معيارى $\sigma_{\bar{x}}$ وذلك بصرف النظر عن المجتمع (مادام متوسط تباين المجتمع محدودين وكان حجم المجتمع ضعف حجم العينة على الأقل) .

هذه النتيجة للمجتمعات غير المحدودة هي حالة خاصة من نظرية النهاية المركزية المعروفة فى النظرية المتقدمة للاحتمال والتى تثبت أن دقة التقريب تزداد كلما زادت N . وهذه يشار إليها أحيـانـاً بأن توزيع المعاينة يؤل إلى التوزيع الطبيعى .

فى الحالة التى يتوزع فيها المجتمع توزيعا طبيعيا ، فإن توزيع المعاينة للاوساط يتوزع أيضا توزيعا طبيعيا حتى ولو كانت N صغيرة (بمعنى $N < 30$) .

توزيع المعاينة لنسب :

افترض مجتمعاً غير محدود وأن احتمال وقوع حدث (تسمى نجاحه) هو p بينما احتمال وعدم وقوعه هو $q = 1 - p$. على سبيل المثال يمكن أن يكون المجتمع هو كل الرميات الممكنة لعملة متوازنة حيث احتمال الحدث « صورة هو $p = \frac{1}{2}$.

إعتبر جميع العينات الممكنة ذات الحجم N والمسحوبة من هذا المجتمع ، ولكل عينة حدد نسبة النجاح P . فى حالة العملة . P هى نسبة ظهور الصورة فى N رمية . ثم نحصل توزيع المعاينة للنسب حيث متوسطة μ_P وانحرافه المعيارى σ_P معطيان بالمعادلتين .

$$\mu_P = p \quad \text{و} \quad \sigma_P = \sqrt{\frac{pq}{N}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{N}} \qquad (٣)$$

والتى يمكن الحصول عليها من (٢) بكتابة $\mu = p$ و $\sigma = \sqrt{pq}$.

لقيم N الكبيرة ($N \geqq 30$) يقترب توزيع المعاينة بشكل كبير من التوزيع الطبيعى . لاحظ أن المجتمع يتوزع توزيع ذى الحدين :

المعادلة (٣) صالحة أيضاً للمجتمعات المحدودة حيث المعاينة بإرجاع .

وبالنسبة للمجتمعات المحدودة حيث المعاينة بدون ارجاع فإن المعادلات (٣) تستبدل بالمعادلات (١) حيث $\mu = p$ و $\sigma = \sqrt{pq}$

لاحظ أن المعادلات (٣) يمكن الحصول عليها بصورة أسهل بقسمة الوسط الحسابى والانحراف المعيارى (Np و $\sqrt{Npq}$ لتوزيع ذى الحدين على N (أنظر الفصل السابع) .

توزيع المعاينة للفروق والمجموع :

افترض أننا قد أعطينا مجتمعين . لكل عينة حجمها N_1 مسحوبة من المجتمع الأول احسب الإحصائية S_1 . وهذا ينتج توزيع المعاينة للإحصائية S_1 التى وسطها الحسابى μ_{S_1} وانحرافها المعيارى σ_{S_1} . كذلك ، لكل عينة حجمها N_2 مسحوبة من المجتمع الثانى نحسب لها الإحصائية S_2 . وهذا ينتج توزيع المعاينة الإحصائى S_2 التى وسطها الحسابى μ_{S_2} وانحرافها المعيارى σ_{S_2} . ومن جميع التوافيق الممكنة لهـذه العينات يمكن الحصول على توزيع الفرق ، $S_1 - S_2$ ، والذى يسمى توزيع المعاينة للفرق بين الإحصائيتين . ويرمز للوسط الحسابى لتوزيع المعاينة هذا بالرمز $\mu_{S_1-S_2}$ ، وانحرافه المعيارى بالرمز $\sigma_{S_1-S_2}$ ، ويعرفان بالمعادلتين :

$$\mu_{S_1-S_2} = \mu_{S_1} - \mu_{S_2} \quad \text{و} \quad \sigma_{S_1-S_2} = \sqrt{\sigma_{S_1}^2 + \sigma_{S_2}^2} \qquad (٤)$$

وهذا تحت شرط أن العينات المختارة لاتعتمد بأى طريقة على بعضها ، بمعنى ، أن العينات مستقلة .

إذا كانت S_1 و S_2 هى الأوساط الحسابية للعينات من المجتمعين ، والتى سوف نرمز لهما بالرموز $\bar{X}_1$ و $\bar{X}_2$ ، فإن توزيع المعاينة للفرق بين الأوساط للمجتمعات غير المحدودة والتى وسطها وانحرافها المعيارى هى على الترتيب μ_1, σ_1 و μ_2, σ_2 له وسط حسابى وانحراف معيارى معرف كالآتى :

$$\mu_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \mu_{\bar{x}_1} - \mu_{\bar{x}_2} = \mu_1 - \mu_2 \quad , \quad \sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\sigma^2_{\bar{x}_1} + \sigma^2_{\bar{x}_2}} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{N_1} + \frac{\sigma_2^2}{N_2}} \qquad (٥)$$

باستخدام المعادلة (٢) . وهذه النتيجة صالحة للمجتمعات المحدودة إذا كان السحب بارجاع . ويمكن الحصول على نتائج مشابهة للمجتمعات المحدودة عندما تكون المعاينة بدون ارجاع باستخدام المعادلات (١) .

ويمكن الحصول على نتائج مقابلة لتوزيع المعاينة للفروق بين النسب من مجتمعين يتوزعان توزيع ذى الحدين بمعالم p_1 ، q_1 و p_2 ، q_2 على الترتيب .

فى هذه الحالة S_1 و S_2 تقابل نسب النجاح ، P_1 و P_2 والمعادلات (٤) تعطى النتائج .

$$\mu_{P_1 - P_2} = \mu_{P_1} - \mu_{P_2} = p_1 - p_2 \quad , \quad \sigma_{P_1 - P_2} = \sqrt{\sigma^2_{P_1} + \sigma^2_{P_2}} = \sqrt{\frac{p_1 q_1}{N_1} + \frac{p_2 q_2}{N_2}} \qquad (٦)$$

إذا كانت كل من N_1 و N_2 كبيرة ($N_1, N_2 \geqq 30$) فإن توزيع المعاينة للفرق بين الأوساط أو النسب يكون قريباً جداً من التوزيع الطبيعى .

وقد يكون من المفيد أحياناً الحديث عن توزيع المعاينة لمجموع إحصائيتين .

ويعطى المتوسط الحسابى والانحراف المعيارى لهذا التوزيع بالمعادلتين .

$$\mu_{S_1 + S_2} = \mu_{S_1} + \mu_{S_2} \quad و \quad \sigma_{S_1 + S_2} = \sqrt{\sigma^2_{S_1} + \sigma^2_{S_2}} \qquad (٧)$$

مفترضتين أن البيانات مستقلة .

الخطأ المعيارى :

الانحراف المعيارى لتوزيع المعاينة لإحصائية يسمى غالباً بالخطأ المعيارى . .

فى الجدول ٨ - ١ أدرجنا الأخطاء المعيارية لتوزيعات المعاينة لإحصائيات مختلفة تحت شرط المعاينة العشوائية من مجتمع غير محدود (أو كبير جداً) أو المعاينة بدون ارجاع من مجتمع محدود . كذلك أدرجنا ملاحظات خاصة بالشروط التى يجب توافرها حتى تكون النتائج صحيحة وتعليقات أخرى لها صلة بالموضوع .

الكميات $\mu, \sigma, p, \mu_r, \bar{X}, P, m_r$ تعبر على الترتيب (مقروءة من الشمال إلى اليمين) عن الوسط الحسابى، الانحراف المعيارى ، النسبة ، العزم الرائى حول الوسط الحسابى وذلك للمجتمع ثم الوسط الحسابى والانحراف المعيارى ، النسبة ، العزم الرائى حول الوسط الحسابى للعينة .

ومن الملاحظ أنه إذا كان حجم العينة N كبير بدرجة كافية ، فإن توزيعات المعاينة ستكون التوزيع الطبيعى أو قريبـاً من التوزيع الطبيعى .

ولهذا السبب تعرف الطريقة بطريقة العينات ذات الحجم الكبير . ولكن عندما تكون $N < 30$ فإن العينات تسمى بالعينات الصغيرة . وسوف تدرس نظرية العينات الصغيرة أو النظرية الدقيقة للعينات ، كما تسمى أحياناً .

وعندما تكون معالم المجتمع مثل σ, p, μ_r غير معلومة فإنه يمكن تقديرها بدقة بالمقادير المحسوبة من العينة ، بالتحديد $s = \sqrt{N/(g-1)s)}$, P and m_r إذا كان حجم العينة كبيراً بصورة كافية .

جدول ٨ – ١

الخطأ المعيارى لبعض توزيعات المعاينة

توزيع المعاينة	الخطأ المعيارى	ملاحظة خاصة
الأوساط	$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$	هذه صحيحة للعينات الصغيرة والكبيرة . توزيع المعاينة للأوساط يقترب من التوزيع الطبيعى عندما تكون $N \geqq 30$ حتّى ولو كان المجتمع غير طبيعى . $\mu_{\bar{x}} = \mu$ وهومتوسط المجتمع فى جميع الحالات .
النسب	$\sigma_P = \sqrt{\frac{p(1-p)}{N}} = \sqrt{\frac{pq}{N}}$	الملاحظات الّتى ذكرت فى الأوساط تنطبق هنا كذلك . $\mu P = p$ فى جميع الحالات .
الانحرافات المعيارية :	$\sigma_s = \frac{\sigma}{\sqrt{2N}}$ (١) $\sigma_s = \sqrt{\frac{\mu_4 - \mu_2^2}{4N\mu_2}}$ (٢)	لقيم $N \geqq 100$ ، فأن توزيع المعاينة لـ s يكون قريباً جداً من التوزيع الطبيعى σs المعطاة فى (١) سليمة إذا كان المجتمع طبيعى (أوقريب من التوزيع الطبيعى) . وإذا كان التوزيع غير طبيعى فإن (2) يمكن استخدامها . لاحظ أن (٢) تختصر لتصير (١) عندما تكون $\mu_2 = \sigma^2$ و $\mu_4 = 3\sigma^4$ ، وهذا صحيح عندمايكون المجتمع طبيعياً . عندماتكون $N \geqq 100$ ، فإن $\mu_s = \sigma$ بشكل قريب جداً .
الوسيط	$\sigma_{med.} = \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2N}} = \frac{1{\cdot}2533\sigma}{\sqrt{N}}$	لقيم $N \geqq 30$ ، فإن توزيع المعاينة للوسيط يكون قريباً جداً من التوزيع الطبيعى . النتيجة المعطاة صحيحة فقط إذا كان المجتمع طبيعياً (أو طبيعى بصورة تقريبية) . $\mu_{med.} = \mu$.

توزيع المعاينة	الخطأ المعيارى	ملاحظة خاصة
الربيع الأول والربيع الثالث	$\sigma_{Q_1} = \sigma_{Q_3} = \frac{1\cdot3626\sigma}{\sqrt{N}}$	الملاحظات التى أبديت على الوسيط تنطبق هنا كذلك . μ_{Q_1} و μ_{Q_3} تقترب من الربيع الأول والثالث للمجتمع . لاحظ أن $\sigma_{Q_2} = \sigma_{med.}$
العشيرات	$\sigma_{D_1} = \sigma_{D_9} = \frac{1\cdot7094\sigma}{\sqrt{N}}$ $\sigma_{D_2} = \sigma_{D_8} = \frac{1\cdot4288\sigma}{\sqrt{N}}$ $\sigma_{D_3} = \sigma_{D_7} = \frac{1\cdot3180\sigma}{\sqrt{N}}$ $\sigma_{D_4} = \sigma_{D_6} = \frac{1\cdot2680\sigma}{\sqrt{N}}$	الملاحظات التى أبديت على الوسيط تنطبق هنا كذلك μD_1 و $\mu D_2, \ldots$ تقترب بدرجة كبيرة من العشير الأول ، والثانى ... للمجتمع . لاحظ أن $\sigma_{D_5} = \sigma_{med.}$
نصف المدى الطبيعى	$\sigma_Q = \frac{0\cdot7867\sigma}{\sqrt{N}}$	الملاحظات التى أبديت على الوسيط تنطبق هنا كذلك . μQ تقترب بدرجة كبيرة من نصف المدى الربيعى للمجتمع .
التباين ;	$\sigma_{s^2} = \sigma^2 \sqrt{\frac{2}{N}}$ (١) $\sigma_{s^2} = \sqrt{\frac{\mu_4 - \mu_2^2}{N}}$ (٢)	الملاحظات التى أبديت على الانحراف المعيارى تنطبق كذلك . لاحظ أن (٢) ينتج عنها (١) إذا كان المجتمع طبيعياً . $\mu_{s^2} = \sigma^2(N-1)/N$ والذى يقترب بدرجة كبيرة من σ^2 لقيم N الكبيرة .
معاملات الاختلاف	$\sigma_V = \frac{v}{\sqrt{2N}} \sqrt{1+2v^2}$	هنا $v = \sigma/\mu$ هو معامل اختلاف المجتمع . النتيجة المعطاة تكون صحيحة إذا كان التوزيع طبيعى أو قريب من الطبيعى وكانت $N \geqq 100$.

مسائل محلولة

توزيع العينات للأوساط :

٨ - ١ يتكون مجتمع من خمسة أرقام 2, 3, 6, 8, 11 . اعتبر كل العينات الممكنة التى يكون حجمها اثنين والتى يمكن سحبها مع الإرجاع من هذا المجتمع . أوجد (أ) متوسط المجتمع . (ب) الانحراف المعيارى للمجتمع ، (جـ) متوسط توزيع المعاينة للأوساط ، (د) الانحراف المعيارى لتوزيع المعاينة للأوساط ، أى ، الخطأ المعيارى للأوساط .

الحـــل :

(أ) $\mu = \frac{2+3+6+8+11}{5} = \frac{30}{5} = 6.0$

(ب) $\sigma^2 = \frac{(2-6)^2+(3-6)^2+(6-6)^2+(8-6)^2+(11-6)^2}{5} = \frac{16+9+0+4+25}{5} = 10.8$, and $\sigma = 3.29$.

(جـ) هناك (5)5 عينة ذات الحجم اثنين يمكن سحبها مع الإرجاع (بما أن كلا من الأرقام الخمسة التى يمكن سحبها فى المرة الأولى يمكن أن يقترن بأى من الخمسة الأرقام الخمسة فى السحبة الثانية) . وهذه هى

(2, 2)	(2, 3)	(2, 6)	(2, 8)	(2, 11)
(3, 2)	(3, 3)	(3, 6)	(3, 8)	(3, 11)
(6, 2)	(6, 3)	(6, 6)	(6, 8)	(6, 11)
(8, 2)	(8, 3)	(8, 6)	(8, 8)	(8, 11)
(11, 2)	(11, 3)	(11, 6)	(11, 8)	(11, 11)

والأوساط المقابلة لهـــا هى :

2·0	2·5	4·0	5·0	6·5
2·5	3·0	4·5	5·5	7·0
4·0	4·5	6·0	7·0	8·5
5·0	5·5	7·0	8·0	9·5
6·5	7·0	8·5	9·5	11·0

(١)

والوسط الحسابى لتوزيع المعاينة للأوساط هو

$$\mu_{\bar{X}} = \frac{\text{متوسط أوساط العينة فى (1) أعــلاه}}{25} = \frac{150}{25} = 6.0$$

وهذا يوضح حقيقية أن $\mu_{\bar{X}} = \mu$

(د) التباين $\sigma_{\bar{X}}^2$ لتوزيع المعاينة للأوساط نحصل عليه بطرح الوسط من كل رقم فى (١) ، وتربيع الناتج ، وبجمع الـ 25 رقم الذى حصلنا عليه والقسمة على 25 تكون النتيجة النهائية .

$\sigma_{\bar{X}}^2 = 135/25 = 5.40$ بحيث $\sigma_{\bar{X}} = \sqrt{5.40} = 2.32$

وهــذا يوضح حقيقة أنه فى المجتمعات المحدودة والمتضمنة المعاينة بإرجـــاع (أو فى المجتمعات غير المحدودة) ، $\sigma_{\bar{X}}^2 = \sigma^2/N$ وحيث أن الجانب الأيمن هو $10.8/2 = 5.40$ ، نتيجة مطابقة القيمة أعلاه .

٨ – ٢ حل المسألة ٨ – ١ فى حالة المعاينة بدون إرجاع .

الحـــل :

كما فى (أ) و (ب) فى المسألة ٨ – ١ ، $\sigma = 3.29$ و $\mu = 6$.

(جـ) هناك $_5C_2 = 10$ عينة حجم كل منها أثنان يمكن سحبها بدون إرجاع (هــذا يعنى أننــا نسحب رقماً ثم بعد ذلك نسحب رقماً آخر يختلف عن الرقم الأول) من هذا المجتمع ، على وجه التحديد .

(2, 3), (2, 6), (2, 8), (2, 11), (3, 6), (3, 8), (3, 11), (6, 8), (6, 11), (8, 11)

اختيار (2, 3) ، على سبيل المثال ، يعتبر مثل اختيار (3, 2) .

الأوساط المقابلة لهـذه العينات هي :

2·5, 4·0, 5·0, 6·5, 4·5, 5·5, 7·0, 7·0, 8·5, 9·5

ووسط توزيع المعاينة للأوساط هو

$$\mu_{\bar{X}} = \frac{2.5 + 4.0 + 5.0 + 6.5 + 4.5 + 5.5 + 7.0 + 7.0 + 8.5 + 9.5}{10} = 6.0$$

يوضح الحقيقة أن $\mu_{\bar{X}} = \mu$

(جـ) تباين توزيع المعاينة للأوساط هو

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{(2.5 - 6.0)^2 + (4.0 - 6.0)^2 + (5.0 - 6.0)^2 + \ldots + (9.5 - 6.0)^2}{10} = 4.05, \text{ and } \sigma_{\bar{X}} = 2.01$$

وهذا يوضح أن $\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{N}\left(\frac{N_p - N}{N_p - 1}\right)$ ، حيث أن الجانب الأيمن يساوى $\frac{10.8}{2}\left(\frac{5-2}{5-1}\right) = 4.05$
كما حصلنا عليه أعلاه .

٨ - ٣ افترض أن أوزان 3000 طالب فى جامعة يتوزع توزيعاً طبيعياً بمتوسط 68.0 kg وانحراف معيارى 3.0 kg .
إذا سحبت 80 عينة كل منها مكونة من 25 طالباً ، ماهو الوسط المتوقع والانحراف المعيارى لتوزيع المعاينة للوسط
إذا كانت المعاينة (أ) بإرجاع (ب) بدون إرجاع ؟

الحـل :

عدد العينات ذات الحجم 25 والتى يمكن الحصول عليها نظرياً من مجموعة من 3000 طالب مع الإرجاع هو $(3000)^{25}$
وبدون إرجاع $_{3000}C_{25}$ ، وهو عـدد أكبر من 80 . وبهذا فإننا لنحصل على توزيع المعـاينة حقيقى للأوساط
ولكن نحصل على توزيع معاينة تجريبى . ورغماً عن ذلك ، فبما أن عدد العينات كبير ، فإننا نتوقع أن يكون هناك
اتفاق بين توزيعى المعاينة . وبهذا فإن المتوسط المتوقع والانحراف المعيارى سيكونان قريبين من نظائرهما فى التوزيع
النظرى . وبهذا نحصل على

(أ) $\mu_{\bar{X}} = \mu = 68.0 \text{ kg} \quad \text{and} \quad \sigma_{\bar{X}} = \sigma/\sqrt{N} = 3/\sqrt{25} = 0.6 \text{ kg}$

(ب) $\mu_{\bar{X}} = \mu = 68.0 \text{ kg} \quad \text{and} \quad \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\sqrt{\frac{N_p - N}{N_p - 1}} = \frac{3}{\sqrt{25}}\sqrt{\frac{3000 - 25}{3000 - 1}}$

والذى يختلف قليلا من 0.6 kg ويمكن بذلك اعتباره لجميع الأغراض العملية مثل نظير فى حالة المعاينة بإرجاع .

هذا ويمكن أن نتوقع أن توزيع المعاينة التجريبى للأوساط يتوزع بشكل تقريبى كالتوزيع الطبيعى الذى وسطه
الحسابى 68.0 kg وانحرافه المعيارى 0·6 kg .

٨ - ٤ فى كم من عينات المسألة ٨ - ٣ نتوقع أن نجد الوسط الحسابى
(أ) بين 66.8 kg و 68.3 kg (ب) أقل من 66.4 kg ؟

الحـل :

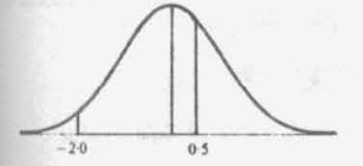
الوسط $\bar{x}$ لعينة معبراً عنه بوحدات معيارية فى هذه الحالة يعطى بـ $z = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{\bar{X} - 68.0}{0.6}$

(أ) 66.8 معبراً عنها بوحدات معيارية =

$$(66.8 - 68.0)/0.6 = -2.0$$

68.3 معبراً عنها بوحدات معيارية =

$$(68.3 - 68.0)/0.6 = 0.5$$



نسبة العينات التي أوساطها بين 66. kg و 68.3 kg

= (المساحة تحت المنحنى الطبيعي بين $z = -2.0$ و $z = 0.5$)

= (المساحة بين $z = -2$ و $z = 0$) +

(المساحة بين $z = 0$ و $z = 0.5$) +

$= 0.4772 + 0.1915 = 0.6687$

وبهذا يكون العدد المتوقع للعينات $= 53 = (80)(0.6687)$

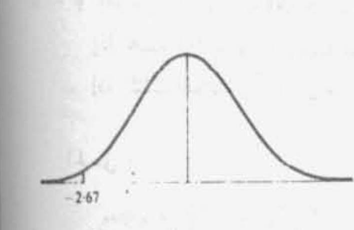
(ب) 66.4 معبراً عنها بوحدات معيارية =

$$66.4 - 68.0)/0.6 = -2.67$$

نسبة العينات أوساطها أقل من 66.4 kg

= (المساحة تحت المنحنى الطبيعي إلى يسار $z = -2.67$)

= (المساحة إلى يسار $z = 0$) - (المساحة بين $z = -2.67$ و $z = 0$).



$$0.5 - 0.4962 = 0.0038$$

وبهذا يكون العدد المتوقع للعينات $= 0$ أو $0.304 = (80)(0.0038)$

٨ - ٥ خمسمائة كرة حديدية متوسطها $5.02\ N$ وانحرافها المعيارى $0.30\ N$ ، فى عينة عشوائية من 100 كرة حديدية اختيرت من هذه المجموعة أوجد احتمال أن تكون أوزانها مجتمعة (أ) بين $496\ N$ و $500\ N$ (ب) أكثر من $510\ N$.

الحـل :

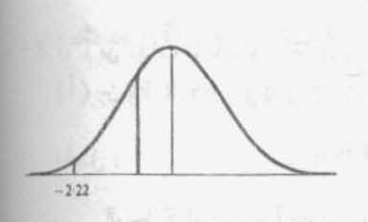
لتوزيع المعاينة للأوساط $\mu_{\bar{x}} = \mu = 5.02\ N$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\sqrt{\frac{N_p - N}{N_p - 1}} = \frac{0.30}{\sqrt{100}}\sqrt{\frac{500-100}{500-1}} = 0.027.$$

(أ) الوزن المجمع سوف يقع بين $496\ N$ و $500\ N$ إذا كان متوسط وزن الـ 100 كرة سيقع بين $4.96N$ و 5.00

4.96 بوحدات معيارية =

$$(4.96 - 5.02)/0.027 = -2.22$$



5.00 بوحدات معيارية =

$$(5.00 - 5.02)\ 0.027 = -0.74$$

الاحتمال المطلوب :

= (المساحة بين $z = -2.22$ و $z = -0.74$)

= (المساحة بين $z = -2.22$ و $z = 0$) — (المساحة بين $z = -0.74$ و $z = 0$)

$= 0.4868 - 0.2704 = 0.2164$

(ب) الوزن المجمع سوف يزيد عن $510\ N$ إذا كان متوسط وزن الـ 100 كرة يتجاوز $5.10\ N$

5.10 بوحدات معيارية =

$$(5.10 - 5.02)/0.227 = 2.96$$

الاحتمال المطلوب :

= (المساحة إلى يمين $z = 2.96$)

= (المساحة يمين $z = 0$)

– (المساحة بين $z = 0$ و $z = 2.6$)

$0.5 - .4985 = 0.0015$

أى أن هناك 3 فرص فقط من 2000 فى الحصول على عينة من 100 كرة وزنها المجمع يتجاوز $510\ N$.

الأرقام العشوائية :

٨ – ٦ (أ) وضح كيف يمكن اختيار 30 عينة عشوائية حجم كل منها 4 طلبة (بارجاع) من جدول الأوزان فى صفحة ٥٤ باستخدام الأرقام العشوائيه .

(ب) أوجد الوسط الحسابى والانحراف المعيارى لتوزيع المعاينة للأوساط فى (أ) .

(جـ) قارن النتيجة فى (ب) بالقيم النظرية ، اشرح أى اختلافات بين الإثنين .

الحل :

(أ) استخدام عددين لترقيم كل من المائة طالب 00, 01, 02,...99 (أنظر الجدول ٨ – ٢) .
وبهذا فإن الـ 5 طلبة الذين تكون أوزانهم 60—62 kg يرقموا 00—04 ، والـ 18 طالب الذين تكون أوزانهم 63—65 kg يرقموا 05—22 وهكذا . ورقم كل طالب يسمى برقم المعاينة .

جدول ٨ – ٢

الوزن (kg)	التكرار	رقم المعاينة
60–62	5	00–04
63–65	18	05–22
66–68	42	23–64
69–71	27	65–91
72–74	8	92–99

ثم نقوم بسحب رقم المعاينة من جدول الأرقام العشوائية (صفحة ٥٣٩) . من الصف الأول نجد الأرقام 51,77,27,46,40 وغيرها والتى نستعملها كأرقام معاينة ، وكل منها ينتج وزن طالب معين .

مثلا 51 تقابل وزن طالب فى الفئة 68 kg — 66 ونأخذه يساوى 67 kg (مركز الفئة) .
كذلك 46 ,27 ,77 ينتج عنها أوزان 70, 67, 67 kg . بهذا الأسلوب نحصل على الجدول ٨ – ٣ والذى يبين رقم المعاينة المسحوب ، الأوزان المقابلة له ومتوسط الوزن من الـ 30 عينة . ويجب أن نشير أنه على الرغم من أننـا عنـد استخدامنا لجدول الأرقام العشوائية بدأنا بالصف الأول فإنه من الممكن أن نبدأ من أى مكان وأن نستخدم أى نمط خاص فى استعمال الجدول .

جـدول ٨ – ٣

رقم المعاينة المسحوب	الأوزان المقابلة	متوسط الوزن
1. 51, 77, 27, 46	67, 70, 67, 67	67·75
2. 40, 42, 33, 12	67, 67, 67, 64	66·25
3. 90, 44, 46, 62	70, 67, 67, 67	67·75
4. 16, 28, 98, 93	64, 67, 73, 73	69·25
5. 58, 20, 41, 86	67, 64, 67, 70	67·00
6. 19, 64, 08, 70	64, 67, 64, 70	66·25
7. 56, 24, 03, 32	67, 67, 61, 67	65·50
8. 34, 91, 83, 58	67, 70, 70, 67	68·50
9. 70, 65, 68, 21	70, 70, 70, 64	68·50
10. 96, 02, 13, 87	73, 61, 64, 70	67·00
11. 76, 10, 51, 08	70, 64, 67, 64	66·25
12. 63, 97, 45, 39	67, 73, 67, 67	68·50
13. 05, 81, 45, 93	64, 70, 67, 73	68·50
14. 96, 01, 73, 52	73, 61, 70, 67	67·75
15. 07, 82, 54, 24	64, 70, 67, 67	67·00
16. 11, 64, 55, 58	64, 67, 67, 67	66·25
17. 70, 56, 97, 43	70, 67, 73, 67	69·25
18. 74, 28, 93, 50	70, 67, 73, 67	69·25
19. 79, 42, 71, 30	70, 67, 70, 67	68·50
20. 58, 60, 21, 33	67, 67, 64, 67	66·25
21. 75, 79, 74, 54	70, 70, 70, 67	69·25
22. 06, 31, 04, 18	64, 67, 61, 64	64·00
23. 67, 07, 12, 97	70, 64, 64, 73	67·75
24. 31, 71, 69, 88	67, 70, 70, 70	69·25
25. 11, 64, 21, 87	64, 67, 64, 70	66·25
26. 03, 58, 57, 93	61, 67, 67, 73	67·00
27. 53, 81, 93, 88	67, 70, 73, 70	70·00
28. 23, 22, 96, 79	67, 64, 73, 70	68·50
29. 98, 56, 59, 36	73, 67, 67, 67	68·50
30. 08, 15, 08, 84	64, 64, 64, 70	65·50

جـدول ٨ – ٤

وسط العينة	الحـزم	f	u	fu	fu^2
64·00	/	1	−4	−4	16
64·75		0	−3	0	0
65·50	//	2	−2	−4	8
66·25	卌 /	6	−1	−6	6
$A \rightarrow$ 67·00	////	4	0	0	0
67·75	////	4	1	4	4
68·50	卌 //	7	2	14	28
69·25	卌	5	3	15	45
70·00	/	1	4	4	16
		$\Sigma f = N = 30$		$\Sigma fu = 23$	$\Sigma fu^2 = 123$

(ب) الجدول ٨ – ٤ يوضح التوزيع التكرارى للوسط الحسابى للأوزان فى العينات والتى حصلنا عليه فى (أ) .
وهذا هو توزيع المعاينة للأوساط . الوسط الحسابى والانحراف المعيارى نحصل عليهما باستخدام طريقة الترميز المشار إليها فى الفصل الثالث والرابع

$$\text{الوسط الحسابى} = A + c\bar{u} = A + \frac{c\,\Sigma fu}{N} = 67{\cdot}00 + \frac{(0{\cdot}75)(23)}{30} = 67{\cdot}58 \text{ kg}$$

$$\text{الانحراف المعيارى} = c\sqrt{\overline{u^2} - \bar{u}^2} = c\sqrt{\frac{\Sigma fu^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fu}{N}\right)^2} = 0{\cdot}75\sqrt{\frac{123}{30} - \left(\frac{23}{30}\right)^2} = 1{\cdot}41 \text{ kg}$$

(جـ) الوسط النظرى لتوزيع المعاينة للأوساط ، والمعطى بـ $\mu_{\bar{x}}$ ، يجب أن يساوى وسط المجتمع μ والذى يساوى 67.45 kg (أنظر المسألة ٣ – ٢٢ الفصل الثالث) وهذا يتفق مع القيمة 67.58 kg التى حصلنا عليها فى المسألة (ب) .

الانحراف المعيارى النظرى (الخطأ المعيارى) لتوزيع المعاينة للأوساط ، والمعرف بـ $\sigma_{\bar{x}}$ ، يجب أن يساوى $\sigma/\sqrt{N}$ ، وحيث أن الانحراف المعيارى للمجتمع $\sigma = 2.92$ kg .
وبما أن $\sigma/\sqrt{N} = 2.92/\sqrt{4} = 1.46$ kg فإن هذا يتفق مع القيمة 1.41 kg والتى حصلنا عليها فى الجزء (ب) .

الفروق ترجع إلى حقيقة أن هناك 30 عينة فقط تم اختبارها وأن حجم هذه العينة يعتبر صغيراً .

توزيع المعاينة للنسب :

٨ – ٧ فى 120 رمية لعملة متوازنة أوجد احتمال (أ) بين 40% و 60% ستكون صور (ب) $^5/_8$ أو أكثر ستكون صور .

الحـل :

نعتبر أن الـ 120 رمية للعملة كعينة من المجتمع غير المحدود المكونة من جميع الرميات الممكنة للعملة . فى هذا المجتمع تكون احتمال الصورة $p = \frac{1}{2}$ واحتمال الكتابة $q = 1 - p = \frac{1}{2}$.

(أ) المطلوب هو أن يكون الصور فى الـ 120 رمية بين $48 = (120 \times 40\%)$ و $72 = (120 \times 60\%)$.
سنسير فى الحل كما فى الفصل السابع ، باستخدام التوزيع الطبيعى كتقريب لتوزيع ذى الحدين . وبما أن عدد الصور هو متغير متقطع ، فإننا نطلب احتمال أن يقع عدد الصور بين 47.5 و 72.5 .

$\mu =$ العدد المتوقع للصور $= Np = 120(\frac{1}{2}) = 60$, and $\sigma = \sqrt{Nqp} = \sqrt{(120)(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})} = 5.48$.

47.5 بوحدات معيارية $= (47.5 - 60)/5.48 = -2.28$

72.5 بوحدات معيارية $= (72.5 - 60)/5.48 = 2.28$

الاحتمال المطلوب :

= (المساحة تحت المنحنى المعتدل بين $z = -2.28$ و $z = 2.28$) .

$= 2 \times$ (المساحة بين $z = 0$ و $z = 2.28$)

$= 2(0.4887) = 0.9774$

-2.28 2.28

طريقة اخرى :

$\mu_p = p = \frac{1}{2} = 0.50, \sigma_p = \sqrt{pq/N} = \sqrt{\frac{1}{2}(\frac{1}{2})/120} = 0.0456.$

40% معبراً عنها بوحدات معيارية $= (0.40 - 0.50)/0.0456 = -2.19$

60% معبراً عنها بوحدات معيارية $= (0.60 - 0.50)/0.0456 = 2.19$

وبهذا فإن الاحتمال المطلوب هو المساحة تحت المنحنى الطبيعى بين ($z = -2.19$ و $z = 2.19$)= $2(0.4857) = 0.9714$.

على الرغم من أن هذه النتيجة دقيقة إلى رقمين عشريين ، ولكنها لا تتفق بالضبط حيث أننا لم نستخدم الحقيقة وهى أن النسب فى الواقع متغير متقطع . ولأخذ ذلك فى الاعتبار نطرح $\frac{1}{2N} = \frac{1}{2(120)}$ من 0.40 ونضيف $\frac{1}{2N} = \frac{1}{2(120)}$ إلى 0.60 . وبهذا فإن النسب المطلوبة معبراً عنها بوحدات قياسية هى ، بمعلومية أن $1/240 = 0.00417$.

$$\frac{0{\cdot}40 - 0{\cdot}004\,17 - 0{\cdot}50}{0{\cdot}0456} = -2{\cdot}28 \quad \text{and} \quad \frac{0{\cdot}60 + 0{\cdot}004\,17 - 0{\cdot}50}{0{\cdot}0456} = 2{\cdot}28$$

وبهذا نصل إلى اتفاق مع الطريقة الأولى .

لاحظ أن $(0.40 - 0.004\ 17)$ و $(0.060 + 0.004\ 17)$ تقابل النسب $47.5/120$ و $72.5/120$ فى الطريقة الأولى أعلاه .

(ب) باستخدام الطريقة الثانية فى (أ) ، نجد بمعلومية أن $06250 = {}^5/_8$

$(0.6250 - 0.00417)$ معبراً عنها بوحدات معيارية = $\frac{0{\cdot}6250 - 0{\cdot}004\,17 - 0{\cdot}50}{-0{\cdot}0456} = 2{\cdot}65$ =

الاحتمال المطلوب = (المساحة تحت المنحنى الطبيعى إلى اليمين من $z=2.65$)

= (المساحة إلى اليمين من $z = 0$) - (المساحة بين $z = 0$ و $z = 2.65$)

$= 0.5 - 0.4960 = 0.0040$

٨ - ٨ قام كل شخص من مجموعة مكونة من 500 شخص يقذف عملة متوازنة 120 مرة . ما هو العدد المتوقع للأشخاص الذين يقررون أن

(أ) بين 40% و 60% من رمياتهم أظهرت الصورة ؟

(ب) ${}^5/_8$ أو أكثر من رمياتهم أظهرت الصورة ؟

الحل :

هذه المسألة لها علاقة وثيقة بالمسألة السابقة . نعتبر هنا أن هناك 500 عينة ، حجم كل منها 120 ، مسحوبة من مجتمع غير محدود يمثل جميع الرميات الممكنة لعملة .

(أ) الجزء (أ) من المسألة ٨ - ٧ يوضح أنه فى جميع العينات الممكنة ، والتى تتكون كل منها من 120 رمية لعملة ، فإنه يمكن أن نتوقع أن نجد 97.74% حيث تكون نسبة ظهور الصورة فيها يقع بين 40% و 60% فى 500 عينة يمكن أن نتوقع وجود حوالى 97.74% من 500 أو 489 عينة لها هذه الخاصية . ويترتب على ذلك أن حوالى 489 شخص من المتوقع أن يقرروا أن تجربتهم عنها ما بين 40% إلى 60% صورة .

وجدير بالملاحظة أن $11 = 489 - 500$ شخص من المتوقع أن يقرروا أن نسبة الصورة لا تقع بين 40% و 60% . مثل هؤلاء الأشخاص قد ينتهون إلى عملاتهم غير متوازنة على الرغم من أنها ليست كذلك . وهذا النوع من الخطأ هو المخاطرة التى تظهر كلما تعاملنا مع الاحتمالات .

(ب) بنفس المبررات كما فى (أ) ، نستنتج أن $2 = (0.0040)(500)$ شخص سوف يقررون أن $^5/_8$ أو أكثر من رمياتهم ينتج عنها ظهور الصورة .

٨ - ٩ وجد أن 2% من الأدوات المنتجة بواسطة إحدى الآلات تالفة . ما هو احتمال أن يكون فى شحنة مكونة من 400 وحدة من هذه الأدوات (أ) 2% أو أكثر (ب) 3% أو أقل يظهر أنها تالفة .

الحـل :

$$\mu_P = p = 0{\cdot}02 \quad \text{and} \quad \sigma_P = \sqrt{pq/N} = \sqrt{0{\cdot}02(0{\cdot}98)/400} = 0{\cdot}14/20 = 0{\cdot}007$$

(أ) باستخدام التصحيح للمتغيرات المتقطعة ، $1/2N$ ، أن $0.00125 = 1/800$ فإننا نحصل على
$(0.03 - 0.00125)$ معبراً عنها بوحدات قياسية $= 1{\cdot}25 = \dfrac{0{\cdot}03 - 0{\cdot}001\,25 - 0{\cdot}02}{0{\cdot}007}$
الاحتمال المطلوب = (المساحة تحت المنحنى الطبيعى إلى يسار $z = 1.25$) $= 0.1056$
وإذا لم يستخدم التصحيح فإن ما كنا سنحصل عليه هو 0.0764 .

طريقة اخرى :

عدد الأدوات التالفة $= 12 =$ (3% من 400) . بافتراض أن المتغير متصل ، فإن 12 أو أكثر من الأدوات تعنى 11.5 أو أكثر .

$$\bar{X} = (2\% \text{ of } 400) = 8, \text{ and } \sigma = \sqrt{Npq} = \sqrt{(400)(0{\cdot}02)(0{\cdot}98)} = 2{\cdot}8.$$

إذن 11.5 بوحدات معيارية $= 1.25 = (11.5 - 8)/2.8$) ، وكما سبق فإن الاحتمال المطلوب هو 0.1056

(ب) $(0.02 + 0.001\,25)$ معبراً عنها بوحدات قياسية $= 0{\cdot}18 = \dfrac{0{\cdot}02 + 0{\cdot}001\,25 - 0{\cdot}02}{0{\cdot}007}$
الاحتمال المطلوب = « المساحة تحت المنحنى الطبيعى إلى اليسار من $z = 0.18$)
$= 0.500 + 0.0714 = 0.5714$
وإذا لم يستخدم التصحيح فإن ما كنا سنحصل عليه هو 0.5000
الطريقة الثانية فى الجزء (أ) يمكن أيضاً استخدامها .

٨-١٠ أظهرت نتيجة الانتخابات أن مرشحاً معيناً قد حصل على 46% من الأصوات . فى مجموعة مكونة من (أ) 200 ، (ب) 1000 شخص اختيروا بصورة عشوائية من مجتمع الناخبين أوجد احتمال أنها سوف تظهر أغلبية فى الأصوات هذا المرشح .

الحـــل :

(أ) $\mu_p = p = 0{\cdot}46$ and $\sigma_p = \sqrt{pq/N} \quad \sqrt{0{\cdot}46(0{\cdot}54)/200} = 0{\cdot}0352$

وبما أن $1/2N = 1/400 = 0.0025$ ، فإن الأغلبية تظهر فى العينة إذا كانت النسبة فى صالح المرشح هى $(0.50 + 0.0025) = 0.5025$ أو أكثر . (هذه النسبة يمكن الحصول عليها كذلك بالتحقق أن 101 أو أكثر تعبر عن أغلبية ولكن لو أردنا التعبير عن ذلك كتغير متصـــل فنعتبره 100.5 ، وبهذا فإن النسبة هى $(100.5/200 = 0.4025$

إذن 0.5025 معبراً عنها بوحدات معيارية $= 1.21 = (0.5025 - 0.46)/0.0352$

الاحتمال المطلوب = « المساحة تحت المنحنى الطبيعى إلى اليمين $= (z = 1.21$

$= 0.5000 - 0.3869 = 0.1131$

(ب) $\mu_p = p = 0{\cdot}46, \sigma_p = \sqrt{pq/N} = \sqrt{0{\cdot}46(0{\cdot}54)/1000} =$

0.5025 معبراً عنها بوحدات معيارية = $(0{\cdot}5025 - 0{\cdot}46)/0{\cdot}0158 = 2{\cdot}69 = 2{\cdot}69$

الاحتمال المطلوب = (المساحة تحت المنحنى الطبيعى إلى يمين $(z = 2.69$

$= 0.5000 - 0.4964 = 0.0036$

توزيع المعاينة لفرق والمجموع :

٨–١١ إذا كان U_1 متغيراً يعبر عن أى عنصر من عناصر المجتمع 8 ,7 ,3 وكان U_2 متغيراً يعبر عن عناصر المجتمع 4 ,2 احسب (أ) μ_{U_1}، (ب) μ_{U_2}، (ج) $\mu_{U_1-U_2}$، (د) σ_{U_1}، (هـ) σ_{U_2}، (و) $\sigma_{U_1-U_2}$.

الحـــل :

(أ) $\mu_{U_1} = U_1$ متوسط المجتمع $= \frac{1}{3}(3 + 7 + 8) = 6$

(ب) $\mu_{U_2} = U_2$ متوسط المجتمع $= \frac{1}{2}(2 + 4) = 3$

(جـ) المجتمع المكون من الفروق بين أى عنصر من U_1 وأى عنصر من U_2 هو

$$\begin{matrix} 3-2 & 7-2 & 8-2 \\ 3-4 & 7-4 & 8-4 \end{matrix} \quad \text{or} \quad \begin{matrix} 1 & 5 & 6 \\ -1 & 3 & 4 \end{matrix}$$

إذن $\mu_{U_1-U_2}$ $(U_1 - U_2)$ متوسط $= \frac{1 + 5 + 6 + (-1) + 3 + 4}{6} = 3$

وهذا يوضح الصيغة العامة $\mu_{U_1-U_2} = \mu_{U_1} - \mu_{U_2}$

(د) $(\sigma^2_{U_1}$ تباين المجتمع $=$ $U_1 = \frac{(3-6)^2 + (7-6)^2 + (8-6)^2}{3} = \frac{14}{3}$, or $\sigma_{U_1} = \sqrt{\frac{14}{3}}$

(هـ) $(\sigma^2_{U_2}$ تباين المجتمع $=$ $U_2 = \frac{(2-3)^2 + (4-3)^2}{2} = 1$, or $\sigma_{U_2} = 1$

$$= \frac{(1-3)^2 + (5-3)^2 + (6-3)^2 + (-1-3)^2 + (3-3)^2 + (4-3)^2}{6} = \frac{17}{3}, \quad \text{or } \sigma_{U_1-U_2} = \sqrt{\frac{17}{3}} \text{ (ج)}$$

$\sigma_{U_1-U_2} = (U_1 - U_2)$ تباين المجتمع =

وهذا يوضح الصيغة العامة للعينات المستقلة $\sigma_{U_1-U_2} = \sqrt{\sigma^2_{U_1} + \sigma^2_{U_2}}$ كما هو موضح فى الأجزاء من (د) و(هـ)

٨ – ١٢ إذا كان متوسط العمر الانتاجى للمبات كهربائية من إنتاج المصنع A هو 1400 ساعة وانحرافها المعيارى 200 ساعة، بينما تلك التى ينتجها المصنع B فإن متوسط عمرها الانتاجى هو 1200 وانحرافها المعيارى 100 . إذا سحبت عينة عشوائية مكونة من 125 لمبة من كل مصنع وتم اختبارها ، ماهو احتمال أن يكون متوسط العمر الانتاجى للمبات A على الأقل (أ) 160 ساعة (ب) 250 ساعة أطول من العمر الانتاجى للمبات B ؟

الحـــل :

اعتبر أن $\overline{X}_A$ تعبر عن متوسط العمر الإنتاجى للعينة A و $\overline{X}_B$ تعبر عن متوسط العمر الانتاجى للعينة B إذن

$$\mu_{\bar{X}_A-\bar{X}_B} = \mu_{\bar{X}_A} - \mu_{\bar{X}_B} = 1400 - 1200 = 200 \text{ h}$$

و

$$\sigma_{\bar{X}_A-\bar{X}_B} = \sqrt{\frac{\sigma_A^2}{N_A} + \frac{\sigma_B^2}{N_B}} = \sqrt{\frac{(100)^2}{125} + \frac{(200)^2}{125}} = 20 \text{ h}$$

المتغير المعيارى للفرق بين وسطين هو

$$z = \frac{(\bar{X}_A - \bar{X}_B) - (\mu_{\bar{X}_A-\bar{X}_B})}{\sigma_{\bar{X}_A-\bar{X}_B}} = \frac{(\bar{X}_A - \bar{X}_B) - 200}{20}$$

والذى يقترب بصورة كبيرة من التوزيع الطبيعى .

(أ) فرق الـ 160 ساعة بوحدات معيارية $= (160 - 200)/20 = -2$.

الاحتمال المطلوب = (المساحة تحت المنحنى الطبيعى إلى يمين $z = -2$)

$$= 0.500 + 0.4772 = 0.9772$$

(ب) فرق الـ 250 ساعة بوحدات معيارية $= (250 - 200)/20 = 2.50$.

الاحتمال المطلوب = (المساحة تحت المنحنى الطبيعى إلى يمين $z = 2.50$)

$$= 0.5000 - 0.4938 = 0.0062$$

٨ – ١٣ كرة مصبوبة من الزنك من نوع معين تزن N 0.50 بانحراف معيارى N 0.02 فى مجموعتين ، بكل منها 1000 كرة ماهو احتمال أنهما سوف يختلفان فى الوزن بأكثر من $2N$.

الحـــل :

اعتبر أن $\overline{X}_1$ تعبر عن متوسط وزن الكرة من المجموعة الأولى و $\overline{X}_2$ تعبر عن متوسط وزن الكرة فى المجموعة الثانية . إذن

$$\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} \quad \mu_{\bar{X}_1} - \mu_{\bar{X}_2} = 0{\cdot}50 - 0{\cdot}50 = 0$$

$$\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{N_1} + \frac{\sigma_2^2}{N_2}} = \sqrt{\frac{(0{\cdot}02)^2}{1000} + \frac{(0{\cdot}02)^2}{1000}} = 0{\cdot}000\,895$$

المتغير المعيارى للفرق بين وسطين هو $z = \dfrac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - 0}{0{\cdot}000\,895}$ ويقترب بشكل كبير من التوزيع الطبيعى .

اختلاف مقداره 2N فى المجموعتين يكافىء فرقاً مقداره $2/1000 = 0.002$ N فى الأوساط . وهذا يمكن

أن يحدث فى حالة أما إذا كانت $\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \geqq 0.002$ أو $\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \leqq 0.002$ ، بمعنى ،

$$z \leqq \frac{-0{\cdot}002 - 0}{0{\cdot}000\,895} = -2{\cdot}23 \qquad \text{أو} \qquad z \geqq \frac{0{\cdot}002 - 0}{0{\cdot}000\,895} = 2{\cdot}23$$

إذن

$$\Pr\{z \geqq 2{\cdot}23 \text{ or } z \leqq -2{\cdot}23\} = \Pr\{z \geqq 2{\cdot}23\} + \Pr\{z \leqq -2{\cdot}23\} = 2(0{\cdot}5000 - 0{\cdot}4871) = 0{\cdot}0258$$

٨ – ١٤ A و B يلعبان مباراة فى « الصورة أو الكتابة » ، حيث يقوم كل منهم برمى 50 عملة A . سوف يكسب المباراة إذا ظهر فى رمياته 5 صور أو أكثر من تلك التى حصل عليها B ، وبخلاف ذلك يكسب B . حدد نسبة المضاربة ضد A أن يكسب أى مباراة معينة .

الحـــل :

إذا كانت P_A تعبر عن نسبة الصورة التى حصل عليها A و P_B تعبر عن نسبة الصورة التى حصل عليها B .

إذا افترضنا أن العملات كلها غير متحيزة ، فإن احتمال ظهور الصورة p هو ½ . إذن

$$\mu_{P_A-P_B} = \mu_{P_A} - \mu_{P_B} = 0 \quad \text{and} \quad \sigma_{P_A-P_B} = \sqrt{\sigma_{P_A}^2 + \sigma_{P_B}^2} = \sqrt{\frac{pq}{N_A} + \frac{pq}{N_B}} = \sqrt{\frac{2(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})}{50}} = 0{\cdot}10$$

المتغير المعيارى للفرق بين نسبتين هو $z = (P_A - P_B - 0)/0.10$.

باعتبار أن المتغير متغير مستمر ، فإن 5 أو أكثر صورة تعبر عن 4.5 أو أكثر صورة ، بحيث أن الفرق بين النسب يجب أن يكون $4.5/50 = 0.09$ أو أكثر بمعنى أن z أكبر من أو يساوى

$$(0.09 - 0)/0.10 = 0.9 \quad \text{أو} \quad (z \geqq 0.9)$$

واحتمال ذلك هو المساحة تحت المنحنى الطبيعى إلى يمين $z = 0.9$ ، والتى تساوى

$$(0.5000 - 0.3159) = 0.1841$$

وبهذا تكون نسبة المضاربة ضد A أن يكسب هى $(1 - 0.1841) : 0.1841 = 0.8159 : 0.1841$ أى 4.43 إلى 1 .

٨ – ١٥ قيست مسافتان فكانتا 27.3 mm بانحراف معياري (خطأ معياري) قدره 0.16 mm و 15.6 mm بانحراف معياري (خطأ معياري) قدره 0.08 mm .

حدد الوسط الحسابي والانحراف المعياري (أ) للمجموع (ب) للفرق بين المسافتين .

الحـــل :

إذا عبرنا عن المسافتين بالرمز D_1 و D_2 إذن

(أ)

$$\mu_{D_1+D_2} = \mu_{D_1} + \mu_{D_2} = 27{\cdot}3 + 15{\cdot}6 = 42{\cdot}9 \text{ mm}$$
$$\sigma_{D_1+D_2} = \sqrt{\sigma^2_{D_1} + \sigma^2_{D_2}} = \sqrt{(0{\cdot}16)^2 + (0{\cdot}08)^2} = 0{\cdot}18 \text{ mm}$$

(ب)

$$\mu_{D_1-D_2} = \mu_{D_1} - \mu_{D_2} = 27{\cdot}3 - 15{\cdot}6 = 11{\cdot}7 \text{ mm}$$
$$\sigma_{D_1-D_2} = \sqrt{\sigma^2_{D_1} + \sigma^2_{D_2}} = \sqrt{(0{\cdot}16)^2 + (0{\cdot}08)^2} = 0{\cdot}18 \text{ mm}$$

٨ – ١٦ نوع معين من اللمبات الكهربائية لها عمر إنتاجي 1500 ساعة وانحرافها المعياري 150 ساعة . تم توصيل ثلاث لمبات معاً بحيث إذا احترقت إحداها ، فإن الأخيرتين سيحترقان أيضاً . افترض أن العمر الإنتاجي يتوزع توزيعاً طبيعياً ، ماهو احتمال أن تستمر الإضاءة (أ) على الأقل 5000 ساعة (ب) 4200 ساعة على الأكثر ؟

الحـــل :

افترض ان الأعمار الإنتاجية هي L_1, L_2, L_3 . إذن

$$\mu_{L_1+L_2+L_3} = \mu_{L_1} + \mu_{L_2} + \mu_{L_3} = 1500 + 1500 + 1500 = 4500 \text{ hours}$$
$$\sigma_{L_1+L_2+L_3} = \sqrt{\sigma^2_{L_1} + \sigma^2_{L_2} + \sigma^2_{L_3}} = \sqrt{3(150)^2} = 260 \text{ hours}$$

(أ) 5000 ساعة معبراً عنها بوحدات معيارية $= (5000 - 4500)/260 = 1.92$.

الاحتمال المطلوب = (المساحة تحت المنحنى الطبيعي إلى يمين $z = 1.92$)

$$= 0.5000 - 0.4726 = 0.0274$$

(ب) 4200 ساعة معبراً عنها بوحدات معيارية $= (4200 - 4500)/260 = -1.15$.

الاحتمال المطلوب = (المساحة تحت المنحنى الطبيعي إلى يمين $z = -1.15$)

$$= 0.5000 - 0.3749 = 0.1251$$

مسائل متنوعة

٨ – ١٧ بالرجوع إلى المسألة ٨ – ١ أوجد (أ) الوسط الحسابي لتوزيع المعاينة للتباينات ، (ب) الانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للتباينات أي ، الخطأ المعياري للتباينات .

الحـل :

(أ) تباينات المعاينة المقابلة لكل من الـ 25 عينة في المسألة ٨ – ١ هي

0	0·25	4·00	9·00	20·25
0·25	0	2·25	6·25	16·00
4·00	2·25	0	1·00	6·25
9·00	6·25	1·00	0	2·25
20·25	16·00	6·25	2·25	0

متوسط توزيع المعاينة للتباينات هو

$$\mu_{s^2} = \frac{\text{مجموع كل التباينات في الجدول أعلاه}}{25} = \frac{135}{25} = 5{\cdot}40$$

وهذا يوضح حقيقية أن $\mu_{s^2} = (N-1)\,\sigma^2/N$ ، حيث أن $N = 2$ و $\sigma^2 = 10.8$ (أنظر المسألة ٨ – ١ (أ)) ، الجانب الأيسر هو $\tfrac{1}{2}(10.8) = 5.4$.

النتيجة تظهر تفضيل تعريف التباين المصحح للعينات مثل $\hat{s}^2 = \dfrac{N}{N-1}s^2$.

وهذا يؤدى إلى أن $\mu_{\hat{s}^2} = \sigma^2$ (أنظر أيضاً الملاحظات صفحة ١١٤ . ويجب ملاحظة أن تباين المجتمع يجب أن يعرف كما عرفناها سابقاً ولكن التصحيح يتم على تباين العينة).

(ب) تباين توزيع المعاينة للتباينات $\sigma^2_{s^2}$ نحصل عليه بطرح الوسط 5.40 من كل من الـ 25 رقم في الجدول السابق ، تربيع هذه الأرقام ، ثم جمعها ، ثم قسمة الناتج على 25 . وبهذا

$$\sigma^2_{s^2} = 575{\cdot}75/25 = 23{\cdot}03 \text{ or } \sigma_{s^2} = 4{\cdot}80$$

٨ – ١٨ حل المعادلة السابقة إذا كان السحب بدون إرجاع .

الحـل :

(أ) هناك 10 عينات تبايناتها معطاة بالأرقام أعلى (أو أسفل) قطر الأصفار في جدول المسألة ٨ – ١٧ (أ) . إذن

$$\mu_{s^2} = \frac{0{\cdot}25 + 4{\cdot}00 + 9{\cdot}00 + 20{\cdot}25 + 2{\cdot}25 + 6{\cdot}25 + 16{\cdot}00 + 1{\cdot}00 + 6{\cdot}25 + 2{\cdot}25}{10} = 6{\cdot}75$$

وهذه حالة خاصة من النتيجة العامة $\mu_{s^2} = \left(\dfrac{N_p}{N_p-1}\right)\left(\dfrac{N-1}{N}\right)\sigma^2$ التي يمكن إثباتها بوضع $N_P = 5$ ، $N = 2$ و $\sigma^2 = 10.8$ في الجانب الأيمن من μ_{s^2} لنحصل على $\mu_{s^2} = (\tfrac{5}{4})(\tfrac{1}{2})(10{\cdot}8) = 6{\cdot}75$

(ب) إطرح 6.75 من كل من الـ 10 أرقام أعلى قطر الأصفار في المسألة ٨ – ١٧ (أ) ، تربيع هذه الأرقام ، بالجمع والقسمة على 10 نحصل على $\sigma^2_{s^2} = 39{\cdot}675 \text{ or } \sigma_{s^2} = 6{\cdot}30$

٨ – ١٩ إذا كان الانحراف المعيارى لأوزان مجتمع كبير جداً من الذكور هو 10.0 kg . بحثت من هذا المجتمع عينات حجم كل منها 200 من الذكور ، وحسب الانحراف المعيارى للاوزان في كل عينة . أوجد

(أ) الوسط الحسابي ، (ب) الانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للانحراف المعياري .

الحـل :

من الممكن أن نعتبر أن المعاينة أما من مجتمع غير محدود أو بدون إرجاع من مجتمع محدود . من صفحة ٢٣٠ نحصل على :

(أ) متوسط توزيع المعاينة للانحراف المعياري $= \mu_s = \sigma = 10.0\ \text{kg}$.

(ب) الانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للانحراف المعياري $= \sigma_s = \sigma/\sqrt{2N} = 10/\sqrt{400} = 0{\cdot}50\ \text{kg}.$

٨ – ٢٠ ماهي النسبة المئوية للعينات فى المسألة السابقة التى لها انحراف معيارى

(أ) أكبر من 11.0 kg (ب) أقل من 8.8 kg ؟

الحـل :

توزيع المعاينة للانحراف المعيارى يمكن تقريبه بالتوزيع الطبيعى الذى متوطه 10.0 kg وانحرافه المعيارى 0.50 kg .

(أ) 11.0 kg معبراً عنها بوحدات معيارية $= (11.0 - 10.0)/0.50 = 2.0$. المساحة تحت المنحنى الطبيعى إلى يمين $z = 2.0$ هى $(0.5 - 0.4772) = 0.0228$ وبهذا فإن النسبة المطلوبة هى 2.3% .

(ب) 8.8 kg معبراً عنها بوحدات معيارية $= (8.8 - 10.0)/0.50 = -2.4$ المساحة تحت المنحنى الطبيعى إلى يسار $z = -2.4$ هى $(0.5 - 0.4918) = 0.0082$ وبهذا فإن النسبة المطلوبة هى 0.8% .

مسائل اضافية

توزيع المعاينة للأوساط :

٨ – ٢١ يتكون مجتمع من أربعة أرقام 3, 7, 11, 15 . اعتبر كل العينات الممكنة ذات الحجم إثنتين والتى يمكن سحبها بدون إرجاع من هذا المجتمع .

أوجد (أ) متوسط المجتمع ، (ب) الانحراف المعيارى المجتمع ، (جـ) متوسط توزيع المعاينة للأوساط ، (د) الانحراف المعيارى لتوزيع المعاينة للأوساط .

أثبت (جـ) ، (د) مباشرة من (أ) و (ب) باستخدام صيغة ملائمة .

ج : (أ) 0.9 (ب) 4.47 (جـ) 9.0 (د) 3.16

٨ – ٢٢ حل المسألة ٨ – ٢١ إذا كانت المعاينة بدون إرجاع .

ج : (أ) 9.0 (ب) 4.47 (جـ) 9.0 (د) 2.58

٨ – ٢٣ وزن 1500 كرة حديدية يتوزع توزيعاً طبيعياً وسطه الحسابى 22.40 newtons وانحرافه المعيارى 0.048 newtons . سحبت 300 عينة حجم كل منها 36 من هذا المجتمع ، أوجد المتوسط المتوقع والانحراف المعيارى لتوزيع المعاينة للأوساط إذا كانت المعاينة (أ) بإرجاع (ب) بدون إرجاع .

ج : (أ) $\mu_{\bar{x}} = 22{\cdot}40\ N, \sigma_{\bar{x}} = 0{\cdot}008\ N$ (ب) $\mu_{\bar{x}} = 22{\cdot}40\ N, \sigma_{\bar{x}} =$

٨ – ٢٤ حل المسألة ٨ – ٢٣ إذا كان المجتمع مكوناً من 72 من الكرات الحديدية .

ج : (أ) $\mu_{\bar{x}} = 22{\cdot}4\ N, \sigma_{\bar{x}} = 0{\cdot}008\ N$ (ب) $\mu_{\bar{x}} = 22{\cdot}4\ N, \sigma_{\bar{x}} = 0{\cdot}0057\ N$

٨ – ٢٥ فى المسألة ٨ – ٢٣ كم من العينات العشوائية أوساطها (أ) بين N 22.39 و N 22.41 (ب) أكبر من N 22.42 (ج) أقل من N 22.37 (د) أقل من N 22.38 أو أكبر من N 22.41 ؟

ج : (أ) 237 (ب) 2 (ج) لا يوجد (د) 34

٨ – ٢٦ لمبات من نوع معين من إنتاج إحدى الشركات بمتوسط عمرها الانتاجى 800 h وانحرافها المعيارى 60 h . فى عينة عشوائية مكونة من 10 لمبة أخذت من المجموعة ، أوجد احتمال أن يكون متوسط عمرها الإنتاجى

(أ) بين 790 و 810 h ، (ب) أقل من 785 h ، (ج) أكبر من 820 h (د) بين 770 و 830 h.

ج : (أ) 0.4972 (ب) 0.1587 (ج) 0.0918 (د) 0.9544

٨ – ٢٧ حل المسألة ٨ – ٢٦ إذا أخذت عينة من 64 لمبة . اشرح الفروق .

ج : (أ) 0.8164 (ب) 0.0228 (ج) 0.0038 (د) 1.0000

٨ – ٢٨ إذا كان متوسط وزن طرود مرسلة إلى أحد المتاجر هو N 300 وانحرافها المعيارى N 50 . اختير 25 طرداً بصورة عشوائية ووضعت فى مصعد لرفعها ماهو احتمال أن وزن الطرود سوف يتجاوز حدود الامان المحددة للصعود والمقررة بـ N 8200 ؟

ج : 0.0026

الأرقام العشوائية :

٨ – ٢٩ حل المسألة ٨ – ٦ باستخدام مجموعات مختلفة من الأرقام العشوائية واختيار (أ) 15 ، (ب) 30 ، (ج) 45 ، (د) 60 عينة حجم كل منها 4 ، مع الإرجاع .

قارن بالنتائج النظرية فى كل حالة .

٨ – ٣٠ حل المسألة ٨ – ٢٩ باختيار عينات ذات الحجم (أ) 2 (ب) 8 ، بإرجاع بدلا من 4 .

٨ – ٣١ حل المسألة ٨ – ٦ إذا كانت المعاينة بدون إرجاع . قارن بالنتائج النظرية .

٨ – ٣٢ (أ) اشرح كيفية اختيار 30 عينة حجم كل منها 2 من التوزيع بالمسألة ب – ٦١ الفصل الثالث .

(ب) احسب الوسط الحسابى والانحراف المعيارى لتوزيع المعاينة للأوساط الذى حصلت عليه وقارن بالنتائج النظرية.

٨ – ٣٣ حل المسألة السابقة باستخدام عينات حجمها 4 .

توزيع المعاينة للنسب :

٨ – ٣٤ أوجد احتمال أن يكون بين 400 طفل سوف يولدون (أ) أقل من 40% سيكونوا أولاداً (ب) بين 43% و 57% سيكونون بنات . (ﺟ) أكبر من 54% سيكونون أولاداً . مفترضاً احتمالات متساوية لميلاد الأولاد والبنات .

ج : (أ) 0.0019 (ب) 0.9596 (ﺟ) 0.1151

٨ – ٣٥ من بين 1000 عينة بكل منها 200 طفل ، فى كم تتوقع أن تجد

(أ) أقل من 40% أولاد (ب) بين 40% و 60% بنات (ﺟ) 53% أو أكثر بنات

ج : (أ) 2 (ب) 996 (ﺟ) 218

٨ – ٣٦ حل المسألة ٨ – ٣٤ إذا كانت العينة 100 بدلا من 200 طفل ووضح الفروق فى النتائج .

ج : (أ) 0.0179 (ب) 0.8664 (ﺟ) 0.1841

٨ – ٣٧ إناء يحتوى على 80 بلية منها 60% لونها أحمر و 40% لونها أبيض . من بين 50 عينة كل منها مكون من 20 بلية سحبت بإرجاع من الإناء ، كم من العينات نتوقع أن تتكون من (أ) عدد متساو من البلى الأحمر والأبيض (ب) 12 لونها أحمر و 8 لونها أبيض (ﺟ) 8 لونها أحمر و 12 لونها ابيض (د) 10 أو أكثر من البلى الأبيض ؟

ج : (أ) 6 (ب) 9 (ﺟ) 2 (د) 12

٨ – ٣٨ صمم تجربة تهدف إلى توضيح الإجابة على المسألة ٨–٣٧ . بدلا من البلى الأحمر والأبيض يمكنك استخدام قطع من الورق حيث الرمز R أو W مكتوب حسب النسب الصحيحة . ماهو الخطأ الذى يمكن أن ينتج عن استخدام مجموعتين من العملات ؟

٨ – ٣٩ أرسل مصنع 1000 طرد يتكون كل منها من 100 لمبة كهربائية إذا كانت 5% من اللمبات تالفة حسب التوزيع الطبيعى . ماهو عدد الطرود التى تتوقع أن يكون بها (أ) أقل من 90 لمبة صالحة (ب) 98 أو أكثر من لمبة صالحة .

ج : (أ) 6 (ب) 125

توزيع المعاينة لفروق والمجموع :

٨ – ٤٠ A و B ينتجان نوعين من الكابلات ، متوسط مقاومتها للكسر هو $4000\ N$ و $4500\ N$ وانحرافاتها المعيارية $300\ N$ و $200\ N$ على الترتيب . إذا اختير 100 كابل من إنتاج A و 50 كابل من إنتاج B ، ماهو احتمال أن يكون متوسط مقاومتها للكسر لكابلات B .

(أ) على الأقل $600\ N$ أكبر من A . (ب) على الأقل $450\ N$ أكبر من A ؟

ج : (أ) 0.0077 (ب) 0.8869

٨ – ٤١ ماهى الاحتمالات فى المسألة ٨ – ٤٠ إذا كان 100 كابل من النوعين قد تم اختيارهما ؟ ضع فى الاعتبار الفروق.

ج : (أ) 0.0028 (ب) 0.9172

٨ – ٤٢ متوسط درجات طلبة فى امتحان قدرات هو 72 نقطة وانحرافها المعيارى 8 نقط . فى مجموعتين من الطلبة ، مكونة من 28 و 36 طالباً على الترتيب ، ماهو احتمال أن تختلف فى متوسط درجاتها (أ) ﺑ 3 أو أكثر نقطة (ب) 6 أو أكثر نقطة (ﺟ) بين 2 و 5 نقطة ؟

ج : (أ) 0.2150 (ب) 0.0064 (ﺟ) 0.4504

٨ – ٤٣ وعاء يحتوى على 60 بلى أحمر و 40 بلى أبيض . مجموعتان تتكون كل منهما من 30 من البلى سحبت بإرجاع من الوعاء وتم تسجيل ألوانهما .

ماهو احتمال أن تكون المجموعتان مختلفتين عن بعض بـ 8 أو أكثر من البلى الأحمر ؟

ج : 0.0482

٨ – ٤٤ حل المسألة ٨ – ٤٣ إذا كانت المعاينة بدون إرجاع فى كل مجموعة

ج : 0.0136

٨ – ٤٥ أظهرت نتائج الانتخابات أن مرشحاً معيناً حصل على 65% من الأصوات . فى عينتين عشوائيتين ، تتكون كل منها من 200 ناخب ، أوجد احتمال أن النتائج تشير إلى أكثر من 10% اختلاف فى النسب التى صوتت لصالح المرشح .

ج : 0.0316

٨ – ٤٦ إذا كانت U_1 و U_2 مجموعتين من الأرقام فى المسألة ٨ – ١١ أثبت أن (أ) $\mu_{U_1+U_2} = \mu_{U_1} + \mu_{U_2}$

(ب) $\sigma_{U_1+U_2} = \sqrt{\sigma_{U_1}^2 + \sigma_{U_2}^2}$

٨ – ٤٧ ثلاث مجموعات من الكتل وزنت فكانت متوسطاتها 62.34 kg ، 35.97 ، 20.48 وانحرافاتها المعيارية 0.54 kg ، 0.46 ، 0.21 على الترتيب . أوجد (أ) الوسط الحسابى (ب) الانحراف المعيارى للأوزان

ج : (أ) 118.79 kg (ب) 0.74 kg

٨ – ٤٨ متوسط تيار بطارية هو 15.0 فولت وانحرافها المعيارى 0.2 فولت . إذا وصلت أربع من هذه البطاريات على التوالى ما هو احتمال أن يكون المتوسط المجمع لتيارها هو 60.8 فولت أو أكثر ؟

ج : 0.0228

مسائل متنوعة

٨ – ٤٩ مجتمع يتكون من 7 أرقام متوسطها 40 وانحرافها المعيارى 3 . إذا سحبت عينة حجمها 5 من المجتمع وحسب تباين كل عينة ، أوجد متوسط توزيع المعاينة للتباينات إذا كانت المعاينة (أ) بإرجاع (ب) بدون إرجاع .

ج : (أ) 7.2 (ب) 8.4

٨ – ٥٠ لمبات من نوع معين من إنتاج إحدى الشركات متوسط عمرها الإنتاجى 900 h وانحرافها المعيارى 80 h . أرسلت الشركة 1000 مجموعة بكل مجموعة 100 لمبة . فى كم مجموعة من الممكن أن نتوقع أن (أ) أن يزيد متوسط العمر الإنتاجى عن 910 h ، (ب) الانحراف المعيارى يتجاوز 95 h ؟ ماهى الفروض التى يجب وضعها ؟

ج : (أ) 106 (ب) 4

٨ – ٥١ فى المسألة ٨ – ٥٠ إذا كان وسيط العمر الإنتاجى هو 900 h فى كم من المجموعات تتوقع أن يتجاوز وسيط العمر الإنتاجى 910 h ؟ قارن إجابتك بالمسألة ٨ – ٥٠ (أ) وفسر النتائج .

ج : 159

٨ – ٥٢ فى امتحان عام تتوزع الدرجات توزيعاً طبيعياً بمتوسط 72 وانحراف معيارى 8 . (أ) أوجد أقل درجة فى الـ 20% الأوائل (ب) فى عينة عشوائية من 100 طالب أوجد احتمال أن تكون أقل درجة فى الـ 20% الأوائل أقل من 76 .

ج : (أ) 78.7 (ب) 0.0090

الفصل التاسع

نظرية التقدير الاحصائية

تقدير المعالم :

فى الفصل الأخير شاهدنا كيف يمكن استخدام نظرية العينات لحصول على معلومات عن عينات مسحوبة بصورة عشوائية من مجتمع معلوم . ومن وجهة النظر العملية ، قد يكون أكثر أهمية أن يكون لدينا القدرة على اسقاط المعلومات الخاصة بالمجتمع باستخدام عينات مسحوبة من هذا المجتمع . مثل هذه المشاكل يتم دراستها فى اطار الاستدلال الاحصائى ، والذى يستخدم أساسيات نظرية العينات .

أحد المشاكل المهمة فى الاستدلال الاحصائى هو تقدير معالم المجتمع أو باختصار المعالم (مثل متوسط المجتمع ، التباين ،....) من احصائيات العينة المقابلة أو باختصار الاحصائيات (مثل متوسط العينة ، تباينها ، ....) .

وسوف نقوم بدراسة هذه المشكلة فى هذا الفصل .

التقديرات غير المتحيزة :

إذا كان متوسط توزيع المعاينة الأحصائية يساوى معلمة المجتمع المقابلة ، فإن الاحصائية تسمى مقدرا غير متحيز للمعلمة ، بخلاف ذلك يسمى مقدرا متحيزا . القيمة المقابلة لمثل هذه الاحصائية تسمى تقديرات غير متحيزة أو متحيزة على الترتيب .

مثال ١ : متوسط توزيع المعاينة للأوساط $\mu_X = \mu$ ، متوسط المجتمع (أنظر صفحة ٢٢٨) . بهذا فإن متوسط العينة $\overline{X}$ هو تقدير غير متحيز لمتوسط المجتمع μ .

مثال ٢ : متوسط توزيع المعاينة للتباينات $\mu_{s^2} = \frac{N-1}{N}\sigma^2,$ ، حيث σ^2 تباين المجتمع و N هو حجم العينة (أنظر صفحة ٢٣٠) . بهذا فإن تباين العينة s^2 هو تقدير متحيز لتباين المجتمع σ^2 . باستخدام التباين المعدل $\hat{s}^2 = \frac{N}{N-1}s^2,$ نجد أن $\mu_{\hat{s}^2} = \sigma^2$ بحيث أن $\hat{s}^2$ هو تقدير غير متحيز لـ σ^2 . ومع ذلك فإن $\hat{s}$ بعد تقديرا متحيزا لـ σ .

وباستخدام تعبير التوقع (انظر الفصل السادس) يمكن القول بأن الاحصائية غير متحيزة إذا كان توقعها يساوى معلمة المجتمع المقابلة لها . بهذا فإن $\overline{X}$ و $\hat{s}^2$ هما غير متحيزين حيث أن $E\{\overline{X}\} = \mu$ و $E\{\hat{s}^2\} = \sigma^2$.

التقدير الكفوء :

إذا كان توزيع المعاينة لاحصائيتين لهما نفس الوسط الحسابى (أو التوقع) ، فإن الاحصائية ذات التباين الأقل تسمى مقدر كفوء للوسط الحسابى بينما الاحصائية الأخرى تسمى مقدر غير كفوء . القيمة المقابلة للاحصائية تسمى تقدير كفوء أو تقدير غير كفوء على الترتيب .

إذا اعتبرنا جميع الاحصائيات التي يكون توزيع المعاينة لها له نفس الوسط الحسابي ، فإن الاحصائية ذات التباين الأقل يسمى أحيانا التقدير الأكثر كفاءة أو التقدير الأحسن لهذا الوسط .

مثال : توزيع المعاينة للوسط الحسابي والوسيط كلاهما له نفس الوسط الحسابي ، بالتحديد وسط المجتمع . ولكن تباين توزيع المعاينة للأوساط أقل من تباين توزيع المعاينة للوسيطات (أنظر صفحة ٢٣٠) . وبذلك فان متوسط العينة يعطى تقديرا كفوءا لمتوسط المجتمع ، بينما وسيط العينة يعطى تقديرا غير كفوء له .

ومن بين جميع الاحصائيات التي تقدر متوسط المجتمع ، فإن متوسط العينة يعطى تقديرا أكثر كفاءة .

من الناحية العملية قد نستخدم تقدير غير كفوء نظرا للسهولة النسبية التي نحصل بها على بعض هذه التقديرات .

التقدير بنقطة والتقدير بفترة . المأمونية :

إذا قدرت معلمة المجتمع برقم واحد فهذا يسمى بتقدير المعلمة بنقطة . تقدير معلمة المجتمع المعطى برقين والذى يمكن اعتبار أن المعلمة تقع بينهما يسمى بالتقدير بفترة لهذه المعلمة .

التقديرات بفترة تشير إلى معنوية أو دقة التقدير وبالتالى تفضل عن التقدير بنقطة .

مثال : إذا ذكرنا أن مسافة قيست وكانت 5.28 mm ، فإننا نعطى تقدير بنقطة . ومن الناحية الأخرى إذا ذكرنا أن المسافة هى 5.28 ± 0.03 mm أى أن المسافة تقع بين 5.25 mm و 5.31 mm ، فإننا نعطى تقديرا بفترة . التعبير عن الخطأ أو الدقة فى التقدير يسمى بالمأمونية .

تقدير فترة الثقة لمعالم المجتمع :

أعتبر أن μ_S تعبر عن الوسط الحسابي لتوزيع المعاينة للاحصائية S ، σ_S الانحراف المعيارى (الخطأ المعيارى) لها . فإذا كان توزيع المعاينة للاحصائية S تتوزع بشكل تقريبى كالتوزيع الطبيعى (والذى يعد صحيحا لكثير من الاحصائيات كما سبق أن رأينا إذا كان حجم العينة $N \geqq 30$) فإننا يمكن أن نتوقع أن نجد قيمة فعلية للاحصائية S تقع فى الفترات
$$\mu_S - \sigma_S \text{ to } \mu_S + \sigma_S, \mu_S - 2\sigma_S \text{ to } \mu_S + 2\sigma_S \text{ or } \mu_S - 3\sigma_S \text{ to } \mu_S + 3\sigma_S$$
حوالى 68·27%, 95·45% and 99·73% مرة على الترتيب

وبالمثل فإنه يمكننا أن نتوقع أن نجد أو يمكن أن نكون على ثقة من الحصول على μ_S فى الفترات $S + \sigma_S, S - 2\sigma_S \text{ to } S + 2\sigma_S \text{ or } S - 3\sigma_S \text{ to } S + 3\sigma_S$ حوالى 68·27%, 95·45% and 99·73% مرة على الترتيب .

ولهذا السبب تسمى الفترات 68·27%, 95·45% and 99·73% بفترات الثقة لتقدير μ_S . حدود هذه الفترات $(S \pm \sigma_S, S \pm 2\sigma_S, S \pm 3\sigma_S)$ تسمى الـ 99.73 % ، 95.45 % و 68.27 % حدود الثقة أو كما تسمى أحيانا حدود الطمأنينة .

كذلك ، $S \pm 1.96\sigma_S$ و $S \pm 2.58\sigma_S$ هما 95 % ، 99 % (أو 0.95 ، 0.99) حدود ثقة لـ S. نسبة الثقة تسمى أحيانا مستوى الثقة . الأرقام .... ,1.96, 2.58 فى حدود الثقة تسمى معاملات الثقة أو القيم الحرجة ويرمز لها بالرمز z_c . من مستوى الثقة يمكن أن نحصل على معاملات الثقة ، والعكس . فى الجدول ٩ – ١ نعطى قيم z_s المقابلة

القيم المختلفة لمستويات الثقة المستخدمة فى الحياة العملية . لمستويات الثقة غير الموجودة بالجدول ، نحصل على قيم z_c من جداول مساحات المنحنى الطبيعى (أنظر المسألة ٩ – ٧) .

جدول ٩–١

مستوى الثقة	99·73%	99%	98%	96%	95·45%	95%	90%	80%	68·27%	50%
z_c	3·00	2·58	2·33	2·05	2·00	1·96	1·645	1·28	1·00	0·6745

تقدير فترة الثقة للأوساط :

إذا كانت الاحصائية S هى متوسط العينة $\bar{X}$ ، فإن حدود الثقة بنسبة 95% لتقدير متوسط المجتمع μ تعرف بـ $\bar{X} \pm 1.96\sigma_{\bar{X}}$ وبنسبة 99 % هى $\bar{X} \pm 2.58\sigma_{\bar{X}}$. وبشكل أكثر عمومية ، فإن حدود الثقة تعرف بـ $\bar{X} \pm z_c\sigma_{\bar{X}}$ حيث z_c ، والذى يعتمد على مستوى الثقة المعين المطلوب ، يمكن قراءته من الجدول أعلاه . باستخدام قيم $\sigma_{\bar{X}}$ الذى حصلنا عليه فى الفصل الثامن ، فإن حدود الثقة لمتوسط المجتمع يعطى كما يلى :

$$\bar{X} \pm z_c \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \tag{1}$$

فى حالة ما إذا كانت المعاينة من مجتمع غير محدود أو إذا كانت المعاينة بارجاع من مجتمع محدود . كما يعرف كما يلى :

$$\bar{X} \pm z_c \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{N_p - N}{N_p - 1}} \tag{2}$$

إذا كانت المعاينة بدون ارجاع من مجتمع محدود حجمه N_p .

بشكل عام فإن الانحراف المعيارى للمجتمع σ يكون غير معروف ، وللحصول على حدود الثقة السابقة نستخدم التقدير من العينة $\hat{s}$ أو s . ويمكن اثبات أنها مرضية على أساس أن $N \geqq 30$. ولكن لقيم $N < 30$ ، فإن التقريب غير جيد ، ويجب استخدام نظرية العينات الصغيرة (أنظر الفصل الحادى عشر) .

فترة الثقة للنسب :

إذا كانت الاحصائية S هى نسبة « النجاح » فى عينة حجمها N مسحوبة من مجتمع ذى حدين حيث P هى نسبة النجاح (احتمال النجاح) ، فإن حدود الثقة لـ p تعطى بالمعادلة $P \pm z_c\sigma_P$ حيث P هى نسبة النجاح فى عينة حجمها N باستخدام قيم σ_P التى حصلنا عليها فى الفصل الثامن ، فإن حدود الثقة لنسب المجتمع تعطى كما يلى :

$$P \pm z_c\sqrt{\frac{pq}{N}} = P \pm z_c\sqrt{\frac{p(1-p)}{N}} \tag{3}$$

فى حالة ما إذا كانت المعاينة من مجتمع غير محدود أو إذا كانت المعاينة بارجاع من مجتمع محدود . وتعطى كما يلى :

$$P \pm z_c\sqrt{\frac{pq}{N}}\sqrt{\frac{N_p - N}{N_p - 1}} \tag{4}$$

إذا كانت المعاينة بدون ارجاع من مجتمع محدود حجمه N_p .

لحساب حدود الثقة هذه فيمكن استخدام تقدير العينة P لقيمة p ، والتي يمكن استخدامها بشكل مرض لقيم $N \geqq 30$. طريقة أكثر دقة لحصول على حدود الثقة فى هذه الحالة معطاة فى المسألة ٩-١٢ .

فترات الثقة للفروق والمجموع :

إذا كانت S_1 و S_2 احصائيتين من عينة توزيع معاينتها يقترب من التوزيع الطبيعى ، فإن حدود الثقة للفروق بين معالم المجتمع المقابلة لـ S_1 و S_2 تعطى كما يلى :

$$S_1 - S_2 \pm z_c\sigma_{S_1-S_2} = S_1 - S_2 \pm z_c\sqrt{\sigma^2_{S_1} + \sigma^2_{S_2}} \quad (٥)$$

بينما حدود الثقة لمجموع معالم المجتمع هى

$$S_1 + S_2 \pm z_c\sigma_{S_1+S_2} = S_1 + S_2 \pm z_c\sqrt{\sigma^2_{S_1} + \sigma^2_{S_2}} \quad (٦)$$

وذلك بافتراض أن العينات مستقلة (أنظر الفصل الثامن) .

على سبيل المثال ، حدود الثقة للفرق بين متوسطات مجتمعين ، فى حالة ما إذا كان المجتمع غير محدود ، يعطى كما يلى :

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \pm z_c\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \bar{X}_1 - \bar{X}_2 \pm z_c\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{N_1} + \frac{\sigma_2^2}{N_2}} \quad (٧)$$

حيث يرمز للمتوسط والانحراف المعيارى وحجم العينة الأولى بالرموز $\bar{X}_1$ ، σ_1 ، N_1 على الترتيب وفى العينة الثانية بالرموز $\bar{X}_2$ و σ_2 و N_2 على الترتيب .

وبنفس الطريقة ، فإن حدود الثقة للفروق بين النسب فى مجتمعين ، حيث المجتمعات غير محدودة ، تعطى كما يلى :

$$P_1 - P_2 \pm z_c\sigma_{P_1-P_2} = P_1 - P_2 \pm z_c\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{N_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{N_2}} \quad (٨)$$

حيث P_1 و P_2 هى نسب العينتين ، N_2 و N_1 حجم العينتين المسحوبتين من المجتمعين ، p_2 و p_1 هى النسب فى المجتمعين (مقدرة بالنسب P_2 و P_1) .

فترة الثقة للانحرافات المعيارية :

حدود الثقة للانحراف المعيارى σ لمجتمع يتوزع حسب التوزيع الطبيعى كما هى مقدرة من عينة انحرافها المعيارى s ، تعطى كما يلى :

$$s \pm z_c \sigma_s = s \pm z_c \frac{\sigma}{\sqrt{2N}} \qquad (٩)$$

باستخدام الجدول ٨-١ صفحة (٢٣٠) . لحساب حدود الثقة هذه تستخدم s أو S كتقدير لـ σ .

الخطا المحتمل :

حدود الثقة 50 % لمعالم المجتمع المقابلة للاحصائية S تعطى بالصورة $S \pm 0.6745\sigma_S$. الكية $0.6745\sigma_S$ تعرف بأنها الخطأ المحتمل للتقدير .

مســـائل محلولة

للتقديرات غير المتحيزة والكفؤ :

٩-١ أعط أمثلة لمقدرات (أو تقديرات) تكون (ا) غير متحيزة وكفوءا (ب) غير متحيزة وغير كفوء ، (ج) متحيزة وغير كفوء .

الحــل :

(ا) متوسط العينة $\overline{X}$ وتباين العينة المعدل $\hat{s}^2 = \frac{N}{N-1}s^2$ مثالان لهذه الحالة .

(ب) وسيط العينة واحصائية العينة $\frac{1}{2}(Q_1 + Q_3)$ حيث Q_1 الربيع الأدنى و Q_3 الربيع الأعلى للعينة مثالان لهذه الحالة . كلا الاحصائيتين تقديرات غير متحيزة لمتوسط المجتمع ، حيث أن متوسط توزيع المعاينة لهما هو متوسط المجتمع .

(ج) الانحراف المعيارى للعينة s ، الانحراف المعيارى المعدل $\hat{s}$ ، الانحراف المتوسط ، نصف المدى الربيعى أربعة أمثلة لهذه الحالة .

٩-٢ عينة من خمسة قياسات لقطر جسم كروى سجلت بواسطة عالم كالآتى :

6.33 ، 6.37 ، 6.36 ، 6.37 ، 6.37 mm

أوجد تقديرات غير متحيزة وكفوء (ا) المتوسط الحقيقى (ب) التباين الحقيقى .

الحـــل :

(ا) التقدير غير المتحيز والكفوء للمتوسط الحقيقى (متوسط المجتمع) =

$$= \bar{X} = \frac{\Sigma X}{N} = \frac{6{\cdot}33 + 6{\cdot}37 + 6{\cdot}36 + 6{\cdot}32 + 6{\cdot}37}{5} = 6{\cdot}35 \text{ mm}$$

(ب) التقدير غير المتحيز والكفوء للتباين الحقيقى (تباين المجتمع) =

$$= \hat{s}^2 = \frac{N}{N-1} s^2 = \frac{\Sigma(X - \bar{X})^2}{N-1}$$

$$= \frac{(6{\cdot}33 - 6{\cdot}35)^2 + (6{\cdot}37 - 6{\cdot}35)^2 + (6{\cdot}36 - 6{\cdot}35)^2 + (6{\cdot}32 - 6{\cdot}35)^2 + (6{\cdot}37 - 6{\cdot}35)^2}{5 - 1}$$

$$= 0{\cdot}000\,55 \text{ mm}^2$$

لاحظ أن $\hat{s} = \sqrt{0{\cdot}000\,55} = 0{\cdot}023$ هو تقدير للانحراف المعيارى الحقيقى ولكن هذا التقدير ليس غير متحيز ولاكفوء .

٩-٣ افترض أن أوزان المائة طالب فى جامعة XYZ تمثل عينة عشوائية للأوزان من مجموع طلبة الكلية البالغ عددهم 1546 فى هذه الجامعة . أوجـد تقديرات غير متحيزة وكفوء (ا) للوسط الحقيقى (ب) التباين الحقيقى .

الحـــل :

(ا) من المسألة ٣-٢٢ الفصل الثالث :

التقدير غير المتحيز والكفوء للوسط الحقيقى للأوزان $\bar{X} = 67.45$ kg .

(ب) من المسألة ٤ - ١٧ الفصل الرابع :

التقدير غير المتحيز والكفوء للتباين الحقيقى - $\hat{s}^2 = \frac{N}{N-1} s^2 = \frac{100}{99} (8{\cdot}5275) = 8{\cdot}6136$

بهذا فإن $\hat{s} = \sqrt{8{\cdot}6136} = 2{\cdot}93$ لاحظ أنه بما أن N كبيرة فإنه لا يوجد فرق أساسى بين s^2 و $\hat{s}^2$ أو بين s و $\hat{s}$

لاحظ أننا لم نستخدم معامل شبرد للتصحيح فى حالة التجميع . ولأخذ هذا فى الاعتبار فيجب أن نأخذ $s = 2.79$ فى الصيغ أعلاه (أنظر المسألة ٤-٢١ ، الفصل الرابع) .

٩-٤ أوجد تقديرا غير متحيز وكفوءا للوسط الحقيقى لأقطار الجسم الكروى فى المسألة ٩-٢ .

الحـــل :

الوسيط هو مثال لتقدير غير متحيز وغير كفوء لمتوسط المجتمع . وسيط الخمس قياسات مرتبة حسب قيمها هو 6.36 .

تقدير فترات الثقة لأوساط المجتمع :

٩–٥ أوجد (ا) 95 % (ب) 99 % فترات ثقة لتقدير متوسط أوزان الطلبة فى جامعة XYZ بالمسألة ٩–٣ .

الحـــل :

(ا) الـ 95 % حدود الثقة هى $\bar{X} \pm 1{\cdot}96\sigma/\sqrt{N}$

باستخدام $\bar{X} = 67.45$ kg ، $\hat{s} = 2.93$ kg كتقدير لـ σ (أنظر المسألة ٩–٣) ، حدود الثقة هى $(67.45 \pm 1.96\,(2.93/\sqrt{100})$ أو 67.45 ± 0.57kg وبهذا فإن الـ 95 % فترة ثقة لمتوسط المجتمع μ هى 66.88 إلى 68.02 kg ، والتى يمكن التعبير عنها كالآتى $66.88 < \mu < 68.02$.

وبهذا يمكن القول بأن احتمال أن يقع متوسط المجتمع بين 66.88 و 68.02 kg هو حوالى 95 % أو 0.95 وبالرمز نكتب .

$\Pr\{66.88 < \mu < 68.02\} = 0.95$. وهذا يساوى القول بأننا 95 % واثقين بأن متوسط المجتمع (أو المتوسط الحقيقى) يقع بين 66.88 و 68.02 kg .

(ب) الـ 99 % حدود الثقة هى $\bar{X} \pm 2{\cdot}58\sigma/\sqrt{N} = \bar{X} \pm 2{\cdot}58\hat{s}/\sqrt{N} = 67{\cdot}45 \pm 2{\cdot}58(2{\cdot}93/\sqrt{100}) = 67{\cdot}45 \pm 0{\cdot}76$ kg

وبهذا فإن الـ 99 % فترة ثقة لمتوسط المجتمع μ هى من 66.69 إلى 68.21 kg ، والتى يمكن التعبير عنها بـ $66.69 < \mu < 68.21$.

للحصول على فترات الثقة السابقة ، فإننا افترضنا أن المجتمع غير محدود أو على درجة من الكبر بحيث يمكن أن نعتبره مثل حالة المعاينة مع الارجاع . للمجتمعات المحدودة حيث المعاينة بدون ارجاع ، يجب أن نستخدم $\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\sqrt{\frac{N_p - N}{N_p - 1}}$ بدلا من $\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$. ولكن يمكن اعتبار المعامل

$\sqrt{\frac{N_p - N}{N_p - 1}} = \sqrt{\frac{1546 - 100}{1546 - 1}} = 0{\cdot}967$ يساوى أساسا 1.0 ، بحيث لا تكون هناك حاجة لاستخدامه . أما إذا استخدم فإن حدود الثقة أعلاه ستصير 67.45 ± 0.56 ، 67.45 ± 0.73 kg على الترتيب .

٩–٦ قراءات اوزان عينة عشوائية حجمها 200 من رولمان البلى مصنوعة فى آلة معينة خلال أسبوع واحد أظهرت متوسط $0.824\,N$ وانحرافا معياريا $0.042\,N$. أوجد (ا) 95 % (ب) 99 % حدود ثقة لمتوسط الوزن لجميع رولمان البلى .

الحـــل :

(ا) الـ 95 % حدود ثقة هى

$\bar{X} \pm 1{\cdot}96\sigma/\sqrt{N} = \bar{X} \pm 1{\cdot}96\hat{s}/\sqrt{N} = 0{\cdot}824 \pm 1{\cdot}96(0{\cdot}042/\sqrt{200}) = 0{\cdot}824 \pm 0{\cdot}0058$ N, or $0{\cdot}824 \pm 0{\cdot}006$ N.

(ب) الـ 99 % حدود ثقة هى

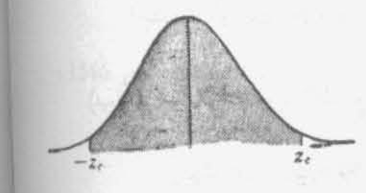
$$\bar{X} \pm 2{\cdot}58\sigma/\sqrt{N} = \bar{X} \pm 2{\cdot}58\hat{s}/\sqrt{N} = 0{\cdot}824 \pm 2{\cdot}58(0{\cdot}042/\sqrt{200}) = 0{\cdot}824 \pm 0{\cdot}0077 \text{ N, or } 0{\cdot}824 \pm 0{\cdot}008 \text{ N.}$$

لاحظ أننا افترضنا أن الانحراف المعيارى المذكور هوالانحراف المعيارى المعدل $\hat{s}$. أما إذا كان الانحراف المعيارى هــو s ، فإننا سنستخدم $\hat{s} = \sqrt{N/(N-1)}s = \sqrt{200/199}\,s$ والتى يمكن أن نعتبرها مثل s لجميع الأغراض العملية . وبشكل عام ، لقيم $N \geqq 30$ يمكن أن نفترض s و $\hat{s}$ متساويتين من الناحية العملية .

٩–٧ أوجــد (ا) 98 % (ب) 90 % (ج) 99.73 % حدود ثقة لمتوسط وزن رولمان البلى فى المسألة ٩–٦ .

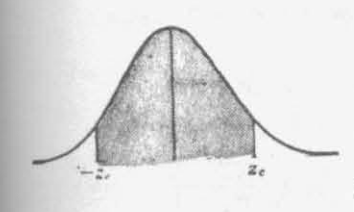
الحــل :

(ا) اعتبر $z = z_c$ بحيث تكون المساحة تحت المنحنى الطبيعى إلى اليمين هى 1 % . وبالتماثل المساحة إلى يسار $z = -z_c$ هى أيضا 1 % بحيث تكون المساحة المظللة هى 98 % من المساحة الكلية .



وبما أن المساحة الكلية تحت المنحنى تساوى واحد فإن المساحة من $z = 0$ إلى $z = z_c$ هى 0.49 ، وبذلك فإن $z_c = 2.33$ وبهذا فإن حدود الثقة 98 % هى

$$\bar{X} \pm 2{\cdot}33\sigma/\sqrt{N} = 0{\cdot}824 \pm 2{\cdot}33 \quad (0{\cdot}042/\sqrt{200}) = 0{\cdot}824 \pm 0{\cdot}0069 \text{ N.}$$



(ب) المطلوب هــو z_c بحيث تكون المساحة من $z = 0$ إلى $z = z_c$ هى 0.45 ، إذن $z_c = 1.645$

وبهذا فإن حدود الثقة 90 % هى

$$\bar{X} \pm 1{\cdot}645\sigma/\sqrt{N} = 0{\cdot}824 \pm 1{\cdot}645(0{\cdot}042/\sqrt{200}) = 0{\cdot}824 \pm 0{\cdot}0049 \text{ N.}$$

(ج) حدود الثقة 99.73 % هى

$$\bar{X} \pm 3\sigma/\sqrt{N} = 0{\cdot}824 \pm 3(0{\cdot}042/\sqrt{200}) = 0{\cdot}824 \pm 0{\cdot}0089 \text{ N.}$$

٩–٨ لقياس زمن رد الفعل ، قدر عالم سيكلوجى الانحراف المعيارى بـ 0.05 ثانية . ماهو حجم العينة من القياسات بحيث تكون (ا) 95 % ، (ب) 99 % واثقين أن خطأ تقديره لن يتجاوز 0.01 ثانية ؟

الحــل :

(ا) حدود الثقة 95 % هى $\bar{X} \pm 1.96\,\sigma/\sqrt{N}$ وخطأ التقدير هــو $1.96\,\sigma/\sqrt{N}$. إذا أخذنا $\sigma = s = 0.05$ ثانية ، فإن هذا الخطأ سيساوى 0.01 ثانية إذا كانت $(1.96)\,(0.05)/\sqrt{N} = 0.01$ أى $\sqrt{N} = (1.96)\,(0.05)/0.01$ أو $N = 96.04$. وبهذا فإننا سنكون على ثقة بدرجة 95 % بأن خطأ التقدير سيكون أقل من 0.01 إذا كانت N تساوى 97 أو أكبر .

طريقة اخرى : $\frac{(1\cdot96)(0\cdot05)}{\sqrt{N}} \leq 0\cdot01$ if $\frac{\sqrt{N}}{(1\cdot96)(0\cdot05)} \geq \frac{1}{0\cdot01}$ or $\sqrt{N} \geq \frac{(1\cdot96)(0\cdot05)}{0\cdot01} = 9\cdot8.$

إذن $N \geqq 96.04$ أو $N \geqq 97$.

(ب) الـ 99 % حدود الثقة هى $\bar{X} \pm 2.58\sigma/\sqrt{N}$. إذن $(2.58)(0.05)/\sqrt{N} = 0.01$ أو $N = 166.4$
وبهذا سنكون على ثقة بدرجة 99 % بأن خطأ التقدير سيكون أقل من 0.01 إذا كانت N تساوى 167 أو أكبر .

٩-٩ عينة عشوائية من 50 من درجات الرياضة مسحوبة من 200 درجة أظهرت متوسطا 75 وانحرافا معياريا 10 .

(١) ما هى الـ 95 % حدود الثقة لتقديرات وسط الـ 200 درجة

(ب) بأى درجة ثقة يمكن القول بأن متوسط الـ 200 درجة هو هو 75 ± 1 ؟

الحل :

(١) بما أن حجم المجتمع ليس كبيرا بالمقارنة بحجم العينة ، فيجب أن نعدل لمراعاة ذلك .

وبهذا فإن الـ 95 % حدود ثقة هى

$$\bar{X} \pm 1\cdot96\sigma_{\bar{X}} = \bar{X} \pm 1\cdot96 \ \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\sqrt{\frac{N_p - N}{N_p - 1}} = 75 \pm 1\cdot96 \ \frac{(10)}{\sqrt{50}}\sqrt{\frac{200-50}{200-1}} = 75 \pm 2\cdot4$$

(ب) حدود الثقة يمكن أن تمثل بما يلى :

$$\bar{X} = z_c\sigma_{\bar{X}} = \bar{X} \pm z_c \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\sqrt{\frac{N_p - N}{N_p - 1}} = 75 \pm z_c \frac{10}{\sqrt{50}}\sqrt{\frac{200-50}{200-1}} = 75 \pm 1\cdot23 z_c$$

وبما أن هذه يجب أن تساوى 75 ± 1 ، فإن $1.23z_c = 1$ أو $z_c = 0.81$. المساحة تحت المنحنى الطبيعى من $z = 0$ إلى $z = 0.81$ هى 0.2910 ، وبهذا فإن درجة الثقة المطلوبة هى

$2(0.2910) = 0.582$ أو 58.2 %

تقديرات فترات الثقة للنسب :

٩-١٠ فى استطلاع للرأى العام بالعينة سحبت عينة عشوائية حجمها 100 من جميع الناخبين فى حى معين حيث دلت على أن 55 % منهم فى صالح مرشح معين . أوجد (١) 95 % (ب) 99 % (جـ) 99.73 % حدود ثقة النسبة بين جميع الناخبين المؤيدين لهذا المرشح .

الحـــل :

(ا) 95% حدود الثقة للنسبة p للمجتمع هى :

$$P \pm 1.96\sigma_p = P \pm 1.96\sqrt{p(1-p)/N} = 0.55 \pm 1.96\sqrt{(0.55)(0.45)/100} = 0.55 \pm 0.10$$

حيث استخدمنا النسبة P لتقدير p .

(ب) 99% حدود ثقة للنسبة p هى : $0.55 \pm 2.58\sqrt{(0.55)(0.45)/100} = 0.55 \pm 0.13$

(جـ) 99.73% حدود ثقة للنسبة p هى : $0.55 \pm 3\sqrt{(0.55)(0.45)/100} = 0.55 \pm 0.15$.

للحصول على طريقة أكثر دقة لحل هذه المسألة ، أنظر المسألة ٩–١٢ .

٩–١١ ما هو حجم العينة التى يجب أخذها من الناخبين فى المسألة ٩–١٠ بحيث تكون (ا) 95% (ب) 99.73% ، واثقين من أن المرشح المعطى سوف يختار من مرشحين اثنين .

الحـــل :

حدود الثقة لـ p هى : $P \pm z_c\sqrt{p(1-p)/N} = 0.55 \pm z_c\sqrt{(0.55)(0.45)/N} = 0.55 \pm 0.50z_c/\sqrt{N}$

حيث استخدمنا التقدير $P = p = 0.55$ على أساس بيانات المسألة ٩–١٠ وبما أن المرشح سينجح فقط إذا حصل على أكثر من 50 % من أصوات المجتمع ، فإننا نطلب أن تكون $0.50z_c/\sqrt{N}$ أقل من 0.05 .

(ا) لـ 95% ثقة ، 0.05 $0.50z_c/\sqrt{N} = 0.50(1.96)/\sqrt{N}$ ، عندما تكون $N = 384.2$ بهذا فإن N يجب أن تساوى 385 على الأقل .

(ب) لـ 99.73 % ثقة ، 0.05 $0.50(3)/\sqrt{N}$ $0.50z_c/\sqrt{N}$ ، عندما تكون $N = 900$ بهذا فإن N يجب أن تساوى 901 على الأقل .

طريقة اخـــرى :

$1.50/\sqrt{N} < 0.05$ عندما تكون $\sqrt{N}/1.50 > 1/0.05$ أو $\sqrt{N} > 1.50/0.05$.

إذن $\sqrt{N} > 30$ أو $N > 900$ ، بحيث N يجب أن تكون 901 على الأقل .

٩–١٢ (ا) إذا كانت P هى نسبة النجاح المشاهدة فى عينة حجمها N ، وضح أن حدود الثقة لتقدير نسبة النجاح فى المجتمع p عند مستوى معنوية محددة بـ z_c يعطى كما يلى .

$$p = \frac{P + \dfrac{z_c^2}{2N} \pm z_c\sqrt{\dfrac{P(1-P)}{N} + \dfrac{z_c^2}{4N^2}}}{1 + \dfrac{z_c^2}{N}}$$

(ب) استخدم الصيغة التى حصلنا عليها فى (ا) لحصول على 99.73 % حدود ثقة للمسألة ٩-١٠ .

(جـ) وضح أنه لقيم N الكبيرة فإن الصيغة فى (ا) تختصر إلى $p = P \pm z_c\sqrt{P(1-P)/N}$ ، كما اتبع فى المسألة ٩-١٠ .

الحــل :

(ا) نسبة العينة P بوحدات معيارية = $\frac{P-p}{\sigma_P} = \frac{P-p}{\sqrt{p(1-p)/N}}$

أكبر قيمة وأصغر قيمة لهذا المتغير المعيارى هى $\pm z_c$ حيث z_c تحدد مستوى الثقة . عند هذه القيم المتطرفة يجب تبعا لذلك أن نحصل على

$$P - p = \pm z_c\sqrt{p(1-p)/N}$$

بتربيع الطرفين

$$P^2 - 2pP + p^2 = z_c^2 p(1-p)/N$$

بضرب الطرفين فى N والتبسيط ، نجــد أن

$$(N + z_c^2)p^2 - (2NP + z_c^2)\,p + NP^2 = 0$$

إذا كانت $a = N + z_c^2, b = -(2NP + z_c^2)$ و $c = NP^2$ ، تصبح هذه المعادلة $ap^2 + bp + c = 0$ والتى حلها بالنسبة لـ p تعطى بالصيغة من الدرجة الثانية .

$$p = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2NP + z_c^2 \pm \sqrt{(2NP + z_c^2)^2 - 4(N + z_c^2)(NP^2)}}{2(N + z_c^2)}$$
$$= \frac{2NP + z_c^2 \pm z_c\sqrt{4NP(1-P) + z_c^2}}{2(N + z_c^2)}$$

بقسمة البسط والمقام على $2N$ ، تصبح الصيغة

$$p = \frac{P + \frac{z_c^2}{2N} \pm z_c\sqrt{\frac{P(1-P)}{N} + \frac{z_c^2}{4N^2}}}{1 + \frac{z_c^2}{N}}$$

(ب) لـ 99.73 % حدود ثقة ، $z_c = 3$. إذن باستخدام $p = 0.55$ و $N = 100$ فى الصيغة التى حصلنا عليها فى (ا) نجــد أن $p = 0.40$ و $P = 0.69$ ، وهذا يتفق مع نتيجة المسألة ٩-١٠ (جـ) .

(جـ) إذا كانت N كبيرة ، فإن $z_c^2/(2N), z_c^2/(4N^2)$ and z_c^2/N تكون قيمة صغيرة يمكن اهمالها ويحل بدلا منها الصفر . بحيث نحصل على النتيجة المطلوبة

٩-١٣ فى 40 رمية لعملة ، حصلنا على 24 صورة . أوجد (ا) 95 % (ب) 99.73 % حدود ثقة لنسبة الصور التى يمكن الحصول عليها فى عدد غير محدود من رميات العملة .

الحـل :

(ا) عند المستوى 95 % ، $z_c = 1.96$ بالتعويض عن $P = 24/40 = 0.6$ و $N = 40$ فى صيغة المسألة ٩-١٢ (ا) ، نجد أن $p = 0.45$ و $p = 0.74$ بحيث يمكن أن نقول بدرجة ثقة 95 % أن p تقع بين 0.45 و 0.74 .

باستخدام الصيغة التقريبية $p = P \pm z_c\sqrt{P(1-P)/N}$ ، نجد أن $p = 0.60 \pm 0.15$ وهذه تؤدى إلى الحصول على الفترة من 0.45 إلى 0.75 .

(ب) عند المستوى 99.73 % ، $z_c = 3$. باستخدام صيغة المسألة ٩-١٢ (ا) نجد أن $p = 0.37$ و $p = 0.79$.

باستخدام الصيغة التقريبية $p \quad P \pm z_c\sqrt{P(1-P)/N}$ ، نجـد أن $p = 0.60 \pm 0.23$ وهذة تؤدى إلى الحصول على الفترة من 0.37 إلى 0.83 .

فترات الثقة للفروق والمجتمع :

٩-١٤ عينة من 150 لمبات إضاءة من الصنف A كان متوسط عمرها الانتاجى هو 1400 ساعة وانحرافها الميارى 120 . عينة من لمبات الاضاءة من الصنف B مكونة من 200 لمبة كان متوسط عمرها الانتاجى 1200 ساعة وانحرافها المعيارى 80 ساعة . أوجد (ا) 95 % (ب) 99 % حدود ثقة للفرق بين متوسط العمر الانتاجى لمجتمعى الأصناف A و B .

الحـل :

حدود الثقة للفرق بين المتوسطين للصنفين A و B تعطى بما يلى :

$$\bar{X}_A - \bar{X}_B \pm z_c\sqrt{\sigma_A^2/N_A + \sigma_B^2/N_B}$$

(ا) الـ 95 % حدود ثقة هى $1400 - 1200 \pm 1{\cdot}96\sqrt{(120)^2/150 + (80)^2/100} = 200 \pm 24{\cdot}8$

أى أننا نكون 95 % واثقين بأن الفرق بين متوسطات المجتمعين سوف يقع بين 175 h و 225 h .

(ب) الـ 99 ٪ حدود الثقة هى $1400 \quad 1200 \pm 2{\cdot}58\sqrt{(120)^2/150 - (80)^2/100} = 200 \pm 32{\cdot}6$

أى أننا نكون 99 % واثقين بأن الفرق بين متوسطات المجتمعين تقع بين 167 h و 233 h .

٩–١٥ فى عينة مكونة من 400 من البالغين و 600 من المراهقين الذين شاهدوا برنامجا تلفزيونيا معيناً ، ذكر 100 من البالغين و 300 من المراهقين أنهم يفضلون هذا البرنامج . أوجد (ا) 95 % (ب) 99 % حدود ثقة للفرق بين نسبة كل البالغين و نسبة كل المراهقين الذين شاهدوا هذا البرنامج ويفضلونه .

الحــل :

حدود الثقة للفروق بين نسب المجموعتين تعطى كما يلى :

$$P_1 - P_2 \pm z_c\sqrt{p_1q_1/N_1 - p_2q_2/N_2}$$

حيث الدليل 1 يرمز للمراهقين والدليل 2 للبالغين . هنا $P_1 = 300/600 = 0.50$ و $P_2 = 100/400 = 0.25$ هى نسب المراهقين ونسب البالغين الذين يفضلون البرنامج على الترتيب .

(ا) 95 % حدود ثقة : $0{\cdot}50 - 0{\cdot}25 \pm 1{\cdot}96\sqrt{(0{\cdot}50)(0{\cdot}50)\ 600 + (0{\cdot}25)(0{\cdot}75)\ 400} = 0{\cdot}25 \pm 0{\cdot}06$

أى أننا نكون 95 % واثقين أن الفرق الحقيقى للنسب يقع بين 0.19 و 0.31

(ب) 99 % حدود ثقة : $0{\cdot}50 - 0{\cdot}25 \pm 2{\cdot}58\sqrt{(0{\cdot}50)(0{\cdot}50)\ 600 + (0{\cdot}25)(0{\cdot}75)\ 400} = 0{\cdot}25 \pm 0{\cdot}08$

أى أننا نكون 99 % واثقين أن الفرق الحقيقى يقع بين 0.17 و 0.33 .

٩–١٦ متوسط .e.m.f لبطارية من إنتاج احدى الشركات هــو 45.1 فولت وانحرافها المعيارى هــو 0.04 فولت .

إذا أوصلت أربعة من هذه البطاريات على التوالى ، أوجد (ا) 95 % (ب) 99 % (جـ) 99.73% (د) 50 % . حدود ثقة لمجموع الـ .e.m.f

الحــل :

إذا كانت E_4 و E_3 و E_2 و E_1 تمثل الـ e.m.f.'s للبطاريات الأربع ، فإن

$$\mu_{E_1-E_2+E_3+E_4} = \mu_{E_1} + \mu_{E_2} + \mu_{E_3} + \mu_{E_4} \quad \text{and} \quad \sigma_{E_1-E_2+E_3+E_4} \quad \sqrt{\sigma_{E_1}^2 + \sigma_{E_2}^2 + \sigma_{E_3}^2 + \sigma_{E_4}^2}$$

وبما أن $\mu_{E_1} = \mu_{E_2} = \mu_{E_3} = \mu_{E_4} = 45{\cdot}1$ volts and $\sigma_{E_1} = \sigma_{E_2} = \sigma_{E_3} = \sigma_{E_4} = 0{\cdot}04$ volts.

إذن

$$\mu_{E_1+E_2+E_3+E_4} \quad 4(45{\cdot}1) = 180{\cdot}4 \quad \text{and} \quad \sigma_{E_1+E_2+E_3+E_4} = \sqrt{4(0{\cdot}04)^2} = 0{\cdot}08$$

(ا) 95 % حدود ثقة هى : $180{\cdot}4 \pm 0{\cdot}16$ volts $\quad 180{\cdot}4 \pm 1{\cdot}96(0{\cdot}08)$

(ب) 99 % حدود ثقة هى : $180{\cdot}4 \pm 0{\cdot}21$ volts $\quad 180{\cdot}4 \pm 2{\cdot}58(0{\cdot}08)$

(جـ) 99.73 % حدود ثقة هى : $180{\cdot}4 \pm 0{\cdot}24$ volts $\quad 180{\cdot}4 \pm 3(0{\cdot}08)$

(د) 50 % حدود ثقة هى : $180{\cdot}4 \pm 0{\cdot}6745(0{\cdot}08) = 180{\cdot}4 \pm 0{\cdot}054$ volts

القيمة 0.054 ڤولت تسمى بالخطأ المحتمل .

فترات الثقة للانحرافات المعيارية :

٩–١٧ الانحراف المعيارى للعمر الانتاجى لعينة من 200 لمبة كهربائية كان 100 ساعة . أوجد (ا) 95 % (ب) 99 % حدود ثقة للانحراف المعيارى لجميع اللمبات الكهربائية من نفس النوع .

الحـــل :

حدود الثقة للانحراف المعيارى للمجتمع σ يعطى بالصورة $s \pm z_c\sigma/\sqrt{2N}$ حيث z_c تعبر عن مستوى الثقة . تستخدم الانحراف المعيارى للعينة لتقدير σ .

(ا) الـ 95 % حدود ثقة هى : $100 \pm 1{\cdot}96(100)/\sqrt{400} = 100 \pm 9{\cdot}8$

أى أننا نكون 95 % واثقين بأن الانحراف المعيارى للمجتمع سوف يقع بين 90.2 h و 109.8 h .

(ب) الـ 99 % حدود ثقة هى : $100 \pm 2{\cdot}58(100)/\sqrt{400} = 100 \pm 12{\cdot}9$

أى أننا نكون 99 % واثقين أن الانحراف المعيارى للمجتمع سوف يقع بين 87.1 h و 112.9 h

٩–١٨ ما هو حجم العينة من لمبات الاضاءة فى المسألة السابقة التى يجب أن نأخذها بحيث نكون 99.73 % واثقين بان الانحراف المعيارى الحقيقى لن يختلف عن الانحراف المعيارى للعينة بأكثر من (ا) 5 % (ب) 10 % ؟

الحـــل :

99.73 % حدود ثقة لـ σ هى $s \pm 3\sigma/\sqrt{2N} = s \pm 3s/\sqrt{2N}$ باستخدام s كتقدير لـ σ .

وبهذا فإن نسبة الخطأ فى الانحراف المعيارى = $\dfrac{3s/\sqrt{2N}}{s} = \dfrac{300}{\sqrt{2N}}\%$

(ا) إذا كانت $300/\sqrt{2N} = 5$ إذن $N = 1800$. وبهذا فإن حجم العينة يجب أن يكون 1800 أو أكثر .

(ب) إذا كانت $300/\sqrt{2N} = 10$ ، إذن $N = 450$. وبهذا فإن حجم العينة يجب أن يكون 450 أو أكثر .

الخطأ المحتمل :

٩–١٩ قيس الفولت لـ 50 بطارية من نفس النوع لها متوسط 18.0 فولت وانحراف معيارى 0.5 فولت . أوجد (ا) الخطأ المحتمل للوسط . (ب) 50 % حدود ثقة .

الحـل :

(ا) الخطأ المحتمل للوسط = $0.6745 \frac{s}{\sqrt{N-1}} = 0.6745 \frac{\hat{s}}{\sqrt{N}} = 0.6745 \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = 0.6745\sigma_{\bar{x}} =$

$$= 0.6745(0.5)/\sqrt{49}) = 0.048 \text{ volts}$$

لاحظ أنه لو حسبنا الانحراف المعيارى 0.5 فولت بصيغة $\hat{s}$ ، فإن الخطأ المحتمل هو $0.048 = 0.6745\,(0.5/\sqrt{50})$ كذلك ؛ وبهذا يمكن استخدام أى التقديرين إذا كانت N كبيرة بدرجة كافية .

(ب) 50 % حدود ثقة هى 18 ± 0.048 فولت .

٩–٢٠ سجلت قياسات قيمتها 216.480 جرام ، بخطأ محتمل 0.272 جرام ما هى الـ 95 % حدود ثقة لهذه القياسات ؟

الحـل :

الخطأ المحتمل = $0.272/0.6745 = 0.272 = 0.6745\sigma_{\bar{x}}, \text{ or } \sigma_{\bar{x}} =$

95 % حدود ثقة = $\bar{X} \pm 1.96\sigma_{\bar{x}} = 216.480 \pm 1.96(0.272/0.6745) = 216.480 \pm 0.790$ جرام

مسائل اضافية

التقديرات غير المتحيزة والكفؤ :

٩–٢١ قياسات لعينة من الأوزان حددت كالآتى 8.3, 10.6, 9.7, 8.8, 10.2 and 9.4 kg

أوجد تقديرات غير متحيزة وكفوء لما يلى (ا) متوسط المجتمع . (ب) تباين المجتمع . (جـ) قارن بين الانحراف المعيارى للعينة والانحراف المعيارى المقدر للمجتمع .

ج : (ا) 9.5 kg (ب) 0.74 kg^2 (جـ) 0.78

٩–٢٢ عينة من 10 لمبات تلفزيون من إنتاج احدى الشركات كان متوسط عمرها الانتاجى 1200 h وانحرافها المعيارى 100 h قدر (ا) المتوسط (ب) الانحراف المعيارى لمجتمع جميع لمبات التلفزيون المنتجة بهذه الشركة .

ج : (ا) 1200 h (ب) 105.4 h

٩-٢٣ (ا) حل المسألة ٩-٢٢ إذا كانت نفس النتيجة التى حصلنا عليها للأعداد 100 و 50 و 30 لمبة تلفزيون .

(ب) ما هو استنتاجك بخصوص العلاقة بين الانحراف المعيارى للعينة وتقديرات الانحرافات المعيارية للمجتمع لأحجام مختلفة للعينة ؟

ج : (ا) تقديرات الانحرافات المعيارية للمجتمع لعينات أحجامها 100 و 50 و 30 لمبة هى على الترتيب 100.5 h ، 101.0 ، 101.7 . تقديرات متوسطات المجتمع هى 1200 h فى جميع الحالات .

تقدير فترات الثقة لأوساط المجتمع :

٩-٢٤ إذا كان الوسط الحسابى لحمل الأعظم المنقول خلال 60 كابل (أنظر المسألة ٣-٥٩ ، الفصل الثالث) هو 11.09 kw والانحراف المعيارى هو 0.73 kw . أوجد (ا) 95 % (ب) 99 % حدود ثقة لوسط الحمل الأعظم لجميع الكابلات المنتجة بواسطة الشركة .

ج : (ا) 11·09 ± 0·18 kN (ب) 11·09 ± 0·24 kN

٩-٢٥ الوسط الحسابى لأقطار عينة من 250 مسمار برشام منتجة بواسطة شركة هو 7.2642 mm وانحرافها المعيارى 0.0058 mm (أنظر المسألة ٣-٦١ ، الفصل الثالث) . أوجد (ا) 99 % (ب) 98 % (جـ) 95 % (د) 90 % حدود ثقة لوسط الحسابى لأقطار جميع المسامير البرشام المنتجة بواسطة هذه الشركة .

ج : (ا) 7.2642 ± 0.00095 mm (ب) 7.2642 ± 0.00085 mm .

(جـ) 7.2642 ± 0.00072 mm (د) 7.2642 ± 0.000 60 mm

٩-٢٦ أوجد (ا) الـ 50 % حدود ثقة و (ب) الخطأ المحتمل لمتوسط الأقطار فى المسألة ٩-٢٥ .

ج : (ا) 7.2642 ± 0.00025 mm (ب) 0.000 25 mm

٩-٢٧ إذا كان الانحراف المعيارى للعمر الانتاجى للمبات التلفزيون يقدر بـ 100 ساعة ، ماهو حجم العينة التى يجب أن نأخذها بحيث نكون (ا) 95 % (ب) 90 % (جـ) 99 % (د) 99.73 % واثقين من أن الخطأ من تقدير متوسط العمر الانتاجى لن يتجاوز 20 ساعة .

ج : (ا) على الأقل 96 (ب) على الأقل 68

(جـ) على الأقل 167 (د) على الأقل 225

٩-٢٨ ما هو حجم العينة فى المسألة السابقة إذا كان الخطأ فى تقدير متوسط العمر الانتاجى يجب ألا يتجاوز 10 ساعات ؟

ج : (ا) على الأقل 384 (ب) على الأقل 271

(جـ) على الأقل 666 (د) على الأقل 900

٩–٢٩ شركة بها 500 كابل . تم اختبار 40 كابل أختيرت عشوائيا فأظهرت أن متوسط قوة المقاومة الكسر $2400\ N$ وانحراف معيارى $150\ N$.

(أ) ما هي الـ 95% و الـ 99% حدود ثقة لتقدير متوسط المقاومة الكسر بالنسبة الكابلات الباقية والتي عددها 4600 كابل ؟

(ب) ما هى درجة الثقة التى يمكن أن نقول بها أن متوسط المقاومة الكسر بالنسبة الكابلات الـ 460 الباقية هو $2400 \pm 35\ N$.

ج : (أ) $2400 \pm 45\ N,\ 2400 \pm 59\ N$ (ب) 87.6 %

تقدير فترات الثقة للنسب :

٩–٤٠ يحتوى وعاء على عدد غير معروف من البلى الأحمر والأبيض . عينة عشوائية من 60 من البلى اختيرت مع الارجاع من الوعاء أظهرت 70% من البلى الأحمر . أوجد (أ) 95% (ب) 99% (جـ) 99.73 % حدود ثقة للنسبة الفعلية للبلى الأحمر .

استخدم فى الحل كلا من الصيغة التقريبية والصيغة المضبوطة المستخدمة فى المسألة ٩–١٢ .

ج : (أ) $0.70 \pm 0.12,\ 0.69 \pm 0.11$ (ب) $0.70 \pm 0.15,\ 0.68 \pm 0.15$
(جـ) $0.70 \pm 0.18,\ 0.67 \pm 0.17$

٩–٣١ ما هو حجم العينة من البلى التى يجب أن يأخذها الشخص فى المسألة السابقة بحيث يكون (أ) 95% (ب) 99% (جـ) 99.73% على ثقة من أن النسبة الحقيقية لن تختلف عن نسبة العينة بأكثر من 5% ؟

ج : (أ) 323 على الأقل
(ب) 560 على الأقل
(جـ) 756 على الأقل .

٩–٣٢ من المعلوم أن نتيجة أحد الانتخابات سوف تظهر أصواتا متقاربة لكلا المرشحين . ما هو الحد الأدنى للأصوات التى يجب جمعها بحيث تكون (أ) 80% (ب) 90% (جـ) 95% (د) 99% واثقين من قرار ترجيح أحد المرشحين على الآخر ؟

ج : (أ) 16 400 (ب) 27100 (جـ) 38420 (د) 66600

فترات الثقة للفروق والمجموع :

٩–٣٣ فى مجموعتين متماثلتين من المرضى ، A و B تتكونان من 50 و 100 شخص على الترتيب ، المجموعة الأولى أعطيت نوعا جديدا من الحبوب المنومة والمجموعة الثانية أعطيت نوعا معروفا من الحبوب . المرضى من المجموعة A كان متوسط ساعات النوم هو 7.82 بانحراف معيارى 0.24 ساعة . المرضى من المجموعة B كان متوسط ساعات النوم هو 6.75 بانحراف معيارى 0.30 ساعة .

أوجـد (ا) 95 % (ب) 99 % حدود ثقة للفرق في متوسط ساعات النوم الناتجة من استخدام نوعي الحبوب المنومة .

ج : (ا) 1.07 ± 0.09 h (ب) 1.07 ± 0.12 h

٩–٣٤ عينة مكونة من 200 مسمار قلاووظ من إنتاج آلة كان بها 15 مسمار تالف، بينما عينة مكونة من 100 مسمار قلاووظ من إنتاج آلة أخرى كان بها 12 مسمار تالف . أوجد (ا) 95 % (ب) 99 % (جـ) 99.73 % حدود ثقة للفروق بين نسب المسامير التالفة في الآلتين ناقش النتائج التي حصلت عليها .

ج : (ا) 0.045 ± 0.073 (ب) 0.045 ± 0.097 (جـ) 0.045 ± 0.112

٩–٣٥ شركة تصنع رولمان البلي لها متوسط 0.638 kg وانحرافها المعياري 0.012 kg . أوجـد (ا) 95 % (ب) 99 % حدود ثقة لأوزان مجموعات يتكون كل منها من 100 من رولمان البلي .

ج : (ا) 63.8 ± 0.24 kg (ب) 63.8 ± 0.31 kg

فترات الثقة للانحرافات المعيارية :

٩–٣٦ الانحراف المعياري للمقاومة للكسر لـ 100 كابل تم اختيارها بواسطة الشركة كان 180 N . أوجد (ا) 95 % (ب) 99 % (جـ) 99.73 % حدود الثقة للانحراف المعياري لجميع الكابلات المنتجة بواسطة الشركة .

ج : (ا) 180 ± 24.9 N (ب) 180 ± 32.8 N (جـ) 180 ± 38.2 N

٩–٣٧ أوجد الخطأ المحتمل للانحراف المعياري في المسألة السابقة .

ج : 8.6 N

٩–٣٨ ما هو حجم العينة التي يجب سحبها بحيث يكون الشخص واثق (ا) 95 % (ب) 99 % (جـ) 99.73 % من أن الانحراف المعياري للمجتمع لن يختلف عن الانحراف المعياري للعينة بأكثر من 2 % ؟

ج : (ا) 4802 على الأقـل .

(ب) 8321 على الأقـل .

(جـ) 11250 على الأقـل .

الفصل العاشر

نظرية القرارات الاحصائية
واختبارات الفروض والمعنوية

القرارات الاحصائية :

فى كثير من المشاكل العملية يكون المطلوب هو اتخاذ قرارات تخص المجتمع وذلك بناء على بيانات مستمدة من العينة . مثل هذه القرارات تسمى قرارات احصائية . فعلى سبيل المثال ، قد نريد أن نقرر بناء على بيانات العينة ما إذا كان مصل جديد يؤثر بشكل حقيقى فى شفاء مرض معين ، وما إذا كانت طريقة تدريس معينة أحسن من طريقة أخرى ، وما إذا كانت عملة معينة متحيزة ، وهكذا .

الفروض الاحصائية . فرض العدم :

فى محاولة الوصول إلى قرار ، فن المفيد وضع فروض أو تخمينات عن المجتمعات موضوع الدراسة . مثل هذه الفروض ، والتى قد تكون صحيحة أو غير صحيحة ، تسمى بالفروض الاحصائية وبشكل عام هى تعبيرات عن التوزيعات الاحتمالية لهذه المجتمعات .

فى كثير من الأحيان نصيغ الفروض الاحصائية وهدفنا الوحيد هو رفضه أو ابطاله . على سبيل المثال ، إذا أردنا تقرير ما إذا كانت عملة معينة متحيزة فإننا نصيغ الفرض أن العملة غير متحيزة ، بمعنى ، $p = 0.5$ ، حيث p هو احتمال الصور . وبنفس الصورة ، إذا أردنا تقرير ما إذا كانت احدى الطرق أحسن من غيرها ، فإننا نصيغ الفرض بأنه لايوجد اختلاف بين الطرق (بمعنى ، أن أى اختلافات مشاهدة ترجع تقريبا إلى تقلبات المعاينة من نفس المجتمع) . مثل هذه الفروض تسمى فروض العدم ويرمز لها بالرمز H_0 .

أى فرض يختلف عن الفرض المعطى يسمى بالفرض البديل . على سبيل المثال ، إذا كان أحد الفروض هو $p = 0.5$ ، فإن الفروض البديلة هى $p > 0.5$ و $p \neq 0.5$ و $p = 0.7$. الفرض البديل لفرض العدم يرمز له بالرمز H_1 .

اختبارات الفروض والمعنوية :

إذا حصلنا تحت افتراض أن فرضا معينا صحيحا على بيانات مشاهدة من عينة عشوائية تختلف بشكل ملحوظ عما يتوقع تحت الفرض على أساس من العشوائية البحتة طبقا لنظرية المعاينة ، فإننا نقول أن الفروق المشاهدة معنوية وسنكون أكثر ميلا لرفض الفرض (أو على الأقل عدم قبوله على أساس الأدلة المعطاة) . على سبيل المثال ، إذا رميت عملة 20 مرة

ونتج عنها 16 صورة فإننا سنكون أكثر ميلا لرفض الفرض القائل أن العملة متوازنة ، على الرغم من أن هناك امكانية فى أن نكون على خطأ .

الطرق التى تمكننا من تقرير قبول أو رفض الفروض أو تحديد ما إذا كانت العينات المشاهدة تختلف معنويا عن النتائج المتوقعة تسمى باختبارات الفروض ، اختبارات المعنوية أو قواعد اتخاذ القرار .

الخطأ من النوع الأول والخطأ من النوع الثانى :

إذا رفضنا فرضا كان من الواجب قبوله ، فإننا نرتكب خطأ من النوع الأول . ومن الناحية الأخرى ، إذا قبلنا فرضا كان من الواجب رفضه ، فإننا نرتكب خطأ من النوع الثانى . وفى كلتا الحالتين فإن قرارا خاطئا يتخذ أو خطأ فى الحكم يقع .

وحتى تكون اختبارات الفروض أو قواعد اتخاذ القرارات جيدة ، فيجب أن تصمم بحيث تؤدى إلى التقليل من أخطاء القرار . ولكن هذا ليس بالأمر السهل ، حيث أنه لحجم عينة معين ، فإن محاولة انقاص أحد أنواع الخطأ يصاحبه بشكل عام زيادة فى النوع الآخر من الخطأ . ومن الناحية العملية فإن أحد أنواع الخطأ قد يكون أكثر خطورة من النوع الآخر ، وبهذا فإنه يجب الوصول إلى حل وسط لصالح تحديد الخطأ الأكثر خطورة . الطريقة الوحيدة للتقليل من نوعى الخطأ هو زيادة حجم العينة ، وقد يكون هذا ممكنا وقد لا يكون .

مستوى المعنوية :

فى اختبار فرض معين ، فإن أقصى احتمال والذى يمكن أن نتحمل به خطأ من النوع الأول يسمى مستوى المعنوية للاختبار . هذا الاحتمال ، ويرمز له بالرمز α ، يحدد بشكل عام قبل سحب أى عينة ، بحيث لاتؤثر النتائج التى حصلنا عليها فى اختبارنا .

من الناحية العملية فإننا نستخدم عادة مستوى المعنوية 0.05 أو 0.01 ، وإن كانت هناك قيم أخرى يتم استخدامها . وعلى سبيل المثال إذا استخدمنا 0.05 أو 5% مستوى معنوية فى تصميم اختبار للفرض ، فإن هناك حوالى 5 فرص فى كل 100 أننا سوف نرفض الفروض عندما يجب أن نقبلة ، بمعنى ، أننا سنكون واثقين بنسبة 95% فى أننا سنتخذ القرار السليم . فى هذه الحالة فإننا نقول أن الفرض رفض عند مستوى المعنوية 0.05 ، وهذا يعنى أنه من الممكن أن نكون على خطأ باحتمال 0.05 .

اختبارات تتضمن التوزيع الطبيعى :

لأعطاء أمثلة للأفكار التى عرضناها أعلاه تصور أنه تحت فرض معين أن توزيع المعاينة للاحصائية S هو التوزيع الطبيعى بمتوسط μ_S وانحراف معيارى σ . بهذا فإن توزيع المتغير المعيارى (أو درجات z) ، وتعطى بالصورة $z = (S - \mu_S)/\sigma_S$ هو المتغير الطبيعى المعيارى (متوسطه 0 ، تباينه 1) ويظهر بالشكل ١٠-١ .

فإذا أخذنا عينة واحدة عشوائية وكانت قيم z للاحصائية تقع خارج المدى 1.96 — إلى 1.96 ، فإننا

نستنتج أن مثل هذا الحدث يمكن أن يقع باحتمال 0.05 فقط (مجموع المساحة المظللة بالشكل) إذا كان الفرض صحيحا . وبهذا يمكن أن نقول أن قيم z تختلف معنويا عما يجب أن يكون متوقعا تحت الفرض وبهذا نميل إلى رفض الفرض .

شكل ١٠ – ١

المساحة الكلية المظللة 0.05 هى مستوى المعنوية للاختبار . وهذه تمثل احتمال ارتكاب خطأ رفض الفرض ، أو احتمال الوقوع فى خطأ من النوع الأول . وبهذا نقول أن الفرض رفض عند مستوى معنوية 0.05 أو أن قيم z لاحصائية العينة معنوية عند مستوى المعنوية 0.05 .

قيم z خارج المدى من 1.96 — إلى 1.96 تكون ما يسمى بالمنطقة الحرجة أو منطقة رفض الفرض أو منطقة المعنوية . مجموعة قيم z داخل المدى من 1.96 إلى 1.96 يمكن أن تسمى بمنطقة قبول الفرض أو منطقة عدم المعنوية .

على أساس الملاحظات السابقة يمكن صياغة القواعد التالية للقرارات أو اختبار الفروض أو المعنوية .

(ا) ارفض الفرض عند مستوى معنوية 0.05 إذا كانت قيم z للاحصائية S تقع خارج المدى من 1.96 — إلى 1.96 بمعنى ، $z > 1.96$ أو $z < -1.96$) .

وهذا يكافئ القول بأن القيمة المشاهدة لاحصائية العينة معنوية عند المستوى 0.05 .

(ب) اقبل الفرض (أو إذا كان من المرغوب عدم اتخاذ أى قرار على الأطلاق) خلاف ذلك .

ونظرا لأن قيم z تلعب دورا هاما فى اختبارات الفروض والمعنوية . فإنها تسمى أيضا احصائية الاختبار .

ويجب ملاحظة أن هناك مستويات أخرى للمعنوية يمكن استخدامها على سبيل المثال ، إذا استخدمنا مستوى 0.01 فإننا نستبدل 1.96 التى استخدمت أعلاه بـ 2.58 (أنظر الجدول ١٠–١ أدناه) . جدول ٩–١ صفحة ٢٥١ يمكن أيضا استخدامه بما أن مجموع مستوى المعنوية ومستوى الثقة هـو 100 % .

اختبار من طرف واحد واختبار من طرفين :

فى الاختبار السابق أظهرنا الاهتمام بالقيم المتطرفة للاحصائية S أو قيم z المقابلة لها على جانبى المتوسط ، أو على كل من « أطراف » التوزيع . ولهذا السبب تسمى هذا الاختبار بالاختبار من طرفين أو الأختبار فى الجانبين .

غالبا ، ما تكون مهتمين فقط بالقيم المتطرفة فى جانب واحد من المتوسط ، أى فى « طرف » واحد من التوزيع ،

فعلى سبيل المثال عندما تكون مهمتين باختبار الفرض أن تكون أحد المعالجات أحسن من غيرها (والتى تختلف عن اختبار ما إذا كانت معالجة أحسن أو أسوأ من غيرها) . مثل هذه الاختبارات تسمى اختبارات من طرف واحد أو اختبارات من جانب واحد . وفى هذه الحالات فإن المنطقة الحرجة هى منطقة فى جانب واحد من التوزيع ، مساحتها تساوى مستوى المعنوية . الجدول ١٠ - ١ يعطى القيم الحرجة لـ z لكل من الاختبارات من طرف واحد والاختبارات من طرفين لمستويات مختلفة من المعنوية ، وهو مفيد للرجوع إليه . القيم الحرجة لـ z لمستويات المعنوية الأخرى يمكن الحصول عليها باستخدام جدول المساحة تحت المنحنى الطبيعى .

جدول ١٠ - ١

مستوى المعنوية α	0·10	0·05	0·01	0·005	0·002
قيم z الحرجة للاختبارات من طرف واحد	−1·28 *or* 1·28	−1·645 *or* 1·645	−2·33 *or* 2·33	−2·58 *or* 2·58	−2·88 *or* 2·88
قيم z الحرجة للاختبارات من طرفين	−1·645 *and* 1·645	−1·96 *and* 1·96	−2·58 *and* 2·58	−2·81 *and* 2·81	−3·08 *and* 3·08

اختبارات خاصة :

للعينات الكبيرة يتبع توزيع المعاينة لكثير من الاحصائيات التوزيع الطبيعى (أو على الأقل قريب من التوزيع الطبيعى بمتوسط μ_S وانحراف معيارى σ_S . فى مثل هذه الحالات يمكن أن نستخدم النتائج السابقة لصياغة قواعد اتخاذ القرار أو اختبارات الفروض والمعنوية . الحالات الخاصة التالية ، مأخوذة من الجدول ٨-١ ، صفحة ٢٣٠ هى حالات قليلة من الاحصائيات ذات الأهمية العملية . فى كل حالة فإن النتائج صالحة للمجتمعات غير المحدودة أو للمعاينة بارجاع . أما للمعاينة بدون ارجاع من المجتمعات المحدودة فإن النتائج يجب تعديلها . أنظر الصفحة ٢٢٧ .

١ ـ الأوساط :

هنا $S = \bar{X}$ ، الوسط الحسابى للعينة $\mu = \mu_{\bar{X}} = \mu$ متوسط المجتمع ، $\sigma_S = \sigma_{\bar{X}} = \sigma/\sqrt{N}$ ، حيث σ هو الانحراف المعيارى للمجتمع ، N هو حجم العينة . قيم z تعطى بالصيغة

$$z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{N}}$$

وعند الضرورة نستخدم الانحراف المعيارى للعينة s أو $\hat{s}$ لتقدير σ .

٢ ـ النسب :

هنا $S = P$ ، نسبة « النجاح » فى عينة ، $\mu_S = \mu_P = p$ ، حيث p هى نسبة النجاح فى المجتمع و N

هو حجم العينة ، $\sigma_S = \sigma_P = \sqrt{pq/N}$ حيث $q = 1 - p$. قيم z تعطى كما يلى

$$z = \frac{P - p}{\sqrt{pq/N}}$$

فى حالة $P = X/N$ ، حيث X هو العدد الفعلى لحالات النجاح فى عينة ، وبهذا فإن قيم z تصبح .

$$z = \frac{X - Np}{\sqrt{Npq}}$$

أى أن

$$\mu_X = \mu = Np, \ \sigma_X = \sigma = \sqrt{Npq}, \text{ and } S = X$$

النتائج للاحصائيات الأخرى يمكن الحصول عليها بالمثل .

منحنيات توصيف العمليات ، قوة الاختبار :

درسنا فيما سبق كيف يمكن تقليل الخطأ من النوع الأول باختيار مستوى المعنوية المناسب . ومن الممكن تجنب الوقوع فى الخطأ من النوع الثانى كلية ، وذلك بعدم الوقوع فيه ، وهذا يتطلب عدم قبول أى فرض . وفى كثير من الحالات العملية يعد هذا غير ممكن . فى مثل هذه الحالات فإنه يتم استخدام منحنيات توصيف العمليات أو منحنيات OC ، وهى أشكال الخطأ من النوع الثانى تحت فروض مختلفة . وهذا يعطى مؤشر الحرف ا على الكلمة الأولى المدى ما يتيحه اختبار معين لنا من تقليل للأخطاء من النوع الثانى ، أى أنها تعطى مؤشرا لقوة الاختبار فى تلافى الوقوع فى اتخاذ القرارات خاطئة . وهذه المنحنيات مفيدة فى تصميم التجارب فإنها توضح على سبيل المثال ، ما هو حجم العينة الذى يمكن استخدامه .

خرائط الرقابة :

من المهم فى الناحية العملية معرفة ما إذا كانت عملية صناعية قد تغيرت بشكل كاف بحيث يجب اتخاذ خطوات لمعالجة الموقف . مثل هذه المشاكل تظهر ، على سبيل المثال ، فى الرقابة على جودة الإنتاج عندما يجب ، وبسرعة ، تقرير ما إذا كانت التغيرات المشاهدة ترجع إلى تقلبات الصدفة أو إلى تغيرات فعلية فى العملية الصناعية لأسباب مثل تقادم أجزاء الماكينة ، أو أخطاء العاملين ، وغير ذلك . وتعطى خرائط الرقابة طريقة مفيدة وبسيطة للتعامل مع هذه المشاكل (أنظر المسألة ١٠ – ١٦)

اختبارات المعنوية التى تتضمن الفروق بين العينات :

١ — الفروق بين الأوساط :

اعتبر أن $\bar{X}_1$ و $\bar{X}_2$ هى أوساط العينة التى حصلنا عليها من عينات كبيرة أحجامها N_1 و N_2 سحبت من مجتمعات أوساطها μ_1 و μ_2 وانحرافاتها المعيارية σ_1 و σ_2 . اعتبر فرض العدم بأنه لايوجد فروق بين أوساط المجتمعين . أى أن $\mu_1 = \mu_2$ أو أن العينات مسحوبة من مجتمعين لهما نفس الوسط الحسابى .

من الفصل الثامن ، صفحة ٢٢٩ ، المعادلة (٥) ، إذا وضعنا $\mu_1 = \mu_2$ فإننا نجد أن توزيع المعاينة للفروق بين الأوساط يتوزع تقريباً كالتوزيع الطبيعي بوسط حسابي وانحراف معياري معطين كما يلي :

$$\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = 0 \quad \text{and} \quad \sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \sqrt{(\sigma_1^2/N_1) + (\sigma_2^2/N_2)}$$

ويمكن هنا ، إذا كان ذلك ضرورياً ، استخدم الانحرافات المعيارية للعينة s_1 و s_2 (أو $\hat{s}_1$ و $\hat{s}_2$) لتقدير σ_1 و σ_2 .

باستخدام المتغير المعيارى أو قيم z المعطاة كما يلي :

$$z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - 0}{\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}} = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}$$

يمكن اختبار فرض العدم ضد الفروض البديلة (أو معنوية الفروق المشاهدة) عند مستوى ملائم للمعنوية .

٢ ـــ الفروق بين النسب :

اعتبر أن P_1 و P_2 هي نسب العينة التي حصلنا عليها من عينات كبيرة أحجامها N_1 و N_2 مسحوبة من مجتمعات نسبها p_1 و p_2 . اعتبر فرض العدم بأنه لايوجد فروق بين معالم المجتمعين ، أي أن $p_1 = p_2$، وبهذا فإن العينات مسحوبة فعلا من نفس المجتمع .

من الفصل الثامن ، صفحة ٢٢٩ ، المعادلة (٦) إذا وضعنا $p_1 = p_2 = p$ فإننا نجد أن توزيع المعاينة للفروق بين النسب يتوزع تقريباً كالتوزيع الطبيعي بوسط حسابي وانحراف المعيارى معطين كما يلي :

$$\mu_{P_1-P_2} = 0 \quad \text{and} \quad \sigma_{P_1-P_2} = \sqrt{pq(1/N_1 + 1/N_2)} \qquad (٣)$$

$p = \dfrac{N_1P_1 + N_2P_2}{N_1 + N_2}$ حيث (١٠) يستخدم كتقدير لنسب المجتمع ، و $q = 1 - p$. باستخدام المتغير المعيارى

$$z = \frac{P_1 - P_2 - 0}{\sigma_{P_1-P_2}} = \frac{P_1 - P_2}{\sigma_{P_1-P_2}} \qquad (٤)$$

يمكن أن نختبر الفروق المشاهدة عند مستوى معنوية ملائم وبالتالى نختبر فرض العدم .

الاختبارات المتضمنة احصائيات أخرى يمكن تصميمها بصورة مشابهة .

اختبارات تتضمن توزيعات ذى الحدين :

الاختبارات المتضمنة لتوزيع ذى الحدين ومثل ذلك التوزيعات الأخرى يمكن تصميمها بصورة مشابهة لتلك التي تستخدم فيها التوزيع الطبيعي ، حيث تتفق المبادىء الأساسية فى كل منها . (أنظر المسألة ١٠ – ٢٣ إلى ١٠ – ٢٨)

مسائل محلولة

اختبارات الأوساط والنسب باستخدام التوزيع الطبيعي :

١٠ – ١ أوجد احتمال الحصول على ما بين 40 و 60 صورة (بما فى ذلك 40 ، 60) فى 100 رمية لعملة متوازنة .

الحـل :

طبقاً للتوزيع الطبيعي فإن الاحتمال المطلوب هو :

$$_{100}C_{40}(\tfrac{1}{2})^{40}(\tfrac{1}{2})^{60} + {}_{100}C_{41}(\tfrac{1}{2})^{41}(\tfrac{1}{2})^{59} + \ldots + {}_{100}C_{60}(\tfrac{1}{2})^{60}(\tfrac{1}{2})^{40}$$

بما أن $Np = 100(½)$ و $Nq = 100(½)$ وكلاهما أكبر من 5 ، وبهذا يمكن استخدام التوزيع الطبيعي كتقريب لتوزيع ذى الحدين لحساب هذا المجموع

المتوسط والانحراف المعيارى لعدد الصور فى 100 رمية يعطيان بما يلى :

$$\mu = Np = 100(\tfrac{1}{2}) = 50 \quad \text{and} \quad \sigma = \sqrt{Npq} = \sqrt{(100)(\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2})} = 5$$

وباستخدام الفرض بأن المتغير مستمر ، فإن عدد الصور بين 40 و 60 متضمنة 40 و 60 (مثل عدد الصور بين 39.5 و 60.5 .

39.5 مقاسة بوحدات معيارية $(39.5 - 50)/5 = -2.10$

60.5 مقاسة بوحدات معيارية $(60.5 - 50)\ 5 = 2.10$

الاحتمال المطلوب = المساحة تحت المنحنى الطبيعي بين $z = 2.10$ و $z = -2.10$

$2 \times (z = 2.10$ و $z = 0$ المساحة بين$) = 2(0.4821) = 0.9642$

١٠ – ٢ لاختبار الفرض أن عملة غير متحيزة ، اعتبرت القواعد التالية لاتخاذ القرار : (١) اقبل الفرض إذا كان عدد الصور فى عينة واحدة من 100 رمية تقع بين 40 و 60 (بما فيها 40 ، 60) (٢) ارفض الفرض فيما عدا ذلك .

(أ) أوجد احتمال رفض الفرض عندما يكون صحيحاً .

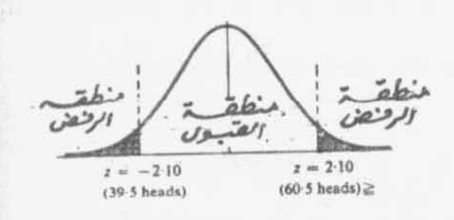
(ب) عبر بالرسم عن قواعد اتخاذ القرار والنتائج فى الجزء (أ)

(جـ) ماهو استنتاجك إذا كانت العينة المكونة من 100 رمية ينتج عنها 53 صورة ؟ 60 صورة ؟

(د) هل يمكن أن تكون مخطئاً فى استنتاجك فى (جـ) ؟ وضح

الحــل :

(أ) من المسألة ١٠ - ١ ، احتمال عدم الحصول على عدد صور بين 40 و 60 (بما فيها 40 و 60) إذا كانت العملة غير متحيزة $= 1 - 0.9642 = 0.0358$ إذن إحتمال رفض الفرض على الرغم من أنه سليم $= 0.0358$



شكل ١٠ - ٢

(ب) قواعد اتخاذ القرار موضحة بالشكل ١٠-١ والذي يوضح التوزيع الاحتمالي للصور في 100 رمية لعملة غير متحيزة .

إذا كانت عينة مكونة من 100 رمية ينتج عنها قيم z بين -2.10 و 2.10 ، فإننا نقبل الفرض بخلاف ذلك نرفض ونقرر أن العملة متحيزة .

الخطأ الناتج من رفض الفرض عندما يجب أن نقبله هو الخطأ من النوع الأول في قواعد اتخاذ القرار : واحتمال الوقوع في هذا الخطأ ، هو 0.0358 من الجزء (أ) ويمثل بالأجزاء المظللة في الرسم .

إذا كانت عينة مكونة من 100 رمية ينتج عنها قيم z (أو إحصائية z) تقع في المناطق المظللة ، فإننا نقول أن هذه القيم تختلف اختلافاً معنوياً عما يمكن أن نتوقعه إذا كان الفرض صحيحاً . ولهذا السبب فإن إجمالي المساحة المظللة (احتمال الخطأ من النوع الأول) تسمى بمستوى المعنوية لقواعد اتخاذ القرار وتساوي في هذه الحالة 0.0358 . وبهذا نتكلم عن رفض الفرض عند مستوى معنوية 0.0358 أو 3.58% .

(ج) طبقاً لقاعدة اتخاذ القرار ، فإننا نقبل الفرض بأن العملة غير متحيزة في كلتا الحالتين . ويمكن مناقشة هذه القاعدة على أساس لو ظهرت صورة واحدة أخرى فإن هذا كان سيؤدي إلى رفض الفرض . وهذا مايواجهه الشخص عند استخدام خط فاصل في تقسيم مناطق القبول والرفض عند اتخاذ القرارات .

(د) نعم . سوف نقبل الفرض عندما يجب رفض هذا الفرض بالفعل ، كما في الحالة على سبيل المثال عندما يكون احتمال الصور هو 0.7 حقيقة بدلا من 0.5 .

الخطأ من قبول الفرض عندما يجب رفضه هو الخطأ من النوع الثاني . لمزيد من المناقشة أنظر المسائل من ١٠ - ١٠ إلى ١٠ - ١٢ .

١٠ - ٣ صمم قاعدة لاتخاذ قرار بشأن اختبار الفرض بأن عملة غير متحيزة إذا أخذت عينة مكونة من 64 رمية للعملة وكان مستوى المعنوية (أ) 0.05 (ب) 0.01

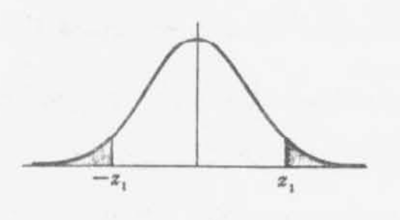
الحــل :

(أ) **الطريقة الأولى :** إذا كان مستوى المعنوية 0.05 ، فإن كلا من المنطقة المظللة فى الشكل ١٠ – ٣ يساوى 0.0250 بالتماثل . وبهذا فإن المساحة بين الصفر و z_1 ستساوى

$0.5000 - 0.0250 = 0.4750$ و $z_1 = 1.96$

وبهذا فإن أحد القواعد الممكنة لاتخاذ القرار هى :

(١) اقبل الفرض بأن العملة غير متحيزة إذا كانت z تقع بين -1.96 و 1.96



شكل ١٠ – ٣

(٢) ارفض الفرض فيما عدا ذلك .

القيم الحرجة -1.96 و 1.96 يمكن الحصول عليها أيضاً من الجدول ١٠ – ١ .

للتعبير عن هذه القاعدة بدلالة عدد الصور التى سوف نحصل عليها فى 64 رمية للعملة ، لاحظ أن المتوسط والانحراف المعيارى لتوزيع الصور هما :

$$\mu = Np = 64(0.5) = 32, \quad \text{and} \quad \sigma = \sqrt{Npq} = \sqrt{64(0.5)(0.5)} = 4$$

وذلك تحت فرض أن العملة غير متحيزة .

إذن $z = (X - \mu)/\sigma = (X - 32)/4$

إذا كانت $z = 1.96$, $(X - 32)/4 = 1.96$ or $X = 39.84$. If $z = -1.96$, $(X - 32)/4 = -1.96$ or $X = 24.16$

وبهذا فإن قواعد اتخاذ القرار ، ستكون

(١) اقبل الفرض بأن العملة غير متحيزة إذا كان عدد الصور يقع بين 24.16 و 39.84 أى بين 25 و 39 (شاملة 25 و 39)

(٢) ارفض الفرض فيما عدا ذلك .

الطريقة الثانية : باحتمال 0.95 ، فإن عدد الصور سوف يقع بين .

$\mu - 1.96\sigma$ and $\mu + 1.96\sigma$ أى $Np - 1.96\sqrt{Npq}$ and $Np + 1.96\sqrt{Npq}$

أو بين $32 - 1.96(4) = 24.16$ and $32 + 1.96(4) = 39.84$

والذى سيؤدى إلى القاعدة السابقة فى اتخاذ القرار .

طريقة ثالثة : $-1.96 < z < 1.96$ — تكافئ $-1.96 < \frac{1}{4}(X - 32) < 1.96$

إذن $-1.96(4) < (X - 32) < 1.96(4)$ أو $32 - 1.96(4) < X < 32 + 1.96(4)$, i.e. $24.16 < X < 39.84$

والذى يؤدى أيضاً إلى القاعده السابقة فى اتخاذ القرار .

(ب) إذا كان مستوى المعنوية هو 0.01 ، فإن كلا من المنطقة المظللة فى الرسم أعلاه تساوى 0.005 . إذن المساحة بين الصفر و z_1 تساوى $0.4950 = 0.5000 - 0.0050$ و $z_1 = 2.58$ (بصورة أكثر دقة 2.575) .

وهذه القيمة يمكن الحصول عليها أيضاً من الجدول ١٠ - ١

باستخدام الأسلوب فى الطريقة الثانية فى (أ) ، فإننا نجد باحتمال 0.99 أن عدد الصور سيقع بين

$\mu - 2.58\sigma$ and $\mu + 2.58\sigma$, i.e. $32 - 2.58(4) = 21.68$ and $32 + 2.58(4) = 42.32$

وبهذا فإن قواعد اتخاذ القرار ستكون

(١) اقبل الفرض إذا كان عدد الصور يقع بين 22 و 42 (شاملة 22 ، 42)

(٢) ارفض الفرض فيما عدا ذلك .

١٠ - ٤ كيف يمكنك تصميم قاعدة لاتخاذ القرار فى المسألة ١٠ - ٣ بحيث تتجنب الخطأ من النوع الثانى ؟

الحـــل :

نقع فى الخطأ من النوع الثانى وذلك بقبول الفرض عندما يكون من الواجب رفضه . لتحنب هذا الخطأ ، فإنه بدلا من قبول الفرض فإننا ببساطة لانرفضه ، والذى يعنى أننا نؤجل اتخاذ القرار فى هذه الحالة . هذا ، على سبيل المثال، يمكن صياغة قاعدة اتخاذ القرار فى المسألة ١٠ - ٣ (ب) كما يلى :

(١) لاترفض الفرض إذا كان عدد الصور يقع بين 22 و 42 (شاملة 22 و 42)

(٢) ارفض الفرض فيما عدا ذلك.

فى كثير من النواحى العملية ، يكون من المهم تقرير ما إذا كان من الوجب قبول الفرض أو رفضه . المناقشة الكاملة لمثل هذه الحالات تتطلب الأخذ فى الاعتبار الخطأ من النوع الثانى (أنظر المسائل من ١٠ - ١٠ إلى ١٠ - ١٢)

١٠ - ٥ فى تجربة لقياس القدرة الخارقة على الإدراك (الحاسة السادسة) (E.S.P.) طلب من شخص (موضوع التجربة) فى حجرة أن يوضح لون (أحمر أو أزرق) كارت من 50 كارت مخلوطة خلطاً جيداً اختير بواسطة شخص فى حجرة ثانية . وكان من غير المعروف للشخص موضوع التجربة عدد الكروت الحمراء أو الزرقاء فى مجموعة الكروت . إذا أمكن للشخص موضوع التجربة أن يميز 32 كارت تمييزاً صحيحاً ، حدد ما إذا كانت النتائج معنوية عند (أ) 0.05 (ب) 0.01 مستوى معنوية .

الحـل :

إذا كانت p هي احتمال أن يختار الشخص موضوع التجربة اللون الصحيح ، وبهذا فإننا يجب أن نقرر بين الفرضين التاليين :

$H_0 : p = 0.5$ ، أي أن الشخص يخمن وأن النتائج ترجع للصدفة .

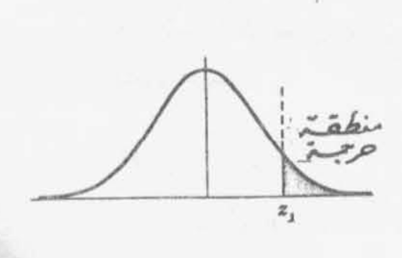
$H_1 ; p > 0.5$ ، والشخص له قدره خارقة على الإدراك .

ونختار هنا اختباراً من طرف واحد ، حيث أننا لا نهتم بقدرة الشخص على تسجيل قيم ضئيلة ولكن نهتم فقط بقدرته على تسجيل قيم مرتفعة .

إذا كان الفرض H_0 صحيحاً ، فإن الوسط الحسابي والانحراف المعياري لعدد الكروت التي أمكن تمييزها بشكل سليم هما :

$$\mu = Np = 50(0{\cdot}5) = 25 \text{ and } \sigma = \sqrt{Npq} = \sqrt{50(0{\cdot}5)(0{\cdot}5)} = \sqrt{12{\cdot}5} = 3{\cdot}54$$

(أ) للاختبار من طرف واحد عند مستوى المعنوية 0.05 فإننا يجب اختيار z_1 في الشكل ١٠ - ٤ بحيث تساوي المساحة المظللة في المنطقة الحرجة للقيم الكبيرة ، 0.05 . إذن المساحة بين الصفر و z_1 تساوي 0.4500 و $z_1 = 1.645$. ويمكن الحصول عليها أيضاً من الجدول ١٠ - ١ .



شكل ١٠ - ٤

وبهذا تكون قواعد اتخاذ القرار أو اختبار المعنوية كما يلي :

(١) إذا كانت قيم z المشاهدة أكبر من 1.645 ، فإن النتيجة معنوية عند مستوى 0.05 ويكون لدى الشخص قوة خارقة على الإدراك .

(٢) إذا كانت قيم z أقل من 1.645 فإن النتيجة ترجع للصدفة ، أي غير معنوية عند المستوى 0.05 .

وبما أن 32 معبراً عنها بوحدات معيارية تساوي $(32 - 25)/3.54 = 1.98$ وهي أكبر من $1{\cdot}645$ فإن القرار (١) ينطبق ، بمعنى أننا نستنتج عند المستوى $0{\cdot}05$ أن الشخص عنده قدرة خارقة على الإدراك .E.S.P.

لاحظ أنه يجب أن نطبق التصحيح الخاص بالمتغيرات المتصلة ، وبما أن 32 في مقياس الاستمرار تقع بين 31.5 و 32.5 . والرقم 31.5 معبراً عنها بوحدات معيارية هي $(31.5 - 25)/3.54 = 1.84$ وبهذا تصل إلى نفس الاستنتاج السابق .

(ب) إذا كان مستوى المعنوية هو 0.01 ، فإن المساحة بين الصفر و z_1 تساوى 0.4900 و $z_1 = 2.33$ وبما أن 32 (أو 31.5) معبراً عنها بوحدات معيارية هى 1.98 (أو 1.84) وهى أقل من 2.33 فإننا نستنتج أن النتائج غير معنوية عند 0.01.

يتبنى بعض الإحصائيين المصطلح بأن النتائج المعنوية عند المستوى 0.01 تسمى مرتفعة المعنوية ، والنتائج المعنوية عند المستوى 0.05 وغير المعنوية عند 0.01 بأنها محتملة المعنوية ، بينما النتائج المعنوية عند مستويات أكبر من 0.05 غير معنوية .

وبما أن مستويات المعنوية تستخدم كمؤشر فى اتخاذ القرارات ، فإن بعض الاحصائيين يذكر الاحتمالات الفعلية المستخدمة . على سبيل المثال فى هذه المسألة فيما أن $\Pr\{z \geqq 1.84\} = 0.0322$ ، فإن الاحصائى يمكنه القول بأنه استناداً إلى التجربة فإن فرصة ارتكاب الخطأ بالقول أن هذا الشخص له قوة خارقة على الإدراك .E.P.S هى حوالى 3 فى كل 100 . الاحتمال المذكور فى هذه الحالة 0.0322 ، يسمى أحياناً بالمعنوية الوصفية أو المعنوية التجريبية .

١٠ – ٦ مصنع للأدوية المسجلة يدعى أن دواء من انتاجه له فاعلية بنسبة 90% فى التخفيف من الحساسية لفترة 8 ساعات . فى عينة من 200 شخص مصابين بالحساسية ، أدى الدواء إلى تخفيف آلام 160 منهم . قرر ما إذا كان ادعاء المصنع صحيحاً .

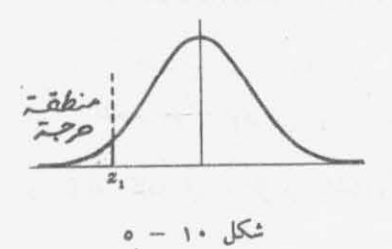
الحــل :

اعتبر أن p تمثل احتمال أن يؤدى الدواء إلى التخفيف من آلام الحساسية . وبهذا فإنه يجب أن نقرر بين الفرضين :

$H_0 : p = 0.9$ والادعاء صحيح

$H_1 : p < 0.9$ والادعاء باطل

نختار اختباراً من طرف واحد ، حيث أننا نهتم بتحديد ما إذا كانت نسبة الأشخاص الذين شفوا باستخدام الدواء نسبة قليلة.



شكل ١٠ – ٥

إذا كان مستوى المعنوية المأخوذ هو 0.01 بمعنى أن المساحة المظللة فى الشكل ١٠ – ٥ هى 0.01 فإن $z_1 = -2.33$ كما فى المسألة ١٠ – ٥ (ب) باستخدام خاصية التماثل فى المنحنى ، أو من الجدول ١٠ – ١ . ونستخدم كأساس لاتخاذ القرار :

(١) الفرض ليس صحيحاً إذا كانت z أقل من -2.33 (وفى هذه الحالة نرفض H_0).

(٢) فى غير ذلك من الحالات ، الادعاء صحيح والنتائج المشاهدة ترجع إلى الصدفة (فى هذه الحالة نقبل H_0) .

إذا كانت H_0 صحيحة ، $\mu = Np = (100)(0.8) = 80$ and $\sigma = \sqrt{Npq} = \sqrt{(100)(0.8)(0.2)} = 4$

فى هذه الحالة 160 معبراً عنها بوحدات معيارية $(160 - 180)/4.23 = -4.73$ وهى أقل بكثير من -2.33 وطبقاً لقاعدة اتخاذ القرار التى وضعناها فإننا نستنتج أن الادعاء غير صحيح وأن نتائج العينة مرتفعة المعنوية (أنظر نهاية المسألة ١٠ - ٥) .

١٠ - ٧ متوسط العمر الإنتاجى لعينة من 100 لمبة من لمبات الفلورسنت من إنتاج أحد المصانع هو 1570 ساعة وانحرافها المعيارى 120 ساعة . إذا كان μ هو متوسط العمر الإنتاجى لجميع اللمبات المنتجة بواسطة الشركة ، اختبر الفرض $\mu = 1600$ ساعة ضد الفرض البديل $\mu \neq 1600$ ساعة ، مستخدماً مستوى المعنوية (أ) 0.05 (ب) 0.01

الحـــل :

يجب أن نختار بين الفرضين :

$H_0 : \mu = 1600$ ساعة ، $H_1 : \mu \neq 1600$ ساعة

يجب أن نستخدم هنا اختباراً من طرفين حيث أن $\mu \neq 1600$ تشمل كلا من القيم الأكبر من أو الأصغر من 1600 .

(أ) للاختبار من طرفين عند مستوى المعنوية 0.05 ، نستخدم قواعد اتخاذ القرار التالية .

(١) ارفض H_0 إذا كانت قيم z المحسوبة من العينة تقع خارج المدى -1.96 إلى 1.96 .

(٢) اقبل H_0 (أولا تتخذ أى قرار) خلاف ذلك .

الاحصائية المختبرة هنا متوسط العينة $\bar{X}$. توزيع المعاينة لـ $\bar{X}$ له متوسط $\mu_{\bar{X}} = \mu$ وانحراف معيارى $\sigma_{\bar{X}} = \sigma/\sqrt{N}$ ، حيث μ هو متوسط المجتمع و σ الانحراف المعيارى للمجتمع المكون من جميع اللمبات المنتجة بواسطة الشركة .

تحت الفرض H_0 ، فإن $\mu = 1600$ و $\sigma_{\bar{X}} = \sigma/\sqrt{N} = 120/\sqrt{100} = 12$ باستخدام الانحراف المعيارى للعينة كتقدير لـ σ . بما أن $z = (\bar{X} - 1600)/12 = (1570 - 1600)/12 = -2.50$ يقع خارج المدى -1.96 إلى 1.96 فإننا نرفض الفرض H_0 عند مستوى المعنوية 0.05 .

(ب) إذا كان مستوى المعنوية 0.01 ، فالمدى -1.96 إلى 1.96 فى قواعد اتخاذ القرار فى الجزء (أ) يحل بدلا منه المدى من -2.58 إلى 2.58 . بما أن قيمة z المساوية لـ -2.50 تقع داخل هذا المدى ، فإننا نقبل H_0 (أولا نتخذ أى قرار) عند مستوى المعنوية 0.01 .

١٠ - ٨ فى المسألة ١٠ - ٧ ، اختبر الفرض $\mu = 1600$ ساعة ضد الفرض البديل $\mu < 1600$ ساعة ، باستخدام مستوى المعنوية (أ) 0.05 (ب) 0.01 .

الحـل :

يجب أن نختار بين الفرضين

$H_0 : \mu = 1600$ ساعة ، $H_1 : \mu < 1600$ ساعة

ونستخدم هنا اختباراً من طرف واحد ، والقيم المقابلة مطابقة لتلك القيم فى المسألة ١٠ – ٦ .

(أ) إذا كان مستوى المعنوية 0.05 ، المنطقة المظللة فى الشكل ١٠ – ٥ مساحتها 0.05 ، ونجد أن $z_1 = -1.645$. ولهذا نستخدم القاعدة التالية فى اتخاذ القرار :

(١) ارفض H_0 إذا كانت z أقل من -1.645 .

(٢) اقبل H_0 (أولا تتخذ أى قرار) فيما عدا ذلك .

وبما أن ، كما فى المسألة ١٠ – ٧ (أ) ، قيمة z هى -2.50 وهى أقل من -1.645 ، فإننا نرفض H_0 عند مستوى المعنوية 0.05 . لاحظ أن هذا القرار مماثل لما توصلنا إليه فى المسألة ١٠ – ٧ (أ) باستخدام اختبار من طرفين .

(ب) إذا كان مستوى المعنوية هو 0.01 ، فإن قيم z_1 فى الشكل ١٠ – ٥ هى -2.33 ولهذا نستخدم القاعدة التالية فى اتخاذ القرار :

(١) ارفض H_0 إذا كانت z أقل من -2.33 .

(٢) اقبل H_0 (أولا تتخذ أى قرار) فيما عدا ذلك .

وبما أن ، كما فى المسألة ١٠ – ٧ (أ) قيمة z وهى -2.50 وهى أقل من -2.33 فإننا نرفض الفرض عند مستوى معنوية 0.01 . لاحظ أن هذا القرار يختلف عما وصلنا إليه فى المسألة ١٠ – ٧ (أ) باستخدام الاختبار من طرفين .

ينتج عن ذلك أن القرارات الخاصة بفرض معين H_0 المبنية على اختبار من طرف واحد أو اختبار من طرفين ليست دائماً على اتفاق . وهذا ، بالطبع ، متوقع حيث أننا نختبر H_0 فى مقابل بديل مختلف فى كل حالة .

١٠ – ٩ متوسط قوة مقاومة حبال القطع من إنتاج أحد المصانع هو 1800 N وانحرافها المعيارى 100 N . باستخدام طريقة جديدة للتصنيع ادعى أن قوة مقاومة الحبال سوف تزداد . لاختبار هذا الادعاء أخذت عينة من 50 حبلا وتم اختبارها ووجد أن متوسط مقاومتها للقطع هو 1850 N . هل يمكن تأييد هذا الادعاء عند مستوى المعنوية 0.01 ؟

الحـل :

يجب أن نختار بين الفرضين :

$H_0 : \mu = 1800$ N ، ولايوجد تغير حقيقى فى قوة مقاومة الحبال

$H_1 : \mu > 1800$ N ، ويوجد تغير فى قوة مقاومة الحبال

ونستخدم هنا اختباراً من طرف واحد . الشكل المرتبط بهذا الاختبار مماثل للشكل بالمسألة ١٠ – ٥ عند مستوى معنوية 0.01 ولذلك فإن قاعدة اتخاذ القرار هي

(١) إذا كانت قيم z المشاهدة أكبر من 2.33 ، فإن النتائج معنوية عند مستوى 0.01 ونرفض H_0 .

(٢) بخلاف ذلك نقبل H_0 (أو نؤجل اتخاذ القرار)

تحت الفرض بأن H_0 صحيح ، فإننا نجد

$$z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{N}} = \frac{1850 - 1800}{100/\sqrt{50}} = 3{\cdot}55$$

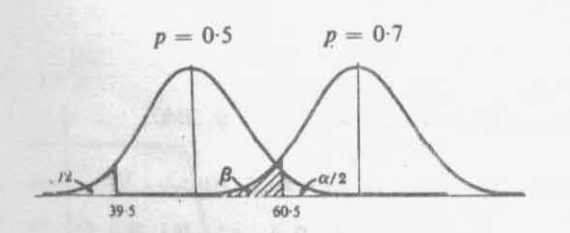
وهو أكبر من 2.33 . وبهذا نستنتج أن النتائج مرتفعة المعنوية أى أن الادعاء يجب تأييده .

منحنيات توصيف العمليات :

١٠–١٠ بالرجوع إلى المسألة ١٠–٢ ، ما هو احتمال قبول الفرض بأن العملة غير متحيزة عندما يكون الاحتمال الفعل للصور هــو $p = 0.7$ ؟

الحــل :

الفرض H_0 القائل بأن العملة غير متحيزة ، أى $p = 0.5$ يقبل إذا كان عدد الصور فى مائة رمية يقع بين 39.5 و 60.5 . احتمال رفض H_0 عندما يجب أن نقبله (احتمال الوقوع فى خطأ من النوع الأول) . وتمثل بالمساحة الكلية α للمنطقة المظللة تحت المنحنى الطبيعى إلى اليسار فى الشكل ١٠–٦ . كما حسبت فى المسألة ١٠–٢ (أ) ، المساحة α ، والتى تمثل مستوى المعنوية لاختبار H_0 تساوى 0.0358 .



إذا كان احتمال الصور هو $p = 0.7$ ، فإن توزيع الصور فى 100 رمية تمثل بالمنحنى الطبيعى بالشكل ١٠–٦ . يتضح من الشكل أن احتمال قبول H_0 عندما تكون $p = 0.07$ بالفعل (احتمال الوقوع فى خطأ من النوع الثانى) يعطى بالمنطقة β المظللة بخطوط مائلة فى الشكل .

لحساب هذه المساحة نلاحظ أن التوزيع تحت الفرض $p = .0.7$ له متوسط وانحراف معيارى كالآتى :

$$\mu = Np = (100)(0{\cdot}7) = 70 \quad \text{and} \quad \sigma = \sqrt{Npq} = \sqrt{(100)(0{\cdot}7)(0{\cdot}3)} = 4{\cdot}58$$

60.5 بوحدات معيارية $= (60.5 - 70)/4.58 = -2.07$

39.5 بوحدات معيارية $= (39.5 - 70)\ 4.58 = -6.66$

إذن

0.0192= (المساحة تحت المنحنى الطبيعى بين $z = -6.66$ و $z = -2.07$) . بهذا وباستخدام قواعد اتخاذ القرار المعطاة فإن هناك فرصة ضئيلة فى قبول الفرض بأن العملة غير متحيزة عندما تكون $p = 0.7$ بالفعل .

لاحظ أننا فى هذه المسألة قد أعطينا أسس اتخاذ القرار والتى حسبنا منها β و α . ومن الناحية العملية من الممكن ظهور الحالتين :

(١) نختار قيمة α (مثل 0.05 أو 0.01) ، نصل إلى أساس لاتخاذ القرار ثم نحسب β

(٢) نختار قيمة β و α ثم نصل إلى أساس اتخاذ القرار .

١٠-١١ حل المسألة السابقة إذا كانت (١) $p = 0.6$ (ب) $P = 0.8$ (جـ) $p = 0.9$ (د) $p = 0.4$

الحـل :

(١) إذا كانت $p = 0.6$ فإن توزيع الصور له متوسط وانحراف معيارى كالآتى :

$$\mu = Np = (100)(0{\cdot}6) = 60 \quad \sigma = \sqrt{Npq} = \sqrt{(100)(0{\cdot}6)(0{\cdot}4)} = 4{\cdot}90$$

60.5 بوحدات معيارية $= (60.5 - 60)/0.490 = 0.0102$

39.5 بوحدات معيارية $= (39.5 - 60)/4.90 = -4.18$

إذن

0.5040. = (المساحة تحت المنحنى الطبيعى بين $z = -4.18$ و $z = 0.0102$) $= \beta$

بهذا وباستخدام قواعد اتخاذ القرار المعطاة فإن هناك فرصة كبيرة فى قبول الفرض بأن العملة غير متحيزة عندما تكون القيمة الفعلية هى $p = 0.6$

(ب) إذا كانت $p = 0.8$ ، فإن $\mu = Np = (100)(0{\cdot}8) = 80$ and $\sigma = \sqrt{Npq} = \sqrt{(100)(0{\cdot}8)(0{\cdot}2)} = 4$

60.5 بوحدات معيارية $= (60.5 - 80)/4 = -4.88$

39.5 بوحدات معيارية $= (39.5 - 80)/4 = -10.12$

إذن

0.0000, = (المساحة تحت المنحنى الطبيعى بين $z = -10.12$ و $z = -4.88$) $= \beta$
(قريبة جدا من الصفر) .

(ج) من المقارنة بـ (١) أو بالحساب ، نجد أنه إذا كانت $p = 0.9$ ، فإن $\beta = 0$ وذلك لجميع الأغراض العملية .

(د) بالتماثل $p = 0.4$ تعطى قيمة β مثل $p = 0.6$ ، أى $\beta \doteq 0.5040$

١٠–١٢ عبر بيانيا عن نتائج المسائل ١٠–١٠ و ١٠–١١ برسم شكل (١) β مقابل p (ب) $(1 - \beta)$ مقابل p . فسر الأشكال الناتجة .

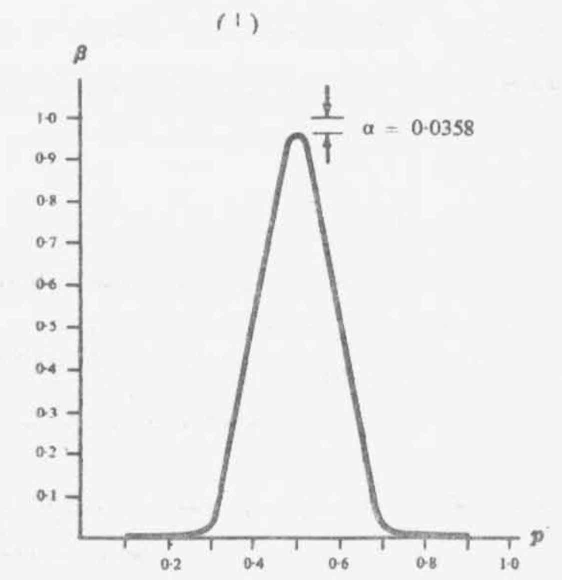
الحـل :

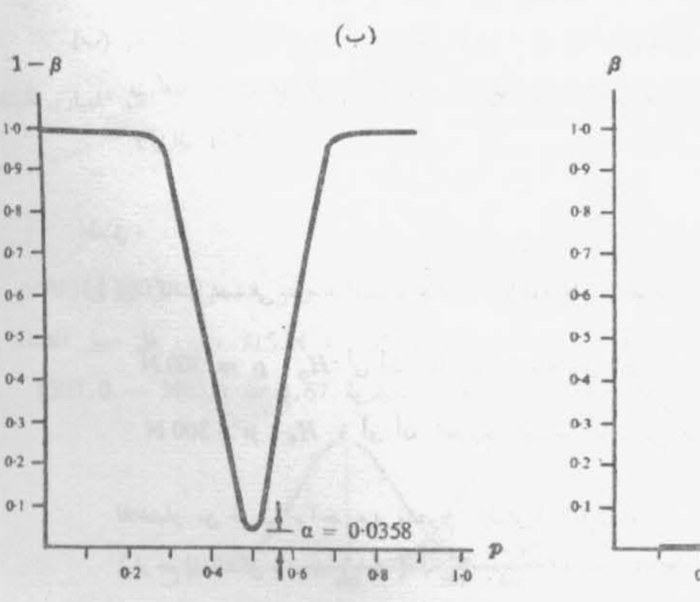
الجدول ١٠–٢ يوضح قيم β المقابلة لقيم p المعطاة كما حصلنا عليها فى المسائل ١٠–١٠ و ١٠–١١ .

جدول ١٠–٢

p	0·1	0·2	0·3	0·4	0·5	0·6	0·7	0·8	0·9
β	0·0000	0·0000	0·0192	0·5040	0·9642	0·5040	0·0192	0·0000	0·0000

لاحظ أن β تمثل احتمال قبول الفرض بأن $p = 0.5$ عندما تكون قيمة p الفعلية قيمة أخرى غير 0.5 . أما إذا كانت قيمة p الفعلية هى 0.5 فإن β تمثل احتمال قبول $p = 0.5$ عندما يكون من المفروض قبولها . هذا الاحتمال يساوى $1 - 0.0358 = 0.9642$ وهو موضح بالجدول ١٠–٢ .





شكل ١٠–٧

(ا) الشكل البيانى β مقابل p ، موضح بالشكل ١٠-٧ (ا) ، يسمى بمنحنى توصيف العمليات أو منحنى OC لقاعدة اتخاذ القرار أو لاختيار الفرض .

المسافة بين نقطة النهاية العظمى لمنحنى OC والخط $\beta = 1$ يساوى $0.0358 = \alpha$ ، مستوى المعنوية للاختبار .

وبشكل عام ، كلما زادت حدة قة المنحنى OC كانت قواعد اتخاذ القرار أفضل فى رفض الفروض غير الصحيحة .

(ب) الشكل البيانى $(1 - \beta)$ مقابل p ، موضح بالشكل ١٠-٧ (ا) ، يسمى منحنى قوة اختبار الفرض أو قواعد اتخاذ القرار . وهذا المنحنى نحصل عليه ببساطة كقلوب لمنحنى OC ، بحيث أن الشكلين من الناحية الفعلية متكافئين .

الكية $(1 - \beta)$ تسمى غالبا دالة القوة حيث أنها تشير إلى قابلية أو قوة الاختبار ارفض الفرض غير الصحيح ، أى الذى يجب رفضه . وتسمى الكية β دالة توصيف العمليات للأختبار .

١٠-١٣ تنتج شركة كابلات متوسطة قوة مقاومتها للكسر هو 300 N وانحرافها المعيارى 24 N . ومن المعتقد أنه باستخدام طريقة جديدة مبتكرة يمكن زيادة قوة المقاومة للكسر .

(ا) صمم قاعدة لاتخاذ القرار بشأن رفض الأسلوب القديم فى التصنيع عند مستوى معنوية 0.01 إذا اتفق على اختبار 64 كابل .

(ب) بنفس قاعدة اتخاذ القرار المستخدمة فى (ا) ، ما هو احتمال قبول الطريقة القديمة عندما تكون الطريقة الحديثة قد أدت فى الواقع إلى زيادة متوسط المقاومة للكسر إلى 310 N ؟ افترض أن الانحراف المعيارى لا يزال 24 N .

الحـل :

(ا) إذا كانت μ هى متوسط المقاومة للكسر ، فإننا نريد أن نقرر بين الفرضين :

$H_0 : \mu = 300$ N أى أن الطريقة الجديدة مثل الطريقة القديمة ،

$H_1 : \mu > 300$ N ، أى أن الطريقة الجديدة أفضل من الطريقة القديمة .

للاختبار من طرف واحد عند مستوى المعنوية 0.01 ، فإننا نحصل على القواعد التالية لاتخاذ القرار (ارجع إلى الشكل ١٠-٨ (ا)) .

(ا) ارفض H_0 إذا كانت قيم z لمتوسط المقاومة للكسر فى العينة أكبر من 2.33

(٢) أقبل H_0 فيما عدا ذلك .

بما أن $z > 2.33,$

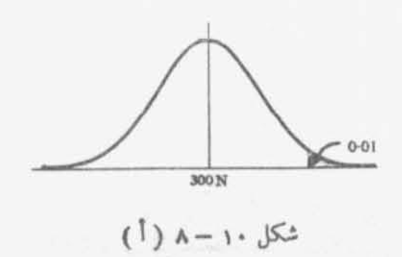
فإنه إذا كانت $z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{N}} = \frac{\bar{X} - 300}{24/\sqrt{64}}$ فإن $\bar{X} = 300 + 3z.$

وبهذا فإن قواعد اتخاذ القرار السابقة تصبح : $\bar{X} > 300 + 3(2.33) = 307.0$ N.

(١) ارفض H_0 إذا كان متوسط المقاومة للكسر فى الـ 64 كابلا يتجاوز 307.0 N

(٢) أقبل H_0 فيما عدا ذلك .

(ب) اعتبر الفرضين $H_0 : \mu = 300$ N و $H_1 : \mu = 310$ N . توزيعات متوسط المقاومة للكسر المقابل لهذين الفرضين ممثل على الترتيب بالمنحنى الطبيعى على اليسار والمنحنى الطبيعى على اليمين فى الشكل ١٠–٨ (١) .



شكل ١٠ – ٨ (أ)

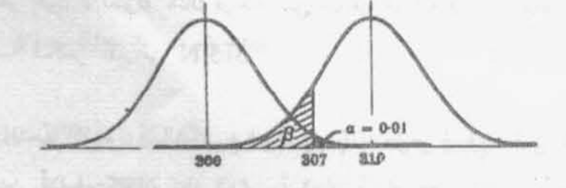
احتمال قبول عملية التصنيع القديمة عندما يكون متوسط المقاومة للكسر للطريقة الجديدة هو 310 N بالفعل ممثل بالمنطقة التى مساحتها β فى الشكل ١٠–٨ (١) . للحصول على ذلك ، لاحظ أن 307.0 N معبرا عنها بوحدات قياسية $(307.0 - 310)/3 = -1.00$ إذن

$\beta = (z = -1.00$ المساحة تحت المنحنى الطبيعى إلى اليمين وإلى يسار $) = 0.1587$ وهذا هو احتمال قبول $H_0 : \mu = 300$ N عندما تكون $H_1 : \mu = 310$ N هى فعلا القيمة الصحيحة ، أى احتمال ارتكاب خطأ من النوع الثانى .

١٠–١٤ كون (١) منحنى OC (ب) منحنى القوة للمسألة ١٠–١٣ ، مفترضا أن الانحراف المعيارى للمقاومة للكسر سيظل 24 N

الحل :

باستخدام مبررات مماثلة لتلك المستخدمة فى المسألة ١٠–١٣ (١) ، يمكن الحصول على β فى الحالات التى تنتج فيها الطريقة الجديدة متوسط مقاومة للكسر μ يساوى 305 N ، 315 N ، ... على سبيل المثال إذا كانت $\mu = 305$ N ، فإن 307 N معبرا عنها بوحدات معيارية $(307.0 - 305)/3 = 0.67$

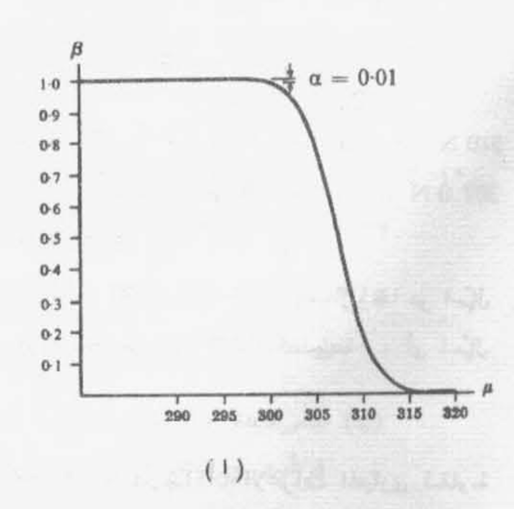


إذن

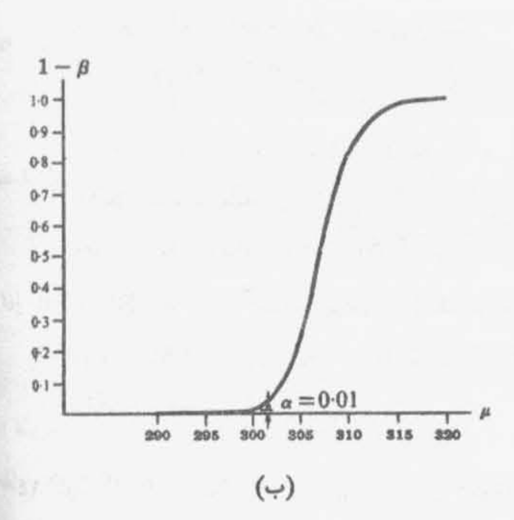
$0.7486 =$ (المساحة تحت المنحنى الطبيعى إلى اليمين وإلى يسار $z = 0.67$) $= \beta$ وبهذه الطريقة يمكن الحصول على الجدول ١٠–٣

جــدول ١٠–٣

μ	290	295	300	305	310	315	320
β	1·0000	1·0000	0·9900	0·7486	0·1587	0·0038	0·0000



(ا)



(ب)

شكل ١٠–٩

(ا) يظهر منحنى OC فى الشكل ١٠–٩ (ا) . من هذا المنحنى نجــد أن احتمال الابقاء على الطريقة القديمة فى التصنيع إذا كانت قوة المقاومة للكسر الجديدة أقل من 300 N ، من الناحية العملية يساوى ١ (فيما عدا عند مستوى المعنوية 0.01 عندما يكون متوسط الطريقة الجديدة هــو 300 N) ثم يأخذ المنحنى فى الهبوط إلى الصفر بحيث لا تكون هناك فرصة من الناحية العملية فى الاحتفاظ بالطريقة القديمة عندما يكون متوسط المقاومــة للكسر أكبر من 315 N .

(ب) يظهر منحنى القوة فى الشكل ١٠–٩ (ب) . وهو يعطى نفس التفسير مثل منحنى OC . والواقع أن المنحنين أساسا متكافئان .

١٠–١٥ لاختبار أن عملة غير متحيزه ($p = 0.5$) عن طريق عدد من رميات العملة ، فإننا نرغب فى فرض القيود التالية :

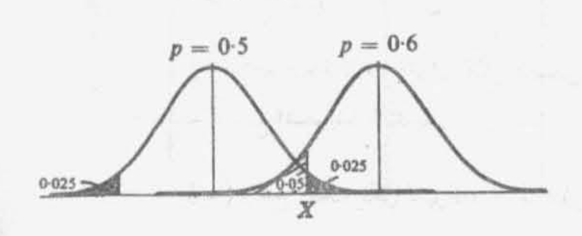
(أ) احتمال رفض الفرض عندما يكون الفرض صحيحا بالفعل 0.05 على الأكثر .

(ب) احتمال قبول الفرض أن p تختلف فعلا عن 0.5 بما يساوى 0.1 أو أكثر (أى $p \geqq 0.6$ أو $p \leqq 0.4$) يجب أن يكون هذا الاحتمال 0.05 على الأكثر .

حدد الحد الأدنى الضرورى لحجم العينة وأذكر قواعد اتخاذ القرار .

الحـــل :

وضعنا هنا حدوداً على الخطأ من النوع الأول والخطأ من النوع الثانى . على سبيل المثال ، فإن القيد المذكور فى (أ) يتطلب أن يكون احتمال الخطأ من النوع الأول $= \alpha = 0.05$ على الأكثر بينما القيد (ب) يتطلب أن يكون احتمال $\beta = 0.05$ وقد صور الوضع فى الشكل ١٠ – ١٠ .



شكل ١٠ – ١٠

اعتبر N هو حجم العينة المطلوب و X عدد الصور فى N رمية ، والتى إذا زاد عدد هذه الصور عن ذلك نرفض الفرض أن $p = 0.5$. من الشكل ١٠ – ١٠

(١) المساحة تحت المنحنى الطبيعى $p = 0.5$ إلى اليمين من $\dfrac{X - 0.5N}{0.5\sqrt{N}} = \dfrac{X - 0.5N}{\sqrt{N(0.5)(0.5)}} = \dfrac{X - Np}{\sqrt{Npq}}$ هى 0.025

(٢) المساحة تحت المنحنى الطبيعى $p = 0.6$ إلى اليسار من $\dfrac{X - 0.6N}{0.49\sqrt{N}} = \dfrac{X - 0.6N}{\sqrt{N(0.6)(0.4)}} = \dfrac{X - Np}{\sqrt{Npq}}$ هى 0.05

[من الناحية العملية المساحة بين $(X - 0.6N)/0.49\sqrt{N}$ و $[(N - X) - 0.6N]/0.49\sqrt{N}$ هى 0.05 ، (٢) تقريب جيد) .

من (١) $\dfrac{X - 0.5N}{0.5\sqrt{N}} = 1.96$ أو (٣) $X = 0.5N + 0.980\sqrt{N}$

من (٢) $\dfrac{X - 0.6N}{0.49\sqrt{N}} = -1.645$ أو (٤) $X = 0.6\,N - 0.806\sqrt{N}$

إذن من (٣) و (٤) ، $N = 318.98.$. أى أن حجم العينة يجب أن يكون على الأقل 319 ، أى يجب أن تقذف 319 مرة على الأقل . بوضع $N = 319$ فى (٣) أو (٤) فإن $X = 177.$.

لقيم $p = 0.5$ فإن $X - Np = 177 - 159.5 = 17.5$ بهذا فإننا نتبين القاعدة التالية لاتخاذ القرار :

(أ) اقبل الفرض $p=0.5$ إذا كان عدد الصور فى 319 رمية فى المدى من 159.5 ± 17.5 أى بين 142 و 177 صورة .

(ب) ارفض الفرض فيما عدا ذلك .

خرائط الرقابة :

١٠ - ١٦ ماكينة مصممة لإنتاج رولمان البلى متوسط قطره 5.74 mm وانحرافه المعيارى 0.08 mm . لتحديد ما إذا كانت الماكينة تعمل حسب المواصفات ، أخذت عينة من 6 من رولمان البلى كل ساعتين ، على سبيل المثال ، وحسب منها متوسط القطر

(أ) صمم قاعدة لاتخاذ القرار تمكن الشخص من أن يكون متأكداً بشكل معقول من أن مواصفات المنتجات تتفق مع المستويات المطلوبة .

(ب) وضح كيف يمكن تمثيل قاعدة اتخاذ القرار فى (أ) بيانياً .

الحـــل :

(أ) بدرجة ثقة 99.73% يمكن القول بأن متوسط العينة $\bar{X}$ يجب أن يقع فى المدى من $(\mu_{\bar{X}} - 3\sigma_{\bar{X}})$ إلى $(\mu_{\bar{X}} + 3\sigma_{\bar{X}})$ أو $(\mu - 3\sigma/\sqrt{N})$ إلى $(\mu + 3\sigma/\sqrt{N})$. وبما أن $\mu = 0.574$ و $\sigma = 0.08$ و $N = 6$ ، يترتب على ذلك أنه بدرجة ثقة 99.73% فإن متوسط العينة يجب أن يقع بين $(5.74 - 0.24/\sqrt{6})$ و $(5.74 + 0.24/\sqrt{6})$ أى بين 5.64 و 5.84 mm .

وبهذا فإن أسلوبنا لاتخاذ القرار سيكون كما يلى :

(1) إذا كان متوسط العينة واقع داخـــل المدى 5.64 إلى 5.84 mm افترض أن الماكينة تعمل حسب المواصفات .

(2) خلاف ذلك استنتج بأن الماكينة لاتعمل حسب المواصفات ، وابحث عن الأسباب .

(ب) يمكن الاحتفاظ بتسجيل لمتوسطات العينات وذلك بواسطة لوحة مثل تلك الموضحة فى الشكل ١٠ - ١١ ، وتسمى بخرائط مراقبة جودة الإنتاج . وفى كل وقت تحسب فيه متوسط العينة يمثل فى هذه الخريطة بنقطة . ومادامت هذه النقطة تقع بين الحد الأدنى 5.64 mm والحد الأعلى 5.84 mm ، فإن العملية تكون تحت المراقبة . وعندما تقع نقطة خارج حدود المراقبة هذه (مثل العينة الثالثة المسحوبة يوم الخميس) ، فإن هناك إمكانية أن هناك خطأ ما والمطلوب استقصاء أسبابه .

حدود المراقبة المذكورة أعلاه تسمى %99.73 حدود ثقة أو باختصار حدود 3σ . كذلك يمكن استخدام حدود ثقة ، مثل %99 أو %95 . ويعتمد الاختيار فى كل حالة على الظروف الخاصة .

شكل ١٠ – ١١

الاختبارات المتضمنة الفروق بين المتوسطات والنسب :

١٠ – ١٧ أعطى اختبار لفصلين يتكون الأول من 40 طالباً والثانى من 50 طالباً . فى الفصل الأول كان متوسط الدرجات 74 والانحراف المعيارى 8 ، بينما فى الفصل الثانى كان متوسط الدرجات هو 78 والانحراف المعيارى 7 .

هل هناك أختلاف معنوى فى أداء الفصلين عند مستوى المعنوية

(أ) 0.05 (ب) 0.01 ؟

الحـل :

افترض أن الفصلين مسحوبين من مجتمعين متوسطاتهما هى μ_1 و μ_2 . وبهذا فإننا يجب أن نقرر بين الفرضين :

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ ، والاختلاف يرجع تقريباً للصدفة

$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ ، وهناك فرق معنوى بين الفصلين .

· تحت الفرض H_0 كلا الفصلين مسحوبين من نفس المجتمع . المتوسط والانحراف المعيارى للفرق بين المتوسطين يعطى كما يلى :

$$\mu_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = 0 \text{ and } \sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\sigma_1^2/N_1 + \sigma_2^2/N_2} = \sqrt{8^2/40 + 7^2/50} = 1{\cdot}606$$

حيث استخدمنا الانحرافات المعيارية للعينات كتقدير لـ σ_1 و σ_2.

إذن $$z = (\bar{X}_1 - \bar{X}_2)/\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = (74 - 78)/1{\cdot}606 = -2{\cdot}49$$

(أ) إذا استخدمنا اختباراً من طرفين فإن النتائج تكون معنوية عند المستوى 0.05 إذا وقعت z خارج المدى من 1.96— إلى 1.96 . وبهذا نستنتج أنه عند المستوى 0.05 فإن هناك فرقاً معنوياً فى أداء الفصلين وأنه من المحتمل أن يكون أداء الفصل الثانى أفضل .

(ب) إذا استخدمنا اختباراً من طرفين فإن النتائج تكون معنوية عند المستوى 0.01 إذا وقعت z خارج المدى من 2.58 — إلى 2.58 . وبهذا نستنتج أنه لايوجد هناك فرق معنوى بين الفصلين .

وبما أن النتائج معنوية عند المستوى 0.05 ولكن غير معنوية عند المستوى 0.01 ، فإننا نستنتج أن النتائج محتملة المعنوية وذلك طبقاً للمصطلح المستخدم فى نهاية المسألة ١٠ — ٥ .

١٠ — ١٨ إذا كان متوسط أوزان 50 طالباً من المشاركين فى النشاط الرياضى فى كلية هو 68.2kg بانحراف معيارى 2.5 kg بينما كان متوسط وزن 50 طالباً لم يظهروا اهتماماً بالمشاركة فى النشاط الرياضى فى الكلية هو 67.5 kg بانحراف معيارى 2.8 kg . اختبر الفرض بأن الطلبة الذين يساهمون فى النشاط الرياضى أثقل وزناً من غيرهم فى الكلية.

الحـــل :

يجب أن نقرر بين الفرضين :

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ لايوجد فرق بين متوسط الأوزان

$H_1 : \mu_1 > \mu_2$ ، متوسط أوزان المجموعة الأولى أكبر من متوسط أوزان المجموعة الثانية .

تحت الفرض H_0 :

$$\mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = 9 \quad \text{and} \quad \sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{\sigma_1^2/N_1 + \sigma_2^2/N_2} = \sqrt{(2{\cdot}5)^2/50 + (2{\cdot}8)^2/50} = 0{\cdot}53$$

حيث استخدمنا الانحراف المعيارى للعينة كتقدير لـ σ_1 و σ_2

إذن $$z = (X_1 - X_2)/\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = (68{\cdot}2 - 67{\cdot}5)/0{\cdot}53 = 1{\cdot}32.$$

باستخدام اختبار من طرف واحد عند مستوى المعنوية 0.05 ، فإننا نرفض الفرض H_0 إذا كانت قيم z أكبر من 1.645 . وبهذا فإنه لن يمكننا رفض الفرض عند هذا المستوى من المعنوية .

يجب ملاحظة ، أنه يمكن رفض الفرض عند المستوى 0.10 إذا كنا على استعداد لتحمل مخاطرة أن نقع فى الخطأ باحتمال 0.10 ، أى فرصة واحدة كل 10 .

١٠ - ١٩ بأى مقدار يجب زيادة حجم العينة فى كل من المجموعتين فى المسألة ١٠ — ١٨ بحيث يكون الفرق المشاهد 0.7kg

فى متوسط الأوزان معنوياً عند مستوى المعنوية (أ) 0.05 (ب) 0.01 ؟

الحـل :

افترض أن حجم العينة فى كل مجموعة هو N وأن الانحراف المعيارى للمجموعتين لن يتغير . بهذا يكون تحت الفرض H_0 فإن

$$\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{\sigma_1^2/N + \sigma_2^2/N} = \sqrt{[(2\cdot5)^2 + (2\cdot8)^2]/N} = \sqrt{14\cdot09/N} = 3\cdot75/\sqrt{N}$$

قيمة z للفرق المشاهد 0.7 kg بين متوسط الأوزان هى

$$z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}} = \frac{0\cdot7}{3\cdot75/\sqrt{N}} = \frac{0\cdot7\sqrt{N}}{3\cdot75}.$$

(أ) الفرق المشاهد سيكون معنوياً عند المستوى 0.05 إذا كانت $1.645 = 0.7\sqrt{N}/3.75$ ، على الأقل بحيث أن N يجب أن تكون 78 على الأقل . وبهذا يجب أن نزيد حجم العينة فى كل مجموعة بما مقداره $28 = (78 - 50)$ على الأقل .

طريقة اخرى :

$$0\cdot7\sqrt{N}/3\cdot75 \geqq 1\cdot645,\ \sqrt{N} \geqq (3\cdot75)(1\cdot645)/0\cdot7,\ \sqrt{N} \geqq 8\cdot8,\ N \geqq 77\cdot4 \text{ or } N \geqq 78$$

(ب) الفرق المشاهد سيكون معنوياً عند المستوى 0.01 إذا كانت

$$0\cdot7\sqrt{N}/3\cdot75 \geqq 2\cdot33,\ \sqrt{N} \geqq (3\cdot75)(2\cdot33)/0\cdot7,\ \sqrt{N} \geqq 12\cdot5,\ N \geqq 156\cdot3 \text{ or } N \geqq 157$$

وبهذا يجب أن تزيد حجم العينة فى كل مجموعة بما لايقل عن $107 = (157 - 50)$

١٠ - ٢٠ مجموعتان ، B و A ، تتكون كل منهما من 100 شخص مصابين بمرض معين . أعطى مصل للمجموعة A ولم يعط للمجموعة B (والتى تسمى بالمجموعة الضابطة) ، بخلاف ذلك ، فإن المجموعتين يعاملان معاملة متماثلة . وقد وجد أنه فى المجموعة A شفى 75 شخصاً من المرض ، بينما فى المجموعة B شفى 65 شخصاً . اختبر الفرض أن المصل يساعد على الشفاء من المرض باستخدام مستوى المعنوية (أ) 0.01

(ب) 0.05 ، (ب) 0.10

الحـل :

اعتبر أن p_1 تمثل النسبة فى المجتمع للأشخاص الذين شفوا باستخدام المصل ، وأن p_2 تمثل النسبة فى المجتمع للأشخاص الذين شفوا بدون استخدام المصل .

يجب أن نقرر بين فرضين :

$H_0: p_1 = p_2$ ، والفروق المشاهدة ترجع إلى الصدفة ، أى أن المصل غير فعال .

$H_0 : p_1 > p_2$ ، أى أن المصل فعال .

تحت الفرض H_0 ،

$$\mu_{P_1 - P_2} = 0 \quad \text{and} \quad \sigma_{P_1 - P_2} = \sqrt{pq(1/N_1 + 1/N_2)} = \sqrt{(0{\cdot}70)(0{\cdot}30)(1/100 + 1/100)} = 0{\cdot}0648$$

وقد استخدمنا كتقدير لـ p متوسطة نسبة الذين شفوا من المرض فى المجموعتين وهى $0.70 = (75+ 65)/200$

و $q = 1 - p = 0.30$ إذن

$$z = (P_1 - P_2)/\sigma_{P_1 - P_2} = (0{\cdot}750 - 0{\cdot}650)/0{\cdot}0648 = 1{\cdot}54.$$

(أ) إذا استخدمنا اختبار من طرف واحد عند مستوى المعنوية 0.01 فإننا يجب أن نرفض الفرض H_0 إذا كانت قيم z أكبر من 2.33 . وبما أن قيمة z هى 1.54 فقط ، فإننا نستنتج عند هذا المستوى من المعنوية بأن الفروق ترجع للصدفة .

(ب) إذا استخدمنا اختباراً من طرف واحد عند مستوى المعنوية 0.05 ، فإننا يجب أن نرفض الفرض H_0 إذا كانت قيم z أكبر من 1.645 وبهذا نستنتج أن النتائج ترجع للصدفة عند هذا المستوى

(ج) إذا استخدمنا اختباراً من طرف واحد عند مستوى المعنوية 0.01 . فإننا يجب أن نرفض H_0 إذا كانت قيم z أكبر من 1.28 . وبما أن هذا تحقق ، فإننا نستنتج بأن المصل فعال عند مستوى المعنوية 0.01 .

لاحظ أن استنتاجاتنا الموضحة أعلاه تعتمد على مقدار استعدادنا لتحمل مخاطرة الوقوع فى خطأ . فإذا كانت النتائج ترجع فعلا للصدفة ولكننا ننتهى إلى أنها ترجع إلى المصل (خطأ من النوع الأول) ، فقد نستمرفى إعطاء المصل لمجموعة كبيرة من الأشخاص ثم نجد أنه غير فعال . وهذه مخاطرة قد لانكون على استعداد دائماً لتحملها . ومن الناحية الأخرى ، قد نقرر أن المصل لايفيد بينما هو فى الواقع فعال (خطأ من النوع الثانى) . مثل هذا الاستنتاج خطير وخاصة إذا كانت حياة بشرية هى موضع المخاطرة .

١٠ - ٢١ حل المسألة السابقة إذا كانت كل مجموعة مكونة من 300 شخص شفى من المجموعة A عدد 225 شخصاً ومن المجموعة B عدد 195 شخصاً .

الحــل :

لاحظ أن نسبة الذين شفوا فى هذه الحالة هى $225/300 = 0.750$ للمجموعة A ، $195/300 = 0.650$ للمجموعة B وهى نفس النسبة فى المسألة السابقة . تحت الفرض H_0

$$\mu_{P_1 - P_2} = 0 \quad \text{and} \quad \sigma_{P_1 - P_2} = \sqrt{pq(1/N_1 + 1/N_2)} = \sqrt{(0{\cdot}70)(0{\cdot}30)(1/300 + 1/300)} = 0{\cdot}0374$$

حيث استخدمنا $0.70 = (195 + 225)/600$ كتقدير ل p.

إذن

$$z = (P_1 - P_2)/\sigma_{P_1 - P_2} = (0{\cdot}750 - 0{\cdot}650)/0{\cdot}0374 = 2{\cdot}67$$

بما أن قيمة z أكبر من 2.33 ، فيمكن رفض الفرض عند مستوى معنوية 0.01 . أى نقرر أن المصل فعال باحتمال 0.01 أن نكون مخطئين فى هذا القرار .

هذا يوضح كيف أن زيادة حجم العينة يؤدى إلى زيادة مأمونية القرارات . وفى كثير من الأحيان ، قد يكون من غير العملى زيادة حجم العينة . فى مثل هذه الحالات قد نكون ملزمين باتخاذ قرارات مبينة على المعلومات المتاحة وأن نرضى بمخاطرة أكبر ناتجة عن اتخاذ قرارات خاطئة .

١٠ - ٢٢ فى دراسة بالعينة لقياس الرأى أخذت عينة من 300 ناخب فى المنطقة A و 200 ناخب فى المنطقة B حيث أظهرت أن 56% من المنطقة A و 48% من المنطقة B فى صالح مرشح معين . عند مستوى معنوية 0.05 ، اختبر الفرض القائل أن (أ) هناك اختلاف بين المنطقتين (ب) المرشح مفضل فى المنطقة A.

الحـــل :

اعتبر أن p_1 هى النسبة من جميع الأصوات فى المنطقة A التى فى صالح المرشح وأن p_2 هى النسبة من جميع الأصوات فى المنطقة B التى فى صالح هذاا المرشح

تحت الفرض $H_0 : p_1 = p_2$ ، فإن

$$\mu_{P_1 - P_2} = 0 \text{ and } \sigma_{P_1 - P_2} = \sqrt{pq(1/N_1 + 1/N_2)} = \sqrt{(0{\cdot}528)(0{\cdot}472)(1/300 + 1/200)} = 0{\cdot}0456$$

حيث استخدمنا كتقدير لقيم p و q القيم $[(0{\cdot}56)(300) + (0{\cdot}48)(200)]/500 = 0{\cdot}528 \text{ and } (1 - 0{\cdot}528) = 0{\cdot}472$

إذن $$z = (P_1 - P_2)/\sigma_{P_1 - P_2} = (0{\cdot}560 - 0{\cdot}480)/0{\cdot}0456 = 1{\cdot}75$$

(أ) إذا كنا نريد فقط تحديد ما إذا كان هناك فرق بين المنطقتين ، فيجب أن نقرر بين الفرضين $(H_0 : p_1 = p_2)$ و $(H_1 : p_1 \neq p_2)$ وهذا يتضمن اختباراً من طرفين .

على أساس اختبار من طرفين عند مستوى المعنوية 0.05 ، فإننا نرفض H_0 إذا كانت z خارج الفترة من -1.96 إلى 1.96. وبما أن $z = 1.75$ تقع داخل هذه الفترة ، فلايمكننا رفض H_0 عند هذا المستوى أى لايوجد فرق معنوى بين المنطقتين .

(ب) إذا أردنا تقرير ما إذا كان المرشح مفضل فى المنطقة A ، فيجب أن نقرر بين الفروض $(H_0 : p_1 = p_2)$ و $(H_1 : p_1 > p_2)$. وهذا يتضمن اختباراً من طرف واحد .

على أساس اختبار من طرف واحد عند مستوى المعنوية 0.05 ، فإننا نرفض H_0 إذا كانت z أكبر من 1.645 و بما أن هذه هى الحالة، فيمكننا رفض H_0 عند هذا المستوى ، ونستنتج أن المرشح مفضل فى المنطقة A

اختبارات تتضمن توزيع ذى الحدين :

١٠ – ٢٣ أعطى مدرس اختباراً مفاجئاً يتضمن 10 أسئلة من النمط الذى تكون الإجابة عليه : صواب – خطأ . لاختبار الفرض بأن الطالب يخمن الإجابة ، استخدمت القاعدة التالية فى اتخاذ القرار :

إذا كانت هناك 7 أو أكثر من الإجابات صحيحة فإن الطالب لايخمن

إذا كانت هناك أقل من 7 إجابات صحيحة فالطالب يخمن .

أوجد احتمال رفض الفرض عندما يكون صحيحاً .

الحــل :

اعتبر أن p هى احتمال الإجابة الصحيحة على السؤال .

احتمال إجابة X مسألة إجابة صحيحة من 10 مسائل هى $_{10}C_X p^X q^{10-X}$ حيث $q = 1 - p$

بهذا فتحت الفرض أن $p = 0.5$ (أن الطالب يخمن) ؛

Pr { 7 أو أكثر إجابة صحيحة } = Pr { 7 إجابات صحيحة } + Pr { 8 إجابات صحيحة }
+ Pr { 9 إجابة صحيحة } + Pr { 10 إجابات صحيحة }

$$= {}_{10}C_7(\tfrac{1}{2})^7(\tfrac{1}{2})^3 + {}_{10}C_8(\tfrac{1}{2})^8(\tfrac{1}{2})^2 + {}_{10}C_9(\tfrac{1}{2})^9(\tfrac{1}{2}) + {}_{10}C_{10}(\tfrac{1}{2})^{10} = 0{\cdot}1719$$

بهذا فإن احتمال أن نصل إلى قرار بأن الطالب لايخمن الإجابة عندما يكون بالفعل يخمن الإجابة هو 0.1719 لاحظ أن هذا احتمال الخطأ من النوع الأول .

١٠ – ٢٤ فى المسألة السابقة ، أوجد احتمال قبول الفرض $p = 0.5$ عندما تكون القيمة p الفعلية هى 0.7

الحــل :

تحت الفرض $p = 0.7$ ،

Pr { أقل من 7 إجابات صحيحة } = 1 − Pr { 7 إجابات أو أكثر صحيحة }

$$= 1 - [{}_{10}C_7(0{\cdot}7)^7(0{\cdot}3)^3 + {}_{10}C_8(0{\cdot}7)^8(0{\cdot}3)^2 + {}_{10}C_9(0{\cdot}7)^9(0{\cdot}3) + {}_{10}C_{10}(0{\cdot}3)^{10}] = 0{\cdot}3504$$

١٠ - ٢٥ فى المسألة ١٠ - ٢٣ ، أوجز احتمال قبول الفرض $p = 0.5$ عندما تكون القيمة الفعلية

(أ) $p = 0.6$ (ب) $p = 0.8$

(ج) $p = 0.9$ (د) $p = 0.3$

(هـ) $p = 0.2$ (و) $p = 0.1$

الحـــل :

(أ) إذا كانت $p = 0.6$ فإن الاحتمال المطلوب

$$= 1 - \text{Pr}\{7 \text{ إجابات صحيحة}\} + \text{Pr}\{8 \text{ إجابات صحيحة}\} + \text{Pr}\{9 \text{ إجابات صحيحة}\} + \text{Pr}\{10 \text{ إجابات صحيحة}\}$$

$$= 1 - [\text{Pr}\{7 \text{ correct}\} + \text{Pr}\{8 \text{ correct}\} + \text{Pr}\{9 \text{ correct}\} + \text{Pr}\{10 \text{ correct}\}]$$
$$= 1 - [{}_{10}C_7(0{\cdot}6)^7(0{\cdot}4)^3 + {}_{10}C_8(0{\cdot}6)^8(0{\cdot}4)^2 + {}_{10}C_9(0{\cdot}6)^9(0{\cdot}4) + {}_{10}C_{10}(0{\cdot}6)^{10}] = 0{\cdot}618$$

النتائج من (ب)، (ج) . . . إلى (و) يمكن الحصول عليها بنفس الطريقة وهى موضحة بالجدول ١٠ - ٤ إلى جانب القيم المقابلة ! $p = 0.7$ و $p = 0.6$.

لاحظ أن الاحتمال يرمز له بالرمز β (الخطأ من النوع الثانى) .

كذلك يشمل الجدول القيم المقابلة ! $p = 0.5$ وهى $\beta = 1 - 0.1719 = 0.828$ من المسألة ١٠ - ٢٣ ، $p = 0.7$ من المسألة ١٠ - ٢٤ .

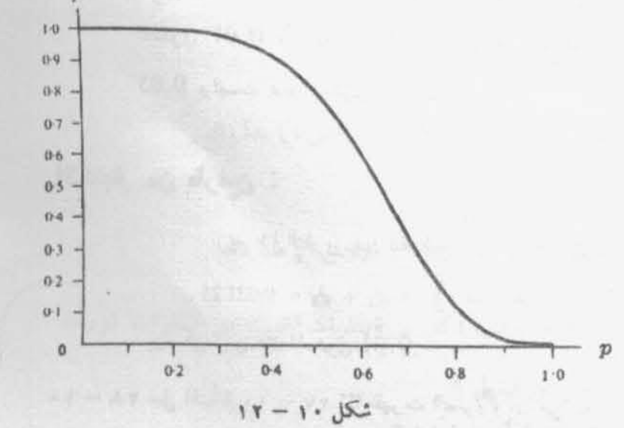
جـــدول ١٠ - ٤

p	0·1	0·2	0·3	0·4	0·5	0·6	0·7	0·8	0·9
β	1·000	0·999	0·989	0·945	0·828	0·618	0·350	0·121	0·13

١٠ - ٢٦ استخدم المسألة ١٠ - ٢٥ لتكوين الرسم البيانى لقيم β مقابل p ، أى منحنى توصيف العمليات لقاعدة اتخاذ القرار فى المسألة ١٠ - ٢٣

الحـــل :

الرسم البيانى المطلوب موضح بالشكل ١٠ - ١٢ لاحظ التماثل بين الرسم ومنحنى OC للمسألة ١٠ - ١٤ .



شكل ١٠ - ١٢

إذا رسمنا $(1-\beta)$ مقابل p ، فإننا نحصل على منحنى قوة الاختبار .

يوضح الشكل أن قاعدة اتخاذ القرار المعطاة أكثر قوة فى رفض $p = 0.5$ عندما تكون قيم p الفعلية $p \leqq 0.4$ أو $p \geqq 0.8$.

١٠ – ٢٧ قذفت عملة 6 مرات فأظهرت الصورة فى الست مرات هل يمكن أن نستنتج عند مستوى المعنوية (أ) 0.05 (ب) 0.01 . أن العملة متحيزة ؟

اعتبر كلا من الاختبار من طرف واحد والاختبار من طرفين .

الحـــل :

اعتبر أن p تمثل احتمال ظهور الصورة فى رمية واحده للعملة .

تحت الفرض $H_0 : p = 0.5$ (أى العملة غير متحيزة) ،

$$P(X) = \Pr\{ X \text{ صورة فى 6 رميات } \} = {}_6C_X (\tfrac{1}{2})^X (\tfrac{1}{2})^{6-X}$$

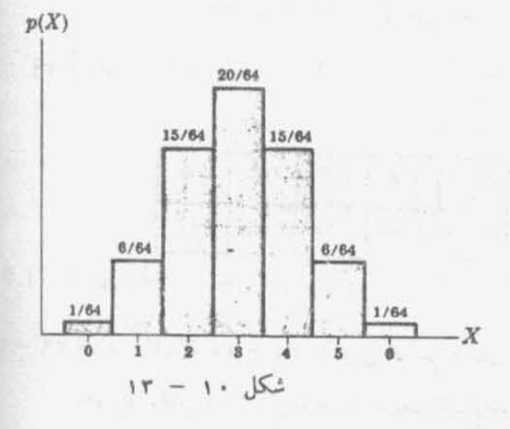
$$= {}_6C_X/64$$

إذن فاحتمال ظهور 6 ,5 ,4 ، ,3 ,2 ,1 ,0 صورة

هى على الترتيب $\frac{1}{64}, \frac{6}{64}, \frac{15}{64}, \frac{20}{64}, \frac{15}{64}, \frac{6}{64}$ and $\frac{1}{64}$.

كما هوموضح بيانياً فى التوزيع الاحتمالى بالشكل ١٠ – ١٣

الاختبار من طرف واحد :



شكل ١٠ – ١٣

نريد هنا التقرير بين الفرضين $(H_0 : p = 0.5)$

و $(H_1 : p > 0.5)$

وبما أن $\Pr\{\text{6 صور}\} = \frac{1}{64} = 0.01562$

و $\Pr\{\text{5 صور أو 6 صور}\} = \frac{6}{64} + \frac{1}{64} = 0.1094$،

فيمكن رفض H_0 عند المستوى 0.05 وليس عند المستوى 0.01 (النتائج المشاهدة معنوية عند المستوى 0.05 وليست عند المستوى 0.01) .

الاختبار من طرفين :

نريد هنا التقرير بين الفرضين $(H_0 : p = 0.5)$ و $(H_1 : p \neq 0.5)$ بما أن

$\Pr\{\text{صفر صورة أو 6 صور}\} = \frac{1}{64} + \frac{1}{64} = 0.03125$ ، فيمكن رفض H_0 عند المستوى 0.05

ولـكن ليس عند المستوى 0.01.

١٠ – ٢٨ حل المسألة ١٠ – ٢٧ إذا ظهرت الصورة 5 مرات .

الحـل :

اختبار من طرف واحد :

بما أن $\frac{6}{64}+\frac{1}{64}=\frac{7}{64}=0.1094$ { 5 أو 6 صور } Pr ، فلا يمكن رفض H_0 عند مستوى 0.05 أو 0.01 .

اختبار من طرفين :

بما أن $2(\frac{7}{64})=0.2188$ { صفر أو واحد أو 5 أو 6 صور } Pr ، فلايمكن رفض H_0 عند المستوى 0.05 أو 0.01

مسـائل اضافية

اختبارات الأوساط والنسب باستخدام التوزيع الطبيعى :

١٠ – ٢٩ وعاء به كرات أما حمراء أو زرقاء . لاختبار فرض تساوى نسبة هذين اللونين قمنا بسحب 64 كرة مع الإرجاع ، وتمّ ملاحظة لون الكرة وأتخذنا القاعدة التالية فى اتخاذ القرار

أقبل الفرض إذا كان عدد الكرات الحمراء المسحوبة بين 28 و 36 . ارفض الفرض فيما عدا ذلك .

(أ) أوجد احتّمال رفض الفرض عندما يكون بالفعل صحيح .

(ب) عبر بيانياً عن القاعدة السابقة فى اتخاذ القرار وعن النتيجة الّتى حصلت عليها فى (ب) .

ج : (أ) 0.2606

١٠ – ٣٠ (أ) ماهى القاعدة الّتى يجب أن تتبناها فى اتخاذ القرار فى المسألة ١٠ – ٢٩ إذا كان المطلوب أن يكون احتّمال رفض الفرض عندما يكون بالفعل صحيح لايجاوز 0.01 على الأكثر . أى مستوى المعنوية 0.01 ؟

(ب) عند أى مستوى ثقة تقبل الفرض ؟

(جـ) ماهى قاعدة اتخاذ القرار إذا حددنا مستوى المعنوية عند 0.05 ؟

ج :(أ) أقبل الفرض إذا كانت الكرات الحمراء المسحوبة بين 22 و 42 ، ارفض فيما عداً ذلك .

(ب) 0.99

(جـ) اقبل الفرض إذا كانت الكرات الحمراء المسحوبة بين 24 و 40 ، ارفض فيما عداً ذلك .

١٠ – ٣١ افترض أننا نريد فى المسألة ١٠ – ٢٩ اختبار الفرض أن هناك نسبة أكبر من الكرات الحمراء عن الكرات الزرقاء

(أ) ماهو فرض العدم الذى يجب أن تفرضه وما هو الفرض البديل ؟

(ب) هل يجب أن نستخدم اختباراً من طرف واحد أو اختباراً من طرفين ؟

(جـ) ماهي قاعدة اتخاذ القرار التي سوف تتخذها إذا كان مستوى المعنوية هو 0.05 ؟

(د) ماهي قواعد اتخاذ القرار إذا كان مستوى المعنوية 0.01 ؟

ج : (أ) $H_1 : p > 0.5.$ و $H_0 : p = 0.5$

(ب) اختبار من طرف واحد

(جـ) ارفض H_0 إذا سحبت أكثر من 39 كرة حمراء ، اقبل الفرض فيما عدا ذلك (أو لاتتخذ أى قرار) .

(د) ارفض H_0 إذا سحبت أكثر من 41 كرة حمراء ، اقبل الفرض فيما عدا ذلك (أو لاتتخذ أى قرار) .

١٠ – ٣٢ قذفت زهرتين طاولة 100 مرة وسجل عدد المرات التي ظهر فيها مامجموعه « سبعة » ووجد أنه 23 مرة . اختبر الفرض أن الزهرتين غير متحيزتين ، باستخدام (أ) اختبار من طرفين (ب) اختبار من طرف واحد . مستخدماً مستوى معنوية 0.05 . ناقش الأسباب – إذا وجدت – لتفضيل أحد الاختبارين عن الآخر .

ج : (أ) لايمكن رفض الفرض عند المستوى 0.05 .

(ب) يمكن رفض الفرض عند المستوى 0.05 .

١٠ – ٣٣ حل المسألة ١٠ – ٣٢ إذا كان مستوى المعنوية هو 0.01 .

ج : لايمكن رفض الفرض عند المستوى 0.01 فى أى من (أ) أو (ب)

١٠ – ٣٤ يدعى منتج أن 95% على الأقل من المعدات التي يمد بها مصنع مطابقة للمواصفات . تم اختبار عينة من 200 وحدة من المعدات ووجد أن بها 18 وحدة تالفة . اختبر ادعاء المنتج عند مستوى المعنوية

(أ) 0.01 (ب) 0.05

ج : يمكن رفض ادعائه عند كلا المستويين باستخدام اختبار من طرف واحد .

١٠ – ٣٥ نسبة الذين حصلوا على تقدير A's فى مادة الطبيعة فى إحدى الجامعات خلال فترة طويلة من الزمن كانت 10% . خلال فصل دراسى معين حصل 40 طالباً على تقدير A من مجموعة من 300 طالب . اختبر معنوية هذه النتيجة عند المستوى (أ) 0.05 (ب) 0.01.

ج : باستخدام اختبار من طرف واحد ، النتيجة معنوية عند المستوى 0.05 ولكن غير معنوية عند المستوى 0.01

١٠ – ٣٦ من الخبرة وجد أن متوسط المقاومة للقطع لحزمة من الخيوط هو 9.72 N بانحراف معيارى 1.40 N . فى الوقت الحاضر سحبت عينة من 36 حزمة من الخيوط وكان متوسط مقاومتها للقطع هو 8.93 N هل يمكن الاستنتاج عند مستوى معنوية (أ) 0.05 (ب) 0.01 بأن الخيوط أصبحت ذات جودة أقل ؟

ج : نعم ، عند كلا المستويين ، باستخدام أختبار من طرف واحد فى كل حالة .

١٠ – ٣٧ فى أحد الاختبارات التى أعطيت لعدد كبير من المدارس المختلفة ، كان متوسط الدرجات هو 74.5 والانحراف المعيارى 8.0 . فى مدرسة معينة حيث أدى 200 طالب هذا الامتحان ، كل متوسط درجاتهم 75.9 .

ناقش معنوية هذه النتيجة عند المستوى 0.05 من وجهة نظر :

(أ) الاختبار من طرف واحد (ب) الاختبار من طرفين ، وضح استنتاجاتك بدقة على ضوء هذه الاختبارات .

ج : النتيجة معنوية عند المستوى 0.05 فى كل من الاختبارات من طرف واحد والاختبار من طرفين .

١٠ – ٣٨ حل المسألة ١٠ – ٣٧ إذا كان مستوى المعنوية هو 0.01 .

ج : النتيجة معنوية عند مستوى 0.01 إذا كان الاختبار من طرف واحد أما إذا كان الاختبار من طرفين فالنتيجة غير معنوية .

منحنيات توصيف العمليات :

١٠ – ٣٩ باستخدام المسألة ١٠ – ٢٩ ، أوجد احتمال قبول الفرض بأن هناك نسباً متساوية من الكرات الحمراء والكرات الزرقاء إذا كانت النسبة الفعلية للكرات الحمراء هى (أ) 0.6 (ب) 0.7 (جـ) 0.8 (د) 0.9 (هـ) 0.3

ج : (أ) 0.3112 (ب) 0.0118 (جـ) 0 (د) 0 (هـ) 0.0118 .

١٠ – ٤٠ مثل بيانياً نتائج المسألة السابقة وذلك برسم (أ) β مقابل p (ب) $(1 - \beta)$ مقابل p .

قارن هذه الأشكال بتلك الموضحة فى المسألة ١٠–١٢ باعتبار أن مايقابل الكرات الحمراء والزرقاء هى الصور والكتابة على الترتيب .

١٠ – ٤١ (أ) حل المسائل ١٠ – ١٣ و ١٠ – ١٤ إذا اتفق على اختبار 400 كابل (ب) ماهى الاستنتاجات التى تصل إليها فيما يختص بالخطأ من النوع الثانى عندما تكبر حجم العينة ؟

١٠ – ٤٢ كون (أ) منحنى OC (ب) منحنى قوة الاختبار المقابل للمسألة ١٠ – ٣١ . قارن هذه المنحنيات بمنحنيات المسألة ١٠ – ١٤ .

خرائط الرقابة على الانتاج :

١٠ – ٤٣ إذا كان من المعروف فى الماضى أن نوعاً معيناً من الخيوط من إنتاج أحد المصانع متوسط قوة مقاومته للقطع هو 8.64 N بانحراف معيارى 1.28 N .

لتحديد ما إذا كان الإنتاج يتم طبقاً للمواصفات ، أخذ عينة من 16 قطعة .

أوجد (أ) 99.73% أو 3σ (ب) 99% (جـ) 95%

حدود مراقبة فى خرائط الرقابة على الإنتاج . ووضح تطبيقاتها .

ج : (أ) 6

(ب) 4 مسامير تالفة

١٠ - ٤٤ متوسط نسبة الإنتاج التالف فى مصنع لإنتاج المسامير هو 3% . للمحافظة على هذا المستوى فى الأداء ، تسحب عينة حجمها 200 مسمار من المسامير المنتجة كل 4 ساعات ويتم اختبارها . أوجد (أ) 99%

(ب) 95% ، حدود المراقبة لعدد المسامير التالفة فى كل عينة . لاحظ أننا نحتاج فى هذه الحالة ألى حد المراقبة الأعلى فقط .

ج : حد المراقبة الأعلى هو على الترتيب (أ) 6 (ب) 4 مسامير تالفة .

اختبارا تتضمن الفروق بين المتوسطات والنسب :

١٠ - ٤٥ عينة مكونة من 100 لمبة كهربائية من إنتاج المصنع A ، كان متوسط عمرها الإنتاجى 1190 ساعة وانحرافها المعيارى 90 ساعة . عينة أخرى من 75 لمبة من إنتاج مصنع B كان متوسط عمرها الأنتاجى 1230 ساعة وانحرافها المعيارى 120 ساعة . هل هناك فرق معنوى بين متوسط الأعمار الإنتاجية للنوعين عند مستوى المعنوية

(أ) 0.05 (ب) 0.01 ؟

ج : (أ) نعم (ب) لا .

١٠ - ٤٦ فى المسألة السابقة اختبر الفرض أن لمبات المصنع B أكثر جودة من لمبات المصنع A باستخدام مستوى المعنوية

(أ) 0.05 (ب) 0.01

اشرح الفرق بين هذا الاختبار والاختبار فى المسألة السابقة . هل النتيجة تناقض نتيجة المسألة السابقة .

ج : باستخدام اختبار من طرف واحد لكل من مستويات المعنوية يظهر أن النوع B أكثر جودة من A .

١٠ - ٤٧ فى اختبار مبادىء الهجاء ، كان متوسط درجات 32 ولد هو 72 بانحراف معيارى 8 ، بينما متوسط درجات 36 بنت هو 75 بانحراف معيارى 6 . اختبر الفرض عند (أ) 0.05 (ب) 0.01 مستوى معنوية بأن البنات أفضل فى الهجاء من الأولاد .

ج : باستخدام اختبار من طرف واحد نجد أن الفروق معنوية عند مستوى 0.05 ولكن غير معنوية عند مستوى 0.01 .

١٠ – ٤٨ لاختبار تأثير نوع جديد من الإسمدة على إنتاج القمح ، قسمت قطعة أرض إلى 60 مربع متساوى المساحة ، كل قطعة لها نفس المواصفات مثل نوع التربة ومقدار تعرضها للشمس وغير ذلك . استخدم السماد الجديد فى 30 قطعة والسماد القديم فى القطعة الباقية . كان متوسط الحزم من القمح التى تم حصادها لكل مربع من الأرض التى استخدم فيها السماد الجديد هو 18.2 لتر بانحراف معيارى 0.63 لتر . والمتوسط المقابل للمربعات التى استخدم فيها السماد القديم هو 17.8 بانحراف معيارى 0.54 باستخدام مستوى المعنوية (أ) 0.05 (ب) 0.01 . اختبر الفرض بأن السماد الجديد أفضل من السماد القديم .

ج : باستخدام اختبار من طرف واحد نجد أن السماد الجديد أفضل من السماد القديم عند كل من مستويات المعنوية .

١٠ – ٤٩ عينة عشوائية من 200 مسمار من إنتاج A و 100 مسامير من إنتاج B وجد أن 19 مسمار من انتاج A و 5 مسامير من انتاج B تالف . اختبر الفرض القائل أن

(أ) هناك اختلاف فى أداء الماكينتين .

(ب) الماكينة B تعمل بصورة أفضل من الماكينة A .

استخدم مستوى المعنوية 0.05 .

ج : (أ) يظهر الاختبار من طرفين بأنه لايوجد اختلاف فى أداء الماكينتين عند المستوى 0.05 .

(ب) اختبار من طرف واحد يظهر أن B لاتعمل بصورة أفضل من A عند المستوى 0.05 .

١٠ – ٥٠ وعاءان ، A و B ، يحتويان على عدد متساو من الكرات ، ولكن نسبة الكرات الحمراء فى كل منها مختلف . سحبت عينة حجمها 50 كرة مع الإرجاع من كل من الوعائين ، وقد ظهر بها 32 كرة حمراء من الوعاء A و 23 . كره حمراء من الوعاء B باستخدام مستوى المعنوية 0.05 ، اختبر الفرض القائل أن (أ) الوعاء أن يحتويان على نسب متساوية من الكرات الحمراء (ب) A يحتوى على نسبة أكبر من الكرات الحمراء عن B .

ج : (أ) اختبار من طرفين عند مستوى المعنوية 0.05 يفشل فى رفض فرض تساوى النسب

(ب) اختبار من طرف واحد عند المستوى 0.05 يدل على أن A يحتوى على نسبة أكبر من الكرات الحمراء عن B .

اختبارات تتضمن توزيعات ذى الحدين :

١٠ – ٥١ بالرجوع إلى المسألة ١٠ – ٢٣ ، أوجد أقل عدد من الأسئلة يجب أن يجيب عليها الطالب إجابة صحيحة قبل أن يكون المدرس متأكداً بأن الطالب لايخمن الإجابة تقريباً وذلك عند مستوى معنوية (أ) 0.05 (ب) 0.01 (جـ) 0.001 (د) 0.06 . ناقش النتائج .

ج : (أ) 9 (ب) 10 (جـ) 10 (د) 8

١٠ – ٥٢ كون الأشكال البيانية كالتى تمت فى المسألة ١٠ – ١ لبيانات المسألة ١٠ – ٢٤

١٠ – ٥٣ حل المسائل ١٠ – ٢٣ إلى ١٠ – ٢٥ إذا استبدلت 7 فى قاعدة اتخاذ القرار فى المسألة ١٠ – ٢٣ إلى 8 .

١٠ - ٥٤ قذفت عملة 8 مرات فأظهرت الصورة 7 مرات . هل يمكن رفض الفرض بأن العملة غير متحيزة عند مستوى المعنوية
(أ) 0.05 (ب) 0.10 (جـ) 0.01 ؟

استخدم اختبار من طرفين .

ج : (أ) لا (ب) نعم (جـ) لا

١٠ - ٥٥ حل المسألة ١٠ - ٥٤ إذا استخدمنا اختباراً من طرف واحد .

ج : (أ) نعم (ب) نعم (جـ) لا

١٠ - ٥٦ حل المسألة ١٠ - ٥٤ إذا اظهرت العملة الصورة 8 مرات .

ج : (أ) نعم (ب) نعم (جـ) نعم

١٠ - ٥٧ حل المسألة ١٠ - ٥٤ إذا اظهرت العملة الصورة 6 مرات .

ج : (أ) لا (ب) لا (جـ) لا

١٠ - ٥٨ وعاء يحتوى على عدد كبير من الكرات الحمراء والبيضاء . سحبت عينة عشوائية من 8 كرات وأظهرت 6 كرات بيضاء و 2 كرة حمراء . باستخدام اختبار ومستوى معنوية مناسبين ، ناقش نسب الكرات البيضاء والحمراء الوعاء .

١٠ - ٥٩ ناقش كيف يمكن استخدام نظرية المعاينة فى استقصاء نسب أنواع السمك الموجود فى بحيرة .

الفصل الحادى عشر

نظرية العينات الصغيرة

توزيع « استودينت » ت
وتوزيع كا ـــ تربيع (كا^2)

العينات الصغيرة :

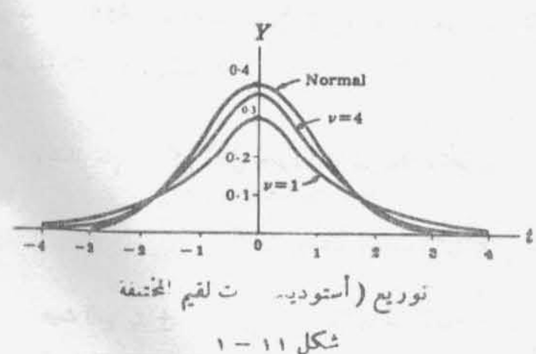
فى الفصول السابقة استخدمنا الحقيقة أنه إذا كان حجم العينة $N > 30$ ، وتسمى بالعينات ذات الحجم الكبير ، فإن توزيع المعاينة لكثير من الإحصائيات سيكون تقريباً كالتوزيع الطبيعى ، وتزداد جودة التقريب كلما زادت N . للعينات ذات الحجم $N < 30$ ، وتسمى بالعينات الصغيرة . فإن هــذا التقريب غير جيد ويزداد سوءاً كلما صغرت قيمة N ، بحيث يكون من الضرورى إدخال التعديلات الملائمة . تسمى دراسة توزيعات المعاينة للإحصائيات للعينات الصــغيرة نظرية العينات الصغيرة . وبصورة أكثر دقة نظرية العينات الدقيقة ، نظراً لأن النتائج التى نحصل عليها تنطبق فى حالة العينات الكبيرة كما فى العينات الصغيرة . فى هذا الفصل سنقوم بدراسة توزيعين مهمين هما توزيع «أستودينت » ت ، توزيع كا – تربيع (كا^2) .

توزيع « استودينت » ت :

عرف الإحصائية

$$t = \frac{\bar{X}-\mu}{s}\sqrt{N-1} = \frac{\bar{X}-\mu}{\hat{s}/\sqrt{N}} \qquad (١)$$

والتى تقابل الإحصائية z المعرفة بـ $z = \dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{N}}$ (أنظر صفحة ٢٧٠)



توزيع (أستودينت) ت لقيم المختلفة

شكل ١١ – ١

إذا أخذنا فى الاعتبار عينات حجمها N مسحوبة من مجتمع يتوزع توزيعاً طبيعياً (أو يقترب من التوزيع الطبيعى) متوســطة μ وإذا حسبنا لكل عينة t ، باستخدام الوسط الحسابى للعينة $\bar{X}$ والانحراف المعيارى للعينة s أو $\hat{s}$ فإنه يمــكننا الحصول على توزيع المعاينة للأحصائية t . هذا التوزيع (أنظر الشكل ١١ – ١) يعرف كالآتى :

$$Y = \frac{Y_0}{\left(1 + \frac{t^2}{N-1}\right)^{N/2}} = \frac{Y_0}{\left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{(\nu+1)/2}} \qquad (٢)$$

حيث Y_0 مقدار ثابت يعتمد على N بحيث يجعل المساحة تحت المنحنى مساوية للواحد ، وحيث الثابت $\nu = (N-1)$ يسمى عدد درجات الحرية (ν هو الحرف اليونانى « نيو ») . لتعريف درجات الحرية ، أنظر صفحة ٣٠٧ .

التوزيع (٢) يسمى توزيع « أستودينت » ت عقب اكتشافه بواسطة جوست ، والذى نشر أعماله فى الجزء الأول من القرن العشرين تحت الإسم المستعار « أستودينت » .

لقيم ν أو N الكبيرة (بالتأكيد لقيم $N \geqq 30$) المنحنيات (٢) تعد تقريباً لمنحنى التوزيع الطبيعى المعيارى $Y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}$ ؛ كما هو موضح بالشكل ١١ - ١ .

فترات الثقة :

كما شرحنا بالنسبة للتوزيع الطبيعى فى الفصل التاسع ، يمكن أن نعرف 95% و 99% أو غير ذلك من فترات الثقة باستخدام جدول توزيع t فى الملحق ، صفحة ٥٣٤ . بهذه الطريقة يمكن تقدير داخل حدود ثقة معينة متوسط المجتمع μ .

على سبيل المثال ، إذا كانت $t_{0.975}$ — و $t_{0.975}$ هى قيم t والتى تجعل 2.5% من المساحة تقع فى كل طرف من طرفى توزيع t فإن 95% فترة ثقة لـ t هى :

$$-t_{0.975} < \frac{\bar{X} - \mu}{s}\sqrt{N-1} < t_{0.975} \qquad (٣)$$

ومنها نرى أنه من المقدر أن تقع μ فى الفترة

$$\bar{X} - t_{0.975}\frac{s}{\sqrt{N-1}} < \mu < \bar{X} + t_{0.975}\frac{s}{\sqrt{N-1}} \qquad (٤)$$

بدرجة ثقة 95% (أى احتمال 0.95) . لاحظ أن $t_{0.975}$ تمثل قيمة المئين الذى رتبته 97.5 ، بينما $t_{0.025} = -t_{0.975}$ تمثل قيمة المئين الذى رتبته 2.5 .

وبشكل عام ، يمكن تمثيل حدود الثقة لمتوسطات المجتمع كالآتى :

$$\bar{X} \pm t_c \frac{s}{\sqrt{N-1}} \qquad (٥)$$

حيث القيم $\pm t_c$ ، تسمى بالقيم الحرجة أو معاملات الثقة ، وتعتمد على مستوى الثقة المرغوب فيه وحجم العينة . ويمكن الحصول عليها من الجدول فى صفحة ٥٣٤ .

(ب) إذا كان مستوى المعنوية هو 0.01 ، فإن المساحة بين الصفر و z_1 تساوى 0.4900 و $z_1 = 2.33$ وبما أن 32 (أو 31.5) معبراً عنها بوحدات معيارية هى 1.98 (أو 1.84) وهى أقل من 2.33 فإننا نستنتج أن النتائج غير معنوية عند 0.01.

يتبنى بعض الإحصائيين المصطلح بأن النتائج المعنوية عند المستوى 0.01 تسمى مرتفعة المعنوية ، والنتائج المعنوية عند المستوى 0.05 وغير المعنوية عند 0.01 بأنها محتملة المعنوية ، بينما النتائج المعنوية عند مستويات أكبر من 0.05 غير معنوية .

وبما أن مستويات المعنوية تستخدم كمؤشر فى اتخاذ القرارات ، فإن بعض الاحصائيين يذكر الاحتمالات الفعلية المستخدمة . على سبيل المثال فى هذه المسألة فبما أن $\Pr\{z \geqq 1.84\} = 0.0322$ ، فإن الاحصائى يمكنه القول بأنه استناداً إلى التجربة فإن فرصة ارتكاب الخطأ بالقول أن هذا الشخص له قوة خارقة على الإدراك .E.P.S هى حوالى 3 فى كل 100 . الاحتمال المذكور فى هذه الحالة 0.0322 ، يسمى أحياناً بالمعنوية الوصفية أو المعنوية التجريبية .

١٠ - ٦ مصنع للأدوية المسجلة يدعى أن دواء من انتاجه له فاعلية بنسبة 90% فى التخفيف من الحساسية لفترة 8 ساعات . فى عينة من 200 شخص مصابين بالحساسية ، أدى الدواء إلى تخفيف آلام 160 منهم . قرر ما إذا كان ادعاء المصنع صحيحاً .

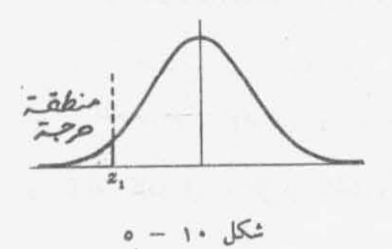
الحـل :

اعتبر أن p تمثل احتمال أن يؤدى الدواء إلى التخفيف من آلام الحساسية . وبهذا فإنه يجب أن نقرر بين الفرضين :

$H_0 : p = 0.9$ والادعاء صحيح

$H_1 : p < 0.9$ والادعاء باطل

نختار اختباراً من طرف واحد ، حيث أننا نهتم بتحديد ما إذا كانت نسبة الأشخاص الذين شفوا باستخدام الدواء نسبة قليلة.



شكل ١٠ - ٥

إذا كان مستوى المعنوية المأخوذ هو 0.01 بمعنى أن المساحة المظللة فى الشكل ١٠ - ٥ هى 0.01 فإن $z_1 = -2.33$ كما فى المسألة ١٠ - ٥ (ب) باستخدام خاصية التماثل فى المنحنى ، أو من الجدول ١٠ - ١ . ونستخدم كأساس لاتخاذ القرار :

(١) الفرض ليس صحيحاً إذا كانت z أقل من -2.33 (وفى هذه الحالة نرفض H_0).

(٢) فى غير ذلك من الحالات ، الادعاء صحيح والنتائج المشاهدة ترجع إلى الصدفة (فى هذه الحالة نقبل H_0) .

إذا كانت H_0 صحيحة ، $\mu = Np = (100)(0{\cdot}8) = 80$ and $\sigma = \sqrt{Npq} = \sqrt{(100)(0{\cdot}8)(0{\cdot}2)} = 4$

فى هذه الحالة 160 معبراً عنها بوحدات معيارية $4.73 - = (160 - 180)/4.23$ وهى أقل بكثير من $2.33 -$ وطبقاً لقاعدة اتخاذ القرار التى وضعناها فإننا نستنتج أن الادعاء غير صحيح وأن نتائج العينة مرتفعة المعنوية (أنظر نهاية المسألة ١٠ - ٥) .

١٠ - ٧ متوسط العمر الإنتاجى لعينة من 100 لمبة من لمبات الفلورسنت من إنتاج أحد المصانع هو 1570 ساعة وانحرافها المعيارى 120 ساعة . إذا كان μ هو متوسط العمر الإنتاجى لجميع اللمبات المنتجة بواسطة الشركة ، اختبر الفرض $\mu = 1600$ ساعة ضد الفرض البديل $\mu \neq 1600$ ساعة ، مستخدماً مستوى المعنوية (أ) 0.05 (ب) 0.01

الحـــل :

يجب أن نختار بين الفرضين :

$H_0 : \mu = 1600$ ساعة ، $H_1 : \mu \neq 1600$ ساعة

يجب أن نستخدم هنا اختباراً من طرفين حيث أن $\mu \neq 1600$ تشمل كلا من القيم الأكبر من أو الأصغر من 1600 .

(أ) للاختبار من طرفين عند مستوى المعنوية 0.05 ، نستخدم قواعد اتخاذ القرار التالية .

(١) ارفض H_0 إذا كانت قيم z المحسوبة من العينة تقع خارج المدى $1.96 -$ إلى 1.96 .

(٢) اقبل H_0 (أولا تتخذ أى قرار) خلاف ذلك .

الاحصائية المختبرة هنا متوسط العينة $\bar{X}$. توزيع المعاينة لـ $\bar{X}$ له متوسط $\mu_{\bar{X}} = \mu$ وانحراف معيارى $\sigma_{\bar{X}} = \sigma/\sqrt{N}$ ، حيث μ هو متوسط المجتمع و σ الانحراف المعيارى للمجتمع المكون من جميع اللمبات المنتجة بواسطة الشركة .

تحت الفرض H_0 ، فإن $\mu = 1600$ و $\sigma_{\bar{X}} = \sigma/\sqrt{N} = 120/\sqrt{100} = 12$ باستخدام الانحراف المعيارى للعينة كتقدير لـ σ . بما أن $z = (\bar{X} - 1600)/12 = (1570 - 1600)/12 = -2{\cdot}50$ يقع خارج المدى $1.96 -$ إلى 1.96 فإننا نرفض الفرض H_0 عند مستوى المعنوية 0.05 .

(ب) إذا كان مستوى المعنوية 0.01 ، فالمدى $1.96 -$ إلى 1.96 فى قواعد اتخاذ القرار فى الجزء (أ) يحل بدلا منه المدى من $2.58 -$ إلى 2.58 . بما أن قيمة z المساوية لـ $2.50 -$ تقع داخل هذا المدى ، فإننا نقبل H_0 (أولاتتخذ أى قرار) عند مستوى المعنوية 0.01 .

١٠ - ٨ فى المسألة ١٠ - ٧ ، اختبر الفرض $\mu = 1600$ ساعة ضد الفرض البديل $\mu < 1600$ ساعة ، باستخدام مستوى المعنوية (أ) 0.05 (ب) 0.01 .

الحـل :

يجب أن نختار بين الفرضين

$H_0 : \mu = 1600$ ساعة ، $H_1 : \mu < 1600$ ساعة

ونستخدم هنا اختباراً من طرف واحد ، والقيم المقابلة مطابقة لتلك القيم فى المسألة ١٠ – ٦ .

(أ) إذا كان مستوى المعنوية 0.05 ، المنطقة المظللة فى الشكل ١٠ – ٥ مساحتها 0.05 ، ونجد أن $z_1 = -1.645$. ولهذا نستخدم القاعدة التالية فى اتخاذ القرار :

(١) ارفض H_0 إذا كانت z أقل من -1.645 .

(٢) اقبل H_0 (أو لا تتخذ أى قرار) فيما عدا ذلك .

وبما أن ، كما فى المسألة ١٠ – ٧ (أ) ، قيمة z هى -2.50 وهى أقل من -1.645 ، فإننا نرفض H_0 عند مستوى المعنوية 0.05 . لاحظ أن هذا القرار مماثل لما توصلنا إليه فى المسألة ١٠ – ٧ (أ) باستخدام اختبار من طرفين .

(ب) إذا كان مستوى المعنوية هو 0.01 ، فإن قيم z_1 فى الشكل ١٠ – ٥ هى -2.33 ولهذا نستخدم القاعدة التالية فى اتخاذ القرار :

(١) ارفض H_0 إذا كانت z أقل من -2.33 .

(٢) اقبل H_0 (أو لا تتخذ أى قرار) فيما عدا ذلك .

وبما أن ، كما فى المسألة ١٠ – ٧ (أ) قيمة z وهى -2.50 وهى أقل من -2.33 فإننا نرفض الفرض عند مستوى معنوية 0.01 . لاحظ أن هذا القرار يختلف عما وصلنا إليه فى المسألة ١٠ – ٧ (أ) باستخدام الاختبار من طرفين .

ينتج عن ذلك أن القرارات الخاصة بفرض معين H_0 المبنية على اختبار من طرف واحد أو اختبار من طرفين ليست دائماً على اتفاق . وهذا ، بالطبع ، متوقع حيث أننا نختبر H_0 فى مقابل بديل مختلف فى كل حالة .

١٠ – ٩ متوسط قوة مقاومة حبال القطع من إنتاج أحد المصانع هو 1800 N وانحرافها المعيارى 100 N . باستخدام طريقة جديدة للتصنيع ادعى أن قوة مقاومة الحبال سوف تزداد . لاختبار هذا الادعاء أخذت عينة من 50 حبلا وتم اختبارها ووجد أن متوسط مقاومتها للقطع هو 1850 N . هل يمكن تأييد هذا الادعاء عند مستوى المعنوية 0.01 ؟

الحـل :

يجب أن نختار بين الفرضين :

$H_0 : \mu = 1800$ N ، ولايوجد تغير حقيقى فى قوة مقاومة الحبال

$H_1 : \mu > 1800$ N ، ويوجد تغير فى قوة مقاومة الحبال

ونستخدم هنا اختباراً من طرف واحد . الشكل المرتبط بهذا الاختبار مماثل للشكل بالمسألة ١٠ – ٥ عند مستوى معنوية 0.01 ولذلك فإن قاعدة اتخاذ القرار هي

(١) إذا كانت قيم z المشاهدة أكبر من 2.33 ، فإن النتائج معنوية عند مستوى 0.01 ونرفض H_0 .

(٢) بخلاف ذلك نقبل H_0 (أو نؤجل اتخاذ القرار)

تحت الفرض بأن H_0 صحيح ، فإننا نجد

$$z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{N}} = \frac{1850 - 1800}{100/\sqrt{50}} = 3{\cdot}55$$

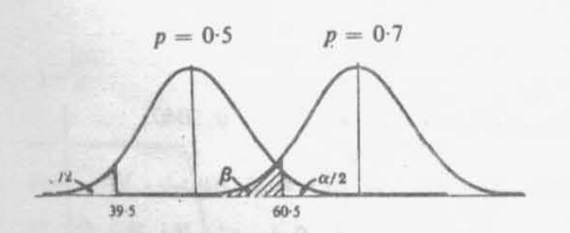
وهو أكبر من 2.33 . وبهذا نستنتج أن النتائج مرتفعة المعنوية أي أن الادعاء يجب تأييده .

منحنيات توصيف العمليات :

١٠–١٠ بالرجوع إلى المسألة ١٠–٢ ، ما هو احتمال قبول الفرض بأن العملة غير متحيزة عندما يكون الاحتمال الفعل للصور هــو $p = 0.7$ ؟

الحـــل :

الفرض H_0 القائل بأن العملة غير متحيزة ، أي $p = 0.5$ يقبل إذا كان عدد الصور في مائة رمية يقع بين 39.5 و 60.5 . احتمال رفض H_0 عندما يجب أن نقبله (احتمال الوقوع في خطأ من النوع الأول) . وتمثل بالمساحة الكلية α للمنطقة المظللة تحت المنحنى الطبيعي إلى اليسار في الشكل ١٠–٦ . كما حسبت في المسألة ١٠–٢ (أ) ، المساحة α ، والتي تمثل مستوى المعنوية لاختبار H_0 تساوي 0.0358 .



إذا كان احتمال الصور هو $p = 0.7$ ، فإن توزيع الصور في 100 رمية تمثل بالمنحنى الطبيعي بالشكل ١٠–٦ . يتضح من الشكل أن احتمال قبول H_0 عندما تكون $p = 0.07$ بالفعل (احتمال الوقوع في خطأ من النوع الثاني) يعطى بالمنطقة β المظللة بخطوط مائلة في الشكل .

لحساب هذه المساحة نلاحظ أن التوزيع تحت الفرض $p = 0.7$ له متوسط وانحراف معياري كالآتي :

$$\mu = Np = (100)(0{\cdot}7) = 70 \quad \text{and} \quad \sigma = \sqrt{Npq} = \sqrt{(100)(0{\cdot}7)(0{\cdot}3)} = 4{\cdot}58$$

60.5 بوحدات معيارية $= (60.5 - 70)/4.58 = -2.07$

39.5 بوحدات معيارية $= (39.5 - 70)\ 4.58 = -6.66$

إذن

$0.0192 =$ (المساحة تحت المنحنى الطبيعى بين $z = -6.66$ و $z = -2.07$) . بهذا وباستخدام قواعد اتخاذ القرار المعطاة فإن هناك فرصة ضئيلة فى قبول الفرض بأن العملة غير متحيزة عندما تكون $p = 0.7$ بالفعل .

لاحظ أننا فى هذه المسألة قد أعطينا أسس اتخاذ القرار والتى حسبنا منها β و α . ومن الناحية العملية من الممكن ظهور الحالتين :

(١) نختار قيمة α (مثل 0.05 أو 0.01) ، نصل إلى أساس لاتخاذ القرار ثم نحسب β

(٢) نختار قيمة β و α ثم نصل إلى أساس اتخاذ القرار .

١٠–١١ حل المسألة السابقة إذا كانت (١) $p = 0.6$ (ب) $P = 0.8$ (ج) $p = 0.9$ (د) $p = 0.4$

الحل :

(١) إذا كانت $p = 0.6$ فإن توزيع الصور له متوسط وانحراف معيارى كالآتى :

$$\mu = Np = (100)(0{\cdot}6) = 60 \quad \sigma = \sqrt{Npq} = \sqrt{(100)(0{\cdot}6)(0{\cdot}4)} = 4{\cdot}90$$

60.5 بوحدات معيارية $= (60.5 - 60)/0.490 = 0.0102$

39.5 بوحدات معيارية $= (39.5 - 60)/4.90 = -4.18$

إذن

$0.5040 =$ (المساحة تحت المنحنى الطبيعى بين $z = -4.18$ و $z = 0.0102$) $= \beta$

بهذا وباستخدام قواعد اتخاذ القرار المعطاة فإن هناك فرصة كبيرة فى قبول الفرض بأن العملة غير متحيزة عندما تكون القيمة الفعلية هى $p = 0.6$

(ب) إذا كانت $p = 0.8$ ، فإن $\mu = Np = (100)(0{\cdot}8) = 80$ and $\sigma = \sqrt{Npq} = \sqrt{(100)(0{\cdot}8)(0{\cdot}2)} = 4$

60.5 بوحدات معيارية $= (60.5 - 80)/4 = -4.88$

39.5 بوحدات معيارية $= (39.5 - 80)/4 = -10.12$

إذن

$0.0000 =$ (المساحة تحت المنحنى الطبيعى بين $z = -10.12$ و $z = -4.88$) $= \beta$,
(قريبة جدا من الصفر) .

(ج) من المقارنة بـ (أ) أو بالحساب ، نجد أنه إذا كانت $p = 0.9$ ، فإن $\beta = 0$ وذلك لجميع الأغراض العملية .

(د) بالتماثل $p = 0.4$ تعطى قيمة β مثل $p = 0.6$ ، أى $\beta \doteq 0.5040$

١٠-١٢ عبر بيانيا عن نتائج المسائل ١٠-١٠ و ١٠-١١ برسم شكل (أ) β مقابل p (ب) $(1 - \beta)$ مقابل p . فسر الأشكال الناتجة .

الحـل :

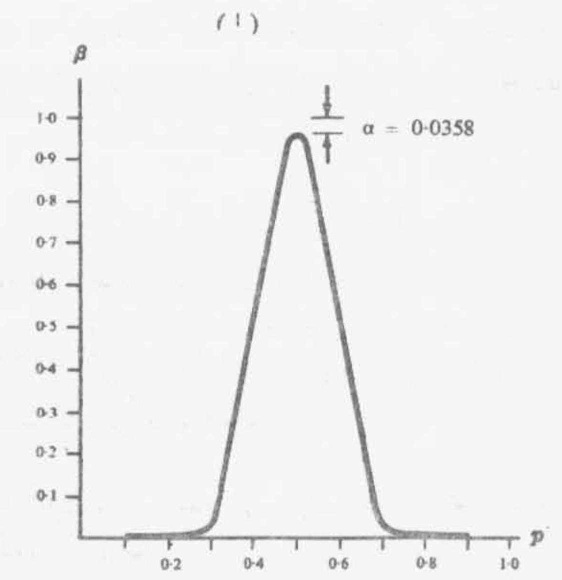
الجدول ١٠-٢ يوضح قيم β المقابلة لقيم p المعطاة كما حصلنا عليها فى المسائل ١٠-١٠ و ١٠-١١ .

جدول ١٠-٢

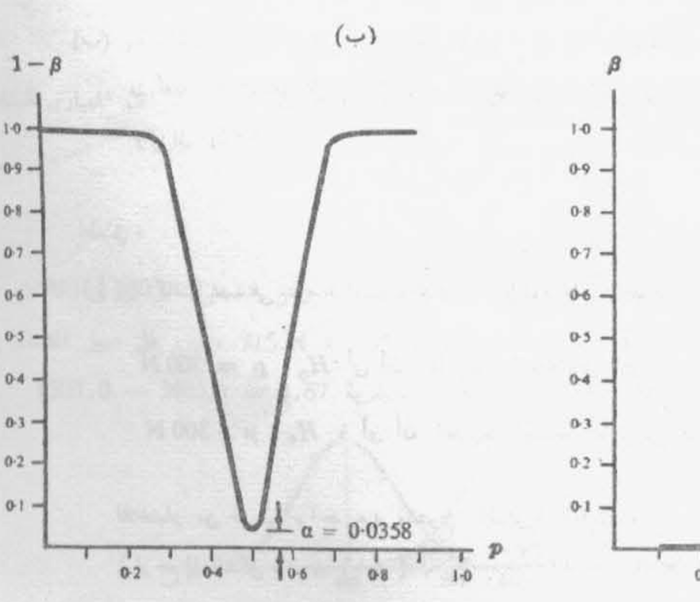
p	0·1	0·2	0·3	0·4	0·5	0·6	0·7	0·8	0·9
β	0·0000	0·0000	0·0192	0·5040	0·9642	0·5040	0·0192	0·0000	0·0000

لاحظ أن β تمثل احتمال قبول الفرض بأن $p = 0.5$ عندما تكون قيمة p الفعلية قيمة أخرى غير 0.5 . أما إذا كانت قيمة p الفعلية هى 0.5 فإن β تمثل احتمال قبول $p = 0.5$ عندما يكون من المفروض قبولها . هذا الاحتمال يساوى $0.9642 = 0.0358 - 1$ وهو موضح بالجدول ١٠-٢ .

(أ)



(ب)



شكل ١٠-٧

(أ) الشكل البيانى β مقابل p ، موضح بالشكل ١٠-٧ (أ) ، يسمى بمنحنى توصيف العمليات أو منحنى OC لقاعدة اتخاذ القرار أو لاختيار الفرض .

المسافة بين نقطة النهاية العظمى للمنحنى OC والخط $\beta = 1$ يساوى $\alpha = 0.0358$ ، مستوى المعنوية للاختبار .

وبشكل عام ، كلما زادت حدة قة المنحنى OC كانت قواعد اتخاذ القرار أفضل فى رفض الفروض غير الصحيحة .

(ب) الشكل البيانى $(1 - \beta)$ مقابل p ، موضح بالشكل ١٠-٧ (أ) ، يسمى منحنى قوة اختبار الفرض أو قواعد اتخاذ القرار . وهذا المنحنى نحصل عليه ببساطة كقلوب لمنحنى OC ، بحيث أن الشكلين من الناحية الفعلية متكافئين .

الكمية $(1 - \beta)$ تسمى غالبا دالة القوة حيث أنها تشير إلى قابلية أو قوة الاختبار لرفض الفرض غير الصحيح ، أى الذى يجب رفضه . وتسمى الكمية β دالة توصيف العمليات للأختبار .

١٠-١٣ تنتج شركة كابلات متوسطة قوة مقاومتها للكسر هو 300 N وانحرافها المعيارى 24 N . ومن المعتقد أنه باستخدام طريقة جديدة مبتكرة يمكن زيادة قوة المقاومة للكسر .

(أ) صمم قاعدة لاتخاذ القرار بشأن رفض الأسلوب القديم فى التصنيع عند مستوي معنوية 0.01 إذا اتفق على اختبار 64 كابل .

(ب) بنفس قاعدة اتخاذ القرار المستخدمة فى (أ) ، ما هو احتمال قبول الطريقة القديمة عندما تكون الطريقة الحديثة قد أدت فى الواقع إلى زيادة متوسط المقاومة للكسر إلى 310 N ؟ افترض أن الانحراف المعيارى لا يزال 24 N .

الحل :

(أ) إذا كانت μ هى متوسط المقاومة للكسر ، فإننا نريد أن نقرر بين الفرضين :

$H_0 : \mu = 300$ N أى أن الطريقة الجديدة مثل الطريقة القديمة ،

$H_1 : \mu > 300$ N ، أى أن الطريقة الجديدة أفضل من الطريقة القديمة .

للاختبار من طرف واحد عند مستوى المعنوية 0.01 ، فإننا نحصل على القواعد التالية لاتخاذ القرار (ارجع إلى الشكل ١٠-٨ (أ)) .

(أ) ارفض H_0 إذا كانت قيم z لمتوسط المقاومة للكسر فى العينة أكبر من 2.33

(٢) أقبل H_0 فيما عدا ذلك .

بما أن $z > 2{\cdot}33,$

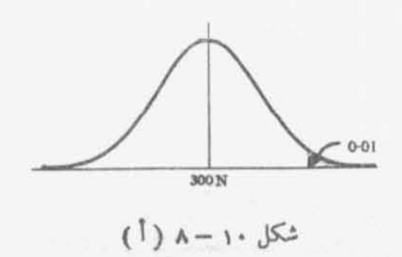
فإنه إذا كانت $z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{N}} = \frac{\bar{X} - 300}{24/\sqrt{64}}$ فإن $\bar{X} = 300 + 3z.$

وبهذا فإن قواعد اتخاذ القرار السابقة تصبح : $\bar{X} > 300 + 3(2{\cdot}33) = 307{\cdot}0$ N.

(١) ارفض H_0 إذا كان متوسط المقاومة للكسر فى الـ 64 كابلا يتجاوز 307.0 N

(٢) أقبل H_0 فيما عدا ذلك .

(ب) اعتبر الفرضين $H_0 : \mu = 300$ N و $H_1 : \mu = 310$ N . توزيعات متوسط المقاومة للكسر المقابل لهذين الفرضين ممثل على الترتيب بالمنحنى الطبيعى على اليسار والمنحنى الطبيعى على اليمين فى الشكل ١٠–٨ (أ) .



شكل ١٠ – ٨ (أ)

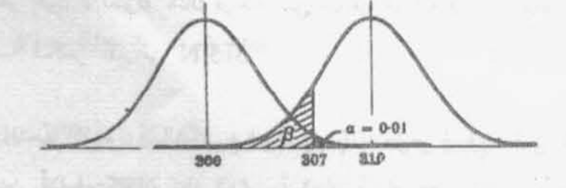
احتمال قبول عملية التصنيع القديمة عندما يكون متوسط المقاومة للكسر للطريقة الجديدة هو 310 N بالفعل ممثل بالمنطقة التى مساحتها β فى الشكل ١٠–٨ (أ) . لحصول على ذلك ، لاحظ أن 307.0 N معبرا عنها بوحدات قياسية $(307.0 - 310)/3 = -1.00$ إذن

$\beta =$ (المساحة تحت المنحنى الطبيعى إلى اليمين وإلى يسار $z = -1.00$) $= 0.1587$ وهذا هو احتمال قبول $H_0 : \mu = 300$ N عندما تكون $H_1 : \mu = 310$ N هى فعلا القيمة الصحيحة ، أى احتمال ارتكاب خطأ من النوع الثانى .

١٠–١٤ كون (أ) منحنى OC (ب) منحنى القوة للمسألة ١٠–١٣ ، مفترضا أن الانحراف المعيارى للمقاومة للكسر سيظل 24 N

الحـل :

باستخدام مبررات مماثلة لتلك المستخدمة فى المسألة ١٠–١٣ (أ) ، يمكن الحصول على β فى الحالات التى تنتج فيها الطريقة الجديدة متوسط مقاومة للكسر μ يساوى 305 N ، 315 N ، ... على سبيل المثال إذا كانت $\mu = 305$ N ، فإن 307 N معبرا عنها بوحدات معيارية $(307.0 - 305)/3 = 0.67$

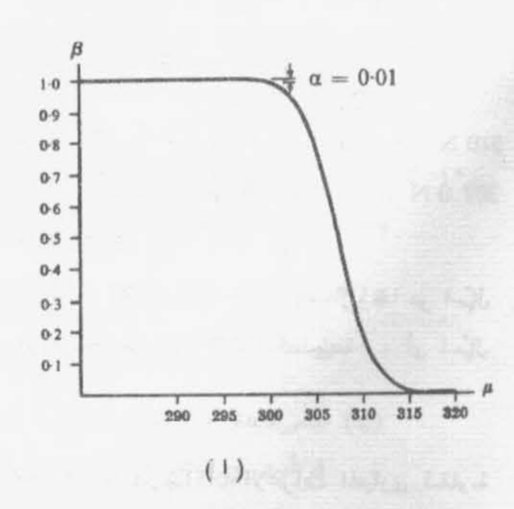


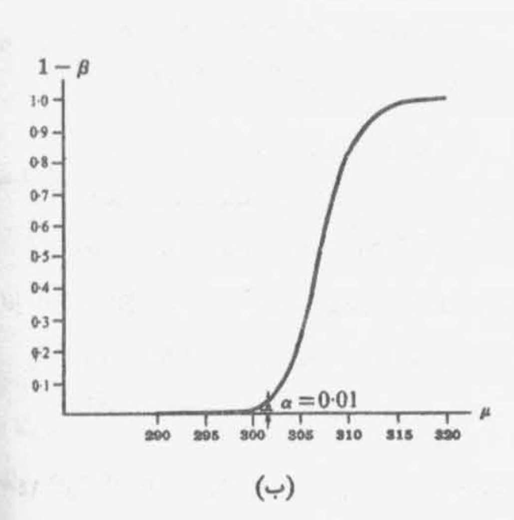
إذن

$0.7486 =$ (المساحة تحت المنحنى الطبيعى إلى اليمين وإلى يسار $z = 0.67$) $= \beta$ وبهذه الطريقة يمكن الحصول على الجدول ١٠-٣

جــدول ١٠-٣

μ	290	295	300	305	310	315	320
β	1·0000	1·0000	0·9900	0·7486	0·1587	0·0038	0·0000





شكل ١٠-٩

(ا) يظهر منحنى OC فى الشكل ١٠-٩ (ا) . من هذا المنحنى نجــد أن احتمال الابقاء على الطريقة القديمة فى التصنيع إذا كانت قوة المقاومة للكسر الجديدة أقل من 300 N ، من الناحية العملية يساوى 1 (فيما عدا عند مستوى المعنوية 0.01 عندما يكون متوسط الطريقة الجديدة هــو 300 N) ثم يأخذ المنحنى فى الهبوط إلى الصفر بحيث لا تكون هناك فرصة من الناحية العملية فى الاحتفاظ بالطريقة القديمة عندما يكون متوسط المقاومــة للكسر أكبر من 315 N .

(ب) يظهر منحنى القوة فى الشكل ١٠-٩ (ب) . وهو يعطى نفس التفسير مثل منحنى OC . والواقع أن المنحنين أساسا متكافئان .

١٠-١٥ لاختبار أن عملة غير متحيزه ($p = 0.5$) عن طريق عدد من رميات العملة ، فإننا نرغب فى فرض القيود التالية :

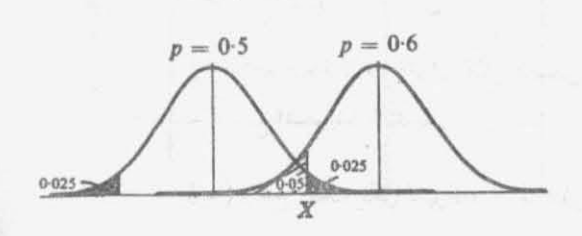
(أ) احتمال رفض الفرض عندما يكون الفرض صحيحا بالفعل 0.05 على الأكثر .

(ب) احتمال قبول الفرض أن p تختلف فعلا عن 0.5 بما يساوى 0.1 أو أكثر (أى $p \geqq 0.6$ أو $p \leqq 0.4$) يجب أن يكون هذا الاحتمال 0.05 على الأكثر .

حدد الحد الأدنى الضرورى لحجم العينة وأذكر قواعد اتخاذ القرار .

الحــل :

وضعنا هنا حدوداً على الخطأ من النوع الأول والخطأ من النوع الثانى . على سبيل المثال ، فإن القيد المذكور فى (أ) يتطلب أن يكون احتمال الخطأ من النوع الأول $= \alpha = 0.05$ على الأكثر بينما القيد (ب) يتطلب أن يكون احتمال $\beta = 0.05$ وقد صور الوضع فى الشكل ١٠ – ١٠ .



شكل ١٠ – ١٠

اعتبر N هو حجم العينة المطلوب و X عدد الصور فى N رمية ، والتى إذا زاد عدد هذه الصور عن ذلك نرفض الفرض أن $p = 0.5$. من الشكل ١٠ – ١٠

(١) المساحة تحت المنحنى الطبيعى $p = 0.5$ إلى اليمين من $\frac{X - 0.5N}{0.5\sqrt{N}} = \frac{X - 0.5N}{\sqrt{N(0.5)(0.5)}} = \frac{X - Np}{\sqrt{Npq}}$ هى 0.025

(٢) المساحة تحت المنحنى الطبيعى $p = 0.6$ إلى اليسار من $\frac{X - 0.6N}{0.49\sqrt{N}} = \frac{X - 0.6N}{\sqrt{N(0.6)(0.4)}} = \frac{X - Np}{\sqrt{Npq}}$ هى 0.05

[من الناحية العملية المساحة بين $(X - 0.6N)/0.49\sqrt{N}$ و $[(N - X) - 0.6N]/0.49\sqrt{N}$ هى 0.05 ، (٢) تقريب جيد) .

من (١) $\frac{X - 0.5N}{0.5\sqrt{N}} = 1.96$ أو (٣) $X = 0.5N + 0.980\sqrt{N}$

من (٢) $\frac{X - 0.6N}{0.49\sqrt{N}} = -1.645$ أو (٤) $X = 0.6\,N - 0.806\sqrt{N}$

إذن من (٣) و (٤) ، $N = 318.98$. أى أن حجم العينة يجب أن يكون على الأقل 319 ، أى يجب أن تقذف 319 مرة على الأقل . بوضع $N = 319$ فى (٣) أو (٤) فإن $X = 177$.

لقيم $p = 0.5$ فإن $X - Np = 177 - 159.5 = 17.5$ بهذا فإننا نتبين القاعدة التالية لاتخاذ القرار :

(أ) اقبل الفرض $p=0.5$ إذا كان عدد الصور فى 319 رمية فى المدى من 159.5 ± 17.5 أى بين 142 و 177 صورة .

(ب) ارفض الفرض فيما عدا ذلك .

خرائط الرقابة :

١٠ - ١٦ ماكينة مصممة لإنتاج رولمان البلى متوسط قطره 5.74 mm وانحرافه المعيارى 0.08 mm . لتحديد ما إذا كانت الماكينة تعمل حسب المواصفات ، أخذت عينة من 6 من رولمان البلى كل ساعتين ، على سبيل المثال ، وحسب منها متوسط القطر

(أ) صمم قاعدة لاتخاذ القرار تمكن الشخص من أن يكون متأكداً بشكل معقول من أن مواصفات المنتجات تتفق مع المستويات المطلوبة .

(ب) وضح كيف يمكن تمثيل قاعدة اتخاذ القرار فى (أ) بيانياً .

الحــل :

(أ) بدرجة ثقة 99.73% يمكن القول بأن متوسط العينة $\bar{X}$ يجب أن يقع فى المدى من $(\mu_{\bar{X}} - 3\sigma_{\bar{X}})$ إلى $(\mu_{\bar{X}} + 3\sigma_{\bar{X}})$ أو $(\mu - 3\sigma/\sqrt{N})$ إلى $(\mu + 3\sigma/\sqrt{N})$. وبما أن $\mu = 0.574$ و $\sigma = 0.08$ و $N = 6$ ، يترتب على ذلك أنه بدرجة ثقة 99.73% فإن متوسط العينة يجب أن يقع بين $(5.74 - 0.24/\sqrt{6})$ و $(5.74 + 0.24/\sqrt{6})$ أى بين 5.64 و 5.84 mm .

وبهذا فإن أسلوبنا لاتخاذ القرار سيكون كما يلى :

(1) إذا كان متوسط العينة واقع داخــل المدى 5.64 إلى 5.84 mm افترض أن الماكينة تعمل حسب المواصفات .

(2) خلاف ذلك استنتج بأن الماكينة لاتعمل حسب المواصفات ، وابحث عن الأسباب .

(ب) يمكن الاحتفاظ بتسجيل لمتوسطات العينات وذلك بواسطة لوحة مثل تلك الموضحة فى الشكل ١٠ - ١١ ، وتسمى بخرائط مراقبة جودة الإنتاج . وفى كل وقت تحسب فيه متوسط العينة يمثل فى هذه الخريطة بنقطة . ومادامت هذه النقطة تقع بين الحد الأدنى 5.64 mm والحد الأعلى 5.84 mm ، فإن العملية تكون تحت المراقبة . وعندما تقع نقطة خارج حدود المراقبة هذه (مثل العينة الثالثة المسحوبة يوم الخميس) ، فإن هناك إمكانية أن هناك خطأ ما والمطلوب استقصاء أسبابه .

حدود المراقبة المذكورة أعلاه تسمى 99.73% حدود ثقة أو باختصار حدود 3σ . كذلك يمكن استخدام حدود ثقة ، مثل 99% أو 95% . ويعتمد الاختيار فى كل حالة على الظروف الخاصة .

الاثنين الثلاثاء الأربعاء الخميس الجمعة

متوسط العينة

5·84

5·74

5·64

شكل ١٠ – ١١

الاختبارات المتضمنة الفروق بين المتوسطات والنسب :

١٠ – ١٧ أعطى اختبار لفصلين يتكون الأول من 40 طالباً والثانى من 50 طالباً . فى الفصل الأول كان متوسط الدرجات 74 والانحراف المعيارى 8 ، بينما فى الفصل الثانى كان متوسط الدرجات هو 78 والانحراف المعيارى 7 .

هل هناك أختلاف معنوى فى أداء الفصلين عند مستوى المعنوية

(أ) 0.05 (ب) 0.01 ؟

الحـل :

افترض أن الفصلين مسحوبين من مجتمعين متوسطاتهما هى μ_1 و μ_2 . وبهذا فإننا يجب أن نقرر بين الفرضين :

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ ، والاختلاف يرجع تقريباً للصدفة

$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ ، وهناك فرق معنوى بين الفصلين .

تحت الفرض H_0 كلا الفصلين مسحوبين من نفس المجتمع . المتوسط والانحراف المعيارى للفرق بين المتوسطين يعطى كما يلى :

$$\mu_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} = 0 \quad \text{and} \quad \sigma_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} = \sqrt{\sigma_1^2/N_1 + \sigma_2^2/N_2} = \sqrt{8^2/40 + 7^2/50} = 1{\cdot}606$$

حيث استخدمنا الانحرافات المعيارية للعينات كتقدير ل σ_1 و σ_2.

إذن $$z = (\bar{X}_1 - \bar{X}_2)/\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = (74 - 78)/1{\cdot}606 = -2{\cdot}49$$

(أ) إذا استخدمنا اختباراً من طرفين فإن النتائج تكون معنوية عند المستوى 0.05 إذا وقعت z خارج المدى من 1.96— إلى 1.96 . وبهذا نستنتج أنه عند المستوى 0.05 فإن هناك فرقاً معنوياً في أداء الفصلين وأنه من المحتمل أن يكون أداء الفصل الثاني أفضل .

(ب) إذا استخدمنا اختباراً من طرفين فإن النتائج تكون معنوية عند المستوى 0.01 إذا وقعت z خارج المدى من 2.58 — إلى 2.58 . وبهذا نستنتج أنه لايوجد هناك فرق معنوي بين الفصلين .

وبما أن النتائج معنوية عند المستوى 0.05 ولكن غير معنوية عند المستوى 0.01 ، فإننا نستنتج أن النتائج محتملة المعنوية وذلك طبقاً للمصطلح المستخدم في نهاية المسألة ١٠ — ٥ .

١٠ — ١٨ إذا كان متوسط أوزان 50 طالباً من المشاركين في النشاط الرياضي في كلية هو 68.2kg بانحراف معياري 2.5 kg بينما كان متوسط وزن 50 طالباً لم يظهروا اهتماماً بالمشاركة في النشاط الرياضي في الكلية هو 67.5 kg بانحراف معياري 2.8 kg . اختبر الفرض بأن الطلبة الذين يساهمون في النشاط الرياضي أثقل وزناً من غيرهم في الكلية.

الحـــل :

يجب أن نقرر بين الفرضين :

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ لايوجد فرق بين متوسط الأوزان

$H_1 : \mu_1 > \mu_2$ ، متوسط أوزان المجموعةالأولى أكبر من متوسط أوزان المجموعة الثانية .

تحت الفرض H_0 :

$$\mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = 9 \quad \text{and} \quad \sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{\sigma_1^2/N_1 + \sigma_2^2/N_2} = \sqrt{(2{\cdot}5)^2/50 + (2{\cdot}8)^2/50} = 0{\cdot}53$$

حيث استخدمنا الانحراف المعياري للعينة كتقدير ل σ_1 و σ_2

إذن $$z = (X_1 - X_2)/\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = (68{\cdot}2 - 67{\cdot}5)/0{\cdot}53 = 1{\cdot}32.$$

باستخدام اختبار من طرف واحد عند مستوى المعنوية 0.05 ، فإننا نرفض الفرض H_0 إذا كانت قيم z أكبر من 1.645 . وبهذا فإنه لن يمكننا رفض الفرض عند هذا المستوى من المعنوية .

يجب ملاحظة ، أنه يمكن رفض الفرض عند المستوى 0.10 إذا كنا على استعداد لتحمل مخاطرة أن نقع في الخطأ باحتمال 0.10 ، أي فرصة واحدة كل 10 .

١٠ - ١٩ بأي مقدار يجب زيادة حجم العينة في كل من المجموعتين في المسألة ١٠ — ١٨ بحيث يكون الفرق المشاهد 0.7kg

فى متوسط الأوزان معنوياً عند مستوى المعنوية (أ) 0.05 (ب) 0.01 ؟

الحـل :

افترض أن حجم العينة فى كل مجموعة هو N وأن الانحراف المعيارى للمجموعتين لن يتغير . بهذا يكون تحت الفرض H_0 فإن

$$\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{\sigma_1^2/N + \sigma_2^2/N} = \sqrt{[(2\cdot5)^2 + (2\cdot8)^2]/N} = \sqrt{14\cdot09/N} = 3\cdot75/\sqrt{N}$$

قيمة z للفرق المشاهد 0.7 kg بين متوسط الأوزان هى

$$z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}} = \frac{0\cdot7}{3\cdot75/\sqrt{N}} = \frac{0\cdot7\sqrt{N}}{3\cdot75}.$$

(أ) الفرق المشاهد سيكون معنوياً عند المستوى 0.05 إذا كانت $1.645 = 0.7\sqrt{N}/3.75$ ، على الأقل بحيث أن N يجب أن تكون 78 على الأقل . وبهذا يجب أن نزيد حجم العينة فى كل مجموعة بما مقداره $28 = (78 - 50)$ على الأقل .

طريقة اخرى :

$$0\cdot7\sqrt{N}/3\cdot75 \geqq 1\cdot645,\ \sqrt{N} \geqq (3\cdot75)(1\cdot645)/0\cdot7,\ \sqrt{N} \geqq 8\cdot8,\ N \geqq 77\cdot4 \text{ or } N \geqq 78$$

(ب) الفرق المشاهد سيكون معنوياً عند المستوى 0.01 إذا كانت

$$0\cdot7\sqrt{N}/3\cdot75 \geqq 2\cdot33,\ \sqrt{N} \geqq (3\cdot75)(2\cdot33)/0\cdot7,\ \sqrt{N} \geqq 12\cdot5,\ N \geqq 156\cdot3 \text{ or } N \geqq 157$$

وبهذا يجب أن نزيد حجم العينة فى كل مجموعة بما لايقل عن $107 = (157 - 50)$

١٠ - ٢٠ مجموعتان ، A و B ، تتكون كل منهما من 100 شخص مصابين بمرض معين . أعطى مصل للمجموعة A ولم يعط للمجموعة B (والتى تسمى بالمجموعة الضابطة) ، بخلاف ذلك ، فإن المجموعتين يعاملان معاملة متماثلة . وقد وجد أنه فى المجموعة A شفى 75 شخصاً من المرض ، بينما فى المجموعة B شفى 65 شخصاً . اختبر الفرض أن المصل يساعد على الشفاء من المرض باستخدام مستوى المعنوية (أ) 0.01

(ب) 0.05 ، (ب) 0.10

الحـل :

اعتبر أن p_1 تمثل النسبة فى المجتمع للأشخاص الذين شفوا باستخدام المصل . وأن p_2 تمثل النسبة فى المجتمع للأشخاص الذين شفوا بدون استخدام المصل .

يجب أن نقرر بين فرضين :

$H_0: p_1 = p_2$ ، والفروق المشاهدة ترجع إلى الصدفة ، أى أن المصل غير فعال .

$H_0 : p_1 > p_2$ ، أى أن المصل فعال .

تحت الفرض H_0 ،

$$\mu_{P_1 - P_2} = 0 \quad \text{and} \quad \sigma_{P_1 - P_2} = \sqrt{pq(1/N_1 + 1/N_2)} = \sqrt{(0{\cdot}70)(0{\cdot}30)(1/100 + 1/100)} = 0{\cdot}0648$$

وقد استخدمنا كتقدير لـ p متوسطة نسبة الذين شفوا من المرض فى المجموعتين وهى $0.70 = (75+65)/200$

و 0.30 $q = 1 - p = 0.30$ إذن

$$z = (P_1 - P_2)/\sigma_{P_1 - P_2} = (0{\cdot}750 - 0{\cdot}650)/0{\cdot}0648 = 1{\cdot}54.$$

(أ) إذا استخدمنا اختبار من طرف واحد عند مستوى المعنوية 0.01 فإننا يجب أن نرفض الفرض H_0 إذا كانت قيم z أكبر من 2.33 . وبما أن قيمة z هى 1.54 فقط ، فإننا نستنتج عند هذا المستوى من المعنوية بأن الفروق ترجع للصدفة .

(ب) إذا استخدمنا اختباراً من طرف واحد عند مستوى المعنوية 0.05 ، فإننا يجب أن نرفض الفرض H_0 إذا كانت قيم z أكبر من 1.645 وبهذا نستنتج أن النتائج ترجع للصدفة عند هذا المستوى

(ج) إذا استخدمنا اختباراً من طرف واحد عند مستوى المعنوية 0.01 . فإننا يجب أن نرفض H_0 إذا كانت قيم z أكبر من 1.28 . وبما أن هذا تحقق ، فإننا نستنتج بأن المصل فعال عند مستوى المعنوية 0.01 .
لاحظ أن استنتاجاتنا الموضحة أعلاه تعتمد على مقدار استعدادنا لتحمل مخاطرة الوقوع فى خطأ . فإذا كانت النتائج ترجع فعلا للصدفة ولكننا ننتهى إلى أنها ترجع إلى المصل (خطأ من النوع الأول) ، فقد نستمرفى إعطاء المصل لمجموعة كبيرة من الأشخاص ثم نجد أنه غير فعال . وهذه مخاطرة قد لانكون على استعداد دائماً لتحملها . ومن الناحية الأخرى ، قد نقرر أن المصل لايفيد بينما هو فى الواقع فعال (خطأ من النوع الثانى) . مثل هذا الاستنتاج خطير وخاصة إذا كانت حياة بشرية هى موضع المخاطرة .

١٠ - ٢١ حل المسألة السابقة إذا كانت كل مجموعة مكونة من 300 شخص شفى من المجموعة A عدد 225 شخصاً ومن المجموعة B عدد 195 شخصاً .

الحــل :

لاحظ أن نسبة الذين شفوا فى هذه الحالة هى $225/300=0.750$ للمجموعة A ، $195/300 = 0.650$ للمجموعة B وهى نفس النسبة فى المسألة السابقة . تحت الفرض H_0

$$\mu_{P_1 - P_2} = 0 \quad \text{and} \quad \sigma_{P_1 - P_2} = \sqrt{pq(1/N_1 + 1/N_2)} = \sqrt{(0{\cdot}70)(0{\cdot}30)(1/300 + 1/300)} = 0{\cdot}0374$$

حيث استخدمنا $0.70 = (195 + 225)/600$ كتقدير لـ p.

إذن

$$z = (P_1 - P_2)/\sigma_{P_1 - P_2} = (0.750 - 0.650)/0.0374 = 2.67$$

بما أن قيمة z أكبر من 2.33 ، فيمكن رفض الفرض عند مستوى معنوية 0.01 . أى نقرر أن المصل فعال باحتمال 0.01 أن نكون مخطئين فى هذا القرار .

هذا يوضح كيف أن زيادة حجم العينة يؤدى إلى زيادة مأمونية القرارات . وفى كثير من الأحيان ، قد يكون من غير العملى زيادة حجم العينة . فى مثل هذه الحالات قد نكون ملزمين باتخاذ قرارات مبنية على المعلومات المتاحة وأن نرضى بمخاطرة أكبر ناتجة عن اتخاذ قرارات خاطئة .

١٠ – ٢٢ فى دراسة بالعينة لقياس الرأى أخذت عينة من 300 ناخب فى المنطقة A و 200 ناخب فى المنطقة B حيث أظهرت أن 56% من المنطقة A و 48% من المنطقة B فى صالح مرشح معين . عند مستوى معنوية 0.05 ، اختبر الفرض القائل أن (أ) هناك اختلاف بين المنطقتين (ب) المرشح مفضل فى المنطقة A.

الحـــل :

اعتبر أن p_1 هى النسبة من جميع الأصوات فى المنطقة A التى فى صالح المرشح وأن p_2 هى النسبة من جميع الأصوات فى المنطقة B التى فى صالح هذا المرشح

تحت الفرض $H_0 : p_1 = p_2$ ، فإن

$$\mu_{P_1 - P_2} = 0 \text{ and } \sigma_{P_1 - P_2} = \sqrt{pq(1/N_1 + 1/N_2)} = \sqrt{(0.528)(0.472)(1/300 + 1/200)} = 0.0456$$

حيث استخدمنا كتقدير لقيم p و q القيم $[(0.56)(300) + (0.48)(200)]/500 = 0.528 \text{ and } (1 - 0.528) = 0.472$

إذن $$z = (P_1 - P_2)/\sigma_{P_1 - P_2} = (0.560 - 0.480)/0.0456 = 1.75$$

(أ) إذا كنا نريد فقط تحديد ما إذا كان هناك فرق بين المنطقتين ، فيجب أن نقرر بين الفرضين $(H_0 : p_1 = p_2)$ و $(H_1 : p_1 \neq p_2)$ وهذا يتضمن اختباراً من طرفين .

على أساس اختبار من طرفين عند مستوى المعنوية 0.05 ، فإننا نرفض H_0 إذا كانت z خارج الفترة من -1.96 إلى 1.96. وبما أن $z = 1.75$ تقع داخل هذه الفترة ، فلا يمكننا رفض H_0 عند هذا المستوى أى لايوجد فرق معنوى بين المنطقتين .

(ب) إذا أردنا تقرير ما إذا كان المرشح مفضل فى المنطقة A ، فيجب أن نقرر بين الفروض $(H_0 : p_1 = p_2)$ و $(H_1 : p_1 > p_2)$. وهذا يتضمن اختباراً من طرف واحد .

على أساس اختبار من طرف واحد عند مستوى المعنوية 0.05 ، فإننا نرفض H_0 إذا كانت z أكبر من 1.645 و بما أن هذه هى الحالة ، فيمكننا رفض H_0 عند هذا المستوى ، ونستنتج أن المرشح مفضل فى المنطقة A

اختبارات تتضمن توزيع ذى الحدين :

١٠ – ٢٣ أعطى مدرس اختباراً مفاجئاً يتضمن 10 أسئلة من النمط الذى تكون الإجابة عليه : صواب – خطأ . لاختبار الفرض بأن الطالب يخمن الإجابة ، استخدمت القاعدة التالية فى اتخاذ القرار :

إذا كانت هناك 7 أو أكثر من الإجابات صحيحة فإن الطالب لايخمن

إذا كانت هناك أقل من 7 إجابات صحيحة فالطالب يخمن .

أوجد احتمال رفض الفرض عندما يكون صحيحاً .

الحـــل :

اعتبر أن p هى احتمال الإجابة الصحيحة على السؤال .

احتمال إجابة X مسألة إجابة صحيحة من 10 مسائل هى ${}_{10}C_X p^X q^{10-X}$ حيث $q = 1 - p$

بهذا فتحت الفرض أن $p = 0.5$ (أن الطالب يخمن) ؛

Pr { 7 أو أكثر إجابة صحيحة } = Pr { 7 إجابات صحيحة } + Pr { 8 إجابات صحيحة } + Pr { 9 إجابة صحيحة } + Pr { 10 إجابات صحيحة }

$$= {}_{10}C_7(\tfrac{1}{2})^7(\tfrac{1}{2})^3 + {}_{10}C_8(\tfrac{1}{2})^8(\tfrac{1}{2})^2 + {}_{10}C_9(\tfrac{1}{2})^9(\tfrac{1}{2}) + {}_{10}C_{10}(\tfrac{1}{2})^{10} = 0{\cdot}1719$$

بهذا فإن احتمال أن نصل إلى قرار بأن الطالب لايخمن الإجابة عندما يكون بالفعل يخمن الإجابة هو 0.1719 لاحظ أن هذا احتمال الخطأ من النوع الأول .

١٠ – ٢٤ فى المسألة السابقة ، أوجد احتمال قبول الفرض $p = 0.5$ عندما تكون القيمة p الفعلية هى 0.7

الحـــل :

تحت الفرض $p = 0.7$ ،

Pr { أقل من 7 إجابات صحيحة } = 1 − Pr { 7 إجابات أو أكثر صحيحة }

$$= 1 - [{}_{10}C_7(0{\cdot}7)^7(0{\cdot}3)^3 + {}_{10}C_8(0{\cdot}7)^8(0{\cdot}3)^2 + {}_{10}C_9(0{\cdot}7)^9(0{\cdot}3) + {}_{10}C_{10}(0{\cdot}3)^{10}] = 0{\cdot}3504$$

١٠ - ٢٥ فى المسألة ١٠ - ٢٣ ، أوجز احتمال قبول الفرض $p = 0.5$ عندما

تكون القيمة الفعلية (أ) $p = 0.6$ (ب) $p = 0.8$

(جـ) $p = 0.9$ (د) $p = 0.3$

(هـ) $p = 0.2$ (و) $p = 0.1$

الحــل :

(أ) إذا كانت $p = 0.6$ فإن الاحتمال المطلوب

$= 1 - \Pr\{$ 7 إجابات صحيحة $\} + \Pr\{$ 8 إجابات صحيحة $\}$

$+ \Pr\{$ 9 إجابات صحيحة $\} + \Pr\{$ 10 إجابات صحيحة $\}$

$$= 1 - [\Pr\{7 \text{ correct}\} + \Pr\{8 \text{ correct}\} + \Pr\{9 \text{ correct}\} + \Pr\{10 \text{ correct}\}]$$
$$= 1 - [{}_{10}C_7(0{\cdot}6)^7(0{\cdot}4)^3 + {}_{10}C_8(0{\cdot}6)^8(0{\cdot}4)^2 + {}_{10}C_9(0{\cdot}6)^9(0{\cdot}4) + {}_{10}C_{10}(0{\cdot}6)^{10}] = 0{\cdot}618$$

النتائج من (ب)، (جـ) . . . إلى (و) يمكن الحصول عليها بنفس الطريقة وهى موضحة بالجدول ١٠ - ٤ إلى جانب القيم المقابلة ! $p = 0.7$ و $p = 0.6$.

لاحظ أن الاحتمال يرمز له بالرمز β (الخطأ من النوع الثانى) .

كذلك يشمل الجدول القيم المقابلة ل $p = 0.5$, وهى $\beta = 1 - 0.1719 = 0.828$ من المسألة ١٠ - ٢٣ ، $p = 0.7$ من المسألة ١٠ - ٢٤ .

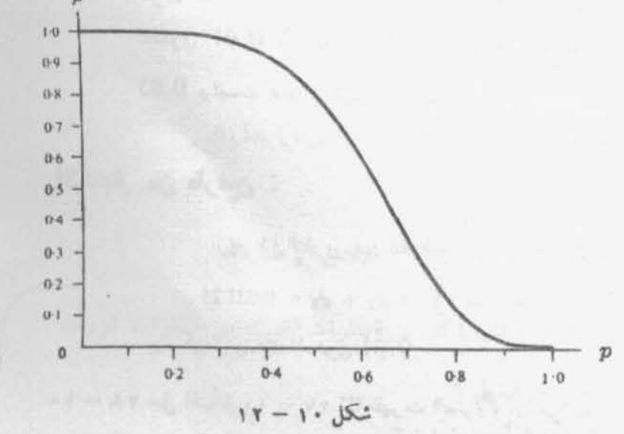
جــدول ١٠ - ٤

p	0·1	0·2	0·3	0·4	0·5	0·6	0·7	0·8	0·9
β	1·000	0·999	0·989	0·945	0·828	0·618	0·350	0·121	0·13

١٠ - ٢٦ استخدم المسألة ١٠ - ٢٥ لتكوين الرسم البيانى لقيم β مقابل p ، أى منحنى توصيف العمليات لقاعدة اتخاذ القرار فى المسألة ١٠ - ٢٣

الحــل :

الرسم البيانى المطلوب موضح بالشكل ١٠ - ١٢ لاحظ التماثل بين الرسم ومنحنى OC للمسألة ١٠ - ١٤ .



شكل ١٠ - ١٢

إذا رسمنا $(1-\beta)$ مقابل p ، فإننا نحصل على منحنى قوة الاختبار .

يوضح الشكل أن قاعدة اتخاذ القرار المعطاة أكثر قوة فى رفض $p = 0.5$ عندما تكون قيم p الفعلية $p \leqq 0.4$ أو $p \geqq 0.8$.

١٠ – ٢٧ قذفت عملة 6 مرات فأظهرت الصورة فى الست مرات هل يمكن أن نستنتج عند مستوى المعنوية (أ) 0.05 (ب) 0.01 . أن العملة متحيزة ؟

اعتبر كلا من الاختبار من طرف واحد والاختبار من طرفين .

الحـــل :

اعتبر أن p تمثل احتمال ظهور الصورة فى رمية واحده للعملة .

تحت الفرض $H_0 : p = 0.5$ (أى العملة غير متحيزة) ،

$$\text{P}(X) = \Pr \{ \text{رميات } 6 \text{ صورة فى } X \} = {}_6C_X (1/2)^X (1/2)^{6-X}$$

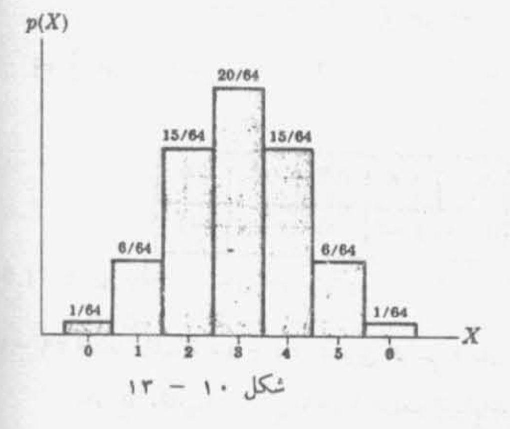
$$= {}_6C_X/64$$

إذن فاحتمال ظهور 6 ,5 ,4 ، ,3 ,2 ,1 ,0 صورة

هى على الترتيب $\frac{1}{64}, \frac{6}{64}, \frac{15}{64}, \frac{20}{64}, \frac{15}{64}, \frac{6}{64}$ and $\frac{1}{64}$.

كما هوموضح بيانياً فى التوزيع الاحتمالى بالشكل ١٠ – ١٣

الاختبار من طرف واحد :



شكل ١٠ – ١٣

نريد هنا التقرير بين الفرضين $(H_0 : p = 0.5)$ و $(H_1 : p > 0.5)$

وبما أن $\Pr \{ \text{6صور} \} = \frac{1}{64} = 0{\cdot}01562$

و $\Pr \{ \text{5 صور أو 6 صور} \} = \frac{6}{64} + \frac{1}{64} = 0{\cdot}1094$,

فيمكن رفض H_0 عند المستوى 0.05 وليس عند المستوى 0.01 (النتائج المشاهدة معنوية عند المستوى 0.05 وليست عند المستوى 0.01) .

الاختبار من طرفين :

نريد هنا التقرير بين الفرضين $(H_0 : p = 0.5)$ و $(H_1 : p \neq 0.5)$ بما أن $\Pr \{ \text{صفر صورة أو 6 صور} \} = \frac{1}{64} + \frac{1}{64} = 0{\cdot}03125$ ، فيمكن رفض H_0 عند المستوى 0.05 ولـكن ليس عند المستوى 0.01.

١٠ – ٢٨ حل المسألة ١٠ – ٢٧ إذا ظهرت الصورة 5 مرات .

الحـــل :

اختبار من طرف واحد :

بما أن $\Pr\{$ 5 أو 6 صور $\} = \frac{6}{64} + \frac{1}{64} = \frac{7}{64} = 0.1094$ ، فلا يمكن رفض H_0 عند مستوى 0.05 أو 0.01 .

اختبار من طرفين :

بما أن $\Pr\{$ صفر أو واحد أو 5 أو 6 صور $\} = 2(\frac{7}{64}) = 0.2188$ ، فلا يمكن رفض H_0 عند المستوى 0.05 أو 0.01

مســـائل اضافية

اختبارات الأوساط والنسب باستخدام التوزيع الطبيعي :

١٠ – ٢٩ وعاء به كرات أما حمراء أو زرقاء . لاختبار فرض تساوى نسبة هذين اللونين قمنا بسحب 64 كرة مع الإرجاع ، وتم ملاحظة لون الكرة وأتخذنا القاعدة التالية فى اتخاذ القرار

أقبل الفرض إذا كان عدد الكرات الحمراء المسحوبة بين 28 و 36 . ارفض الفرض فيما عدا ذلك .

(أ) أوجد احتمال رفض الفرض عندما يكون بالفعل صحيح .

(ب) عبر بيانياً عن القاعدة السابقة فى اتخاذ القرار وعن النتيجة التى حصلت عليها فى (ب) .

ج : (أ) 0.2606

١٠ – ٣٠ (أ) ماهى القاعدة التى يجب أن تتبناها فى اتخاذ القرار فى المسألة ١٠ – ٢٩ إذا كان المطلوب أن يكون احتمال رفض الفرض عندما يكون بالفعل صحيح لايجاوز 0.01 على الأكثر . أى مستوى المعنوية 0.01 ؟

(ب) عند أى مستوى ثقة تقبل الفرض ؟

(ج) ماهى قاعدة اتخاذ القرار إذا حددنا مستوى المعنوية عند 0.05 ؟

ج :(أ) أقبل الفرض إذا كانت الكرات الحمراء المسحوبة بين 22 و 42 ، ارفض فيما عدا ذلك .

(ب) 0.99

(ج) اقبل الفرض إذا كانت الكرات الحمراء المسحوبة بين 24 و 40 ، ارفض فيما عدا ذلك .

١٠ – ٣١ افترض أننا نريد فى المسألة ١٠ – ٢٩ اختبار الفرض أن هناك نسبة أكبر من الكرات الحمراء عن الكرات الزرقاء

(أ) ماهو فرض العدم الذى يجب أن تفرضه وما هو الفرض البديل ؟

(ب) هل يجب أن نستخدم اختباراً من طرف واحد أو اختباراً من طرفين ؟

(جـ) ماهى قاعدة اتخاذ القرار التى سوف تتخذها إذا كان مستوى المعنوية هو 0.05 ؟

(د) ماهى قواعد اتخاذ القرار إذا كان مستوى المعنوية 0.01 ؟

ج : (أ) $H_0 : p = 0.5$ و $H_1 : p > 0.5.$

(ب) اختبار من طرف واحد

(جـ) ارفض H_0 إذا سحبت أكثر من 39 كرة حمراء ، اقبل الفرض فيما عدا ذلك (أو لاتتخذ أى قرار) .

(د) ارفض H_0 إذا سحبت أكثر من 41 كرة حمراء ، اقبل الفرض فيما عدا ذلك (أو لاتتخذ أى قرار) .

١٠ - ٣٢ قذفت زهرتين طاولة 100 مرة وسجل عدد المرات التى ظهر فيها مامجموعه « سبعة » ووجد أنه 23 مرة . اختبر الفرض أن الزهرتين غير متحيزتين ، باستخدام (أ) اختبار من طرفين (ب) اختبار من طرف واحد . مستخدماً مستوى معنوية 0.05 . ناقش الأسباب – إذا وجدت – لتفضيل أحد الاختبارين عن الآخر .

ج : (أ) لايمكن رفض الفرض عند المستوى 0.05 .

(ب) يمكن رفض الفرض عند المستوى 0.05 .

١٠ - ٣٣ حل المسألة ١٠ - ٣٢ إذا كان مستوى المعنوية هو 0.01 .

ج : لايمكن رفض الفرض عند المستوى 0.01 فى أى من (أ) أو (ب)

١٠ - ٣٤ يدعى منتج أن 95% على الأقل من المعدات التى يمد بها مصنع مطابقة للمواصفات . تم اختبار عينة من 200 وحدة من المعدات ووجد أن بها 18 وحدة تالفة . اختبر ادعاء المنتج عند مستوى المعنوية

(أ) 0.01 (ب) 0.05

ج : يمكن رفض ادعائه عند كلا المستويين باستخدام اختبار من طرف واحد .

١٠ - ٣٥ نسبة الذين حصلوا على تقدير A's فى مادة الطبيعة فى إحدى الجامعات خلال فترة طويلة من الزمن كانت 10% . خلال فصل دراسى معين حصل 40 طالباً على تقدير A من مجموعة من 300 طالب . اختبر معنوية هذه النتيجة عند المستوى (أ) 0.05 (ب) 0.01.

ج : باستخدام اختبار من طرف واحد ، النتيجة معنوية عند المستوى 0.05 ولكن غير معنوية عند المستوى 0.01

١٠ - ٣٦ من الخبرة وجد أن متوسط المقاومة للقطع لحزمة من الخيوط هو 9.72 N بانحراف معيارى 1.40 N . فى الوقت الحاضر سحبت عينة من 36 حزمة من الخيوط وكان متوسط مقاومتها للقطع هو 8.93 N هل يمكن الاستنتاج عند مستوى معنوية (أ) 0.05 (ب) 0.01 بأن الخيوط أصبحت ذات جودة أقل ؟

ج : نعم ، عند كلا المستويين ، باستخدام اختبار من طرف واحد فى كل حالة .

١٠ – ٣٧ فى أحد الاختبارات التى أعطيت لعدد كبير من المدارس المختلفة ، كان متوسط الدرجات هو 74.5 والانحراف المعيارى 8.0 . فى مدرسة معينة حيث أدى 200 طالب هذا الامتحان ، كل متوسط درجاتهم 75.9 .

ناقش معنوية هذه النتيجة عند المستوى 0.05 من وجهة نظر :

(أ) الاختبار من طرف واحد (ب) الاختبار من طرفين ، وضح استنتاجاتك بدقة على ضوء هذه الاختبارات .

ج : النتيجة معنوية عند المستوى 0.05 فى كل من الاختبارات من طرف واحد والاختبار من طرفين .

١٠ – ٣٨ حل المسألة ١٠ – ٣٧ إذا كان مستوى المعنوية هو 0.01 .

ج : النتيجة معنوية عند مستوى 0.01 إذا كان الاختبار من طرف واحد أما إذا كان الاختبار من طرفين فالنتيجة غير معنوية .

منحنيات توصيف العمليات :

١٠ – ٣٩ باستخدام المسألة ١٠ – ٢٩ ، أوجد احتمال قبول الفرض بأن هناك نسباً متساوية من الكرات الحمراء والكرات الزرقاء إذا كانت النسبة الفعلية للكرات الحمراء هى (أ) 0.6 (ب) 0.7 (جـ) 0.8 (د) 0.9 (هـ) 0.3

ج : (أ) 0.3112 (ب) 0.0118 (جـ) 0 (د) 0 (هـ) 0.0118 .

١٠ – ٤٠ مثل بيانياً نتائج المسألة السابقة وذلك برسم (أ) β مقابل p (ب) $(1 - \beta)$ مقابل p .

قارن هذه الأشكال بتلك الموضحة فى المسألة ١٠–١٢ باعتبار أن مايقابل الكرات الحمراء والزرقاء هى الصور والكتابة على الترتيب .

١٠ – ٤١ (أ) حل المسائل ١٠ – ١٣ و ١٠ – ١٤ إذا اتفق على اختبار 400 كابل (ب) ماهى الاستنتاجات التى تصل إليها فيما يختص بالخطأ من النوع الثانى عندما تكبر حجم العينة ؟

١٠ – ٤٢ كون (أ) منحنى OC (ب) منحنى قوة الاختبار المقابل للمسألة ١٠ – ٣١ . قارن هذه المنحنيات بمنحنيات المسألة ١٠–١٤ .

خرائط الرقابة على الانتاج :

١٠ – ٤٣ إذا كان من المعروف فى الماضى أن نوعاً معيناً من الخيوط من إنتاج أحد المصانع متوسط قوة مقاومته للقطع هو 8.64 N بانحراف معيارى 1.28 N .

لتحديد ما إذا كان الإنتاج يتم طبقاً للمواصفات ، أخذ عينة من 16 قطعة .

أوجد (أ) 99.73% أو 3σ (ب) 99% (جـ) 95%

حدود مراقبة فى خرائط الرقابة على الإنتاج . ووضح تطبيقاتها .

ج :(أ) 6

(ب) 4 مسامير تالفة

١٠ – ٤٤ متوسط نسبة الإنتاج التالف فى مصنع لإنتاج المسامير هو 3% . للمحافظة على هذا المستوى فى الأداء ، تسحب عينة حجمها 200 مسمار من المسامير المنتجة كل 4 ساعات ويتم اختبارها . أوجد (أ) 99%

(ب) 95% ، حدود المراقبة لعدد المسامير التالفة فى كل عينة . لاحظ أننا نحتاج فى هذه الحالة ألى حد المراقبة الأعلى فقط .

ج : حد المراقبة الأعلى هو على الترتيب (أ) 6 (ب) 4 مسامير تالفة .

اختبارا تتضمن الفروق بين المتوسطات والنسب :

١٠ – ٤٥ عينة مكونة من 100 لمبة كهربائية من إنتاج المصنع A ، كان متوسط عمرها الإنتاجى 1190 ساعة وانحرافها المعيارى 90 ساعة . عينة أخرى من 75 لمبة من إنتاج مصنع B كان متوسط عمرها الأنتاجى 1230 ساعة وانحرافها المعيارى 120 ساعة . هل هناك فرق معنوى بين متوسط الأعمار الإنتاجية للنوعين عند مستوى المعنوية

(أ) 0.05 (ب) 0.01 ؟

ج : (أ) نعم (ب) لا .

١٠ – ٤٦ فى المسألة السابقة اختبر الفرض أن لمبات المصنع B أكثر جودة من لمبات المصنع A باستخدام مستوى المعنوية

(أ) 0.05 (ب) 0.01

اشرح الفرق بين هذا الاختبار والاختبار فى المسألة السابقة . هل النتيجة تناقض نتيجة المسألة السابقة .

ج : باستخدام اختبار من طرف واحد لكل من مستويات المعنوية يظهر أن النوع B أكثر جودة من A .

١٠ – ٤٧ فى اختبار مبادىء الهجاء ، كان متوسط درجات 32 ولد هو 72 بانحراف معيارى 8 ، بينما متوسط درجات 36 بنت هو 75 بانحراف معيارى 6 . اختبر الفرض عند (أ) 0.05 (ب) 0.01 مستوى معنوية بأن البنات أفضل فى الهجاء من الأولاد .

ج : باستخدام اختبار من طرف واحد نجد أن الفروق معنوية عند مستوى 0.05 ولكن غير معنوية عند مستوى 0.01 .

١٠ – ٤٨ لاختبار تأثير نوع جديد من الإسمدة على إنتاج القمح ، قسمت قطعة أرض إلى 60 مربع متساوى المساحة ، كل قطعة لها نفس المواصفات مثل نوع التربة ومقدار تعرضها للشمس وغير ذلك . استخدم السماد الجديد فى 30 قطعة والسماد القديم فى القطعة الباقية . كان متوسط الحزم من القمح التى تم حصادها لكل مربع من الأرض التى استخدم فيها السماد الجديد هو 18.2 لتر بانحراف معيارى 0.63 لتر . والمتوسط المقابل للمربعات التى استخدم فيها السماد القديم هو 17.8 بانحراف معيارى 0.54 باستخدام مستوى المعنوية (أ) 0.05 (ب) 0.01 . اختبر الفرض بأن السماد الجديد أفضل من السماد القديم .

ج : باستخدام اختبار من طرف واحد نجد أن السماد الجديد أفضل من السماد القديم عند كل من مستويات المعنوية .

١٠ – ٤٩ عينة عشوائية من 200 مسمار من إنتاج A و 100 مسامير من إنتاج B وجد أن 19 مسمار من انتاج A و 5 مسامير من انتاج B تالف . اختبر الفرض القائل أن

(أ) هناك اختلاف فى أداء الماكينتين .

(ب) الماكينة B تعمل بصورة أفضل من الماكينة A .

استخدم مستوى المعنوية 0.05 .

ج : (أ) يظهر الاختبار من طرفين بأنه لايوجد اختلاف فى أداء الماكينتين عند المستوى 0.05 .

(ب) اختبار من طرف واحد يظهر أن B لاتعمل بصورة أفضل من A عند المستوى 0.05 .

١٠ – ٥٠ وعاءان ، A و B ، يحتويان على عدد متساو من الكرات ، ولكن نسبة الكرات الحمراء فى كل منها مختلف . سحبت عينة حجمها 50 كرة مع الإرجاع من كل من الوعائين ، وقد ظهر بها 32 كرة حمراء من الوعاء A و 23 . كره حمراء من الوعاء B باستخدام مستوى المعنوية 0.05 ، اختبر الفرض القائل أن (أ) الوعاء أن يحتويان على نسب متساوية من الكرات الحمراء (ب) A يحتوى على نسبة أكبر من الكرات الحمراء عن B .

ج : (أ) اختبار من طرفين عند مستوى المعنوية 0.05 يفشل فى رفض فرض تساوى النسب

(ب) اختبار من طرف واحد عند المستوى 0.05 يدل على أن A يحتوى على نسبة أكبر من الكرات الحمراء عن B .

اختبارات تتضمن توزيعات ذى الحدين :

١٠ – ٥١ بالرجوع إلى المسألة ١٠ – ٢٣ ، أوجد أقل عدد من الأسئلة يجب أن يجيب عليها الطالب إجابة صحيحة قبل أن يكون المدرس متأكداً بأن الطالب لايخمن الإجابة تقريباً وذلك عند مستوى معنوية (أ) 0.05 (ب) 0.01 (جـ) 0.001 (د) 0.06 . ناقش النتائج .

ج : (أ) 9 (ب) 10 (جـ) 10 (د) 8

١٠ – ٥٢ كون الأشكال البيانية كالتى تمت فى المسألة ١٠ – ١ لبيانات المسألة ١٠ – ٢٤

١٠ – ٥٣ حل المسائل ١٠ – ٢٣ إلى ١٠ – ٢٥ إذا استبدلت 7 فى قاعدة اتخاذ القرار فى المسألة ١٠ – ٢٣ إلى 8 .

١٠ - ٥٤ قذفت عملة 8 مرات فأظهرت الصورة 7 مرات . هل يمكن رفض الفرض بأن العملة غير متحيزة عند مستوى المعنوية

(أ) 0.05 (ب) 0.10 (جـ) 0.01 ؟

استخدم اختبار من طرفين .

ج : (أ) لا (ب) نعم (جـ) لا

١٠ - ٥٥ حل المسألة ١٠ - ٥٤ إذا استخدمنا اختباراً من طرف واحد .

ج : (أ) نعم (ب) نعم (جـ) لا

١٠ - ٥٦ حل المسألة ١٠ - ٥٤ إذا اظهرت العملة الصورة 8 مرات .

ج : (أ) نعم (ب) نعم (جـ) نعم

١٠ - ٥٧ حل المسألة ١٠ - ٥٤ إذا اظهرت العملة الصورة 6 مرات .

ج : (أ) لا (ب) لا (جـ) لا

١٠ - ٥٨ وعاء يحتوى على عدد كبير من الكرات الحمراء والبيضاء . سحبت عينة عشوائية من 8 كرات وأظهرت 6 كرات بيضاء و 2 كرة حمراء . باستخدام اختبار ومستوى معنوية مناسبين ، ناقش نسب الكرات البيضاء والحمراء الوعاء .

١٠ - ٥٩ ناقش كيف يمكن استخدام نظرية المعاينة فى استقصاء نسب أنواع السمك الموجود فى بحيرة .

الفصل الحادى عشر

نظرية العينات الصغيرة

توزيع « استودينت » ت
وتوزيع كا — تربيع (كا^2)

العينات الصغيرة :

فى الفصول السابقة استخدمنا الحقيقة أنه إذا كان حجم العينة $N > 30$ ، وتسمى بالعينات ذات الحجم الكبير ، فإن توزيع المعاينة لكثير من الإحصائيات سيكون تقريباً كالتوزيع الطبيعى ، وتزداد جودة التقريب كلما زادت N . للعينات ذات الحجم $N < 30$ ، وتسمى بالعينات الصغيرة . فإن هـذا التقريب غير جيد ويزداد سوءاً كلما صغرت قيمة N ، بحيث يكون من الضرورى إدخال التعديلات الملائمة . تسمى دراسة توزيعات المعاينة للإحصائيات للعينات الصـغيرة نظرية العينات الصغيرة . وبصورة أكثر دقة نظرية العينات الدقيقة ، نظراً لأن النتائج التى نحصل عليها تنطبق فى حالة العينات الكبيرة كما فى العينات الصغيرة . فى هذا الفصل سنقوم بدراسة توزيعين مهمين هما توزيع «أستودينت » ت ، توزيع كا – تربيع (كا^2) .

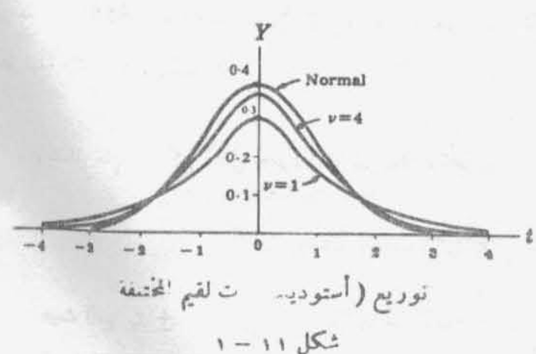
توزيع « استودينت » ت :

عرف الإحصائية

$$t = \frac{\bar{X}-\mu}{s}\sqrt{N-1} = \frac{\bar{X}-\mu}{\hat{s}/\sqrt{N}} \qquad (1)$$

والتى تقابل الإحصائية z المعرفة بـ $z = \dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{N}}$ (أنظر صفحة ٢٧٠)

إذا أخذنا فى الاعتبار عينات حجمها N مسحوبة من مجتمع يتوزع توزيعاً طبيعياً (أو يقترب من التوزيع الطبيعى) متوسـطة μ وإذا حسبنا لكل عينة t ، باستخدام الوسط الحسابى للعينة $\bar{X}$ والانحراف المعيارى للعينة s أو $\hat{s}$ فإنه يمكننا الحصول على توزيع المعاينة للأحصائية t . هذا التوزيع (أنظر الشكل ١١ – ١) يعرف كالآتى :



توزيع (أستوديـ ت لقيم المختلفة

شكل ١١ – ١

$$Y = \frac{Y_0}{\left(1 + \frac{t^2}{N-1}\right)^{N/2}} = \frac{Y_0}{\left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{(\nu+1)/2}} \qquad (٢)$$

حيث Y_0 مقدار ثابت يعتمد على N بحيث يجعل المساحة تحت المنحنى مساوية للواحد ، وحيث الثابت $\nu = (N-1)$ يسمى عدد درجات الحرية (ν هو الحرف اليونانى « نيو ») . لتعريف درجات الحرية ، أنظر صفحة ٣٠٧ .

التوزيع (٢) يسمى توزيع « أستودينت » ت عقب اكتشافه بواسطة جوست ، والذى نشر أعماله فى الجزء الأول من القرن العشرين تحت الإسم المستعار « أستودينت » .

لقيم ν أو N الكبيرة (بالتأكيد لقيم $N \geqq 30$) المنحنيات (٢) تعد تقريباً لمنحنى التوزيع الطبيعى المعيارى $Y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}$ ؛ كما هو موضح بالشكل ١١ – ١ .

فترات الثقة :

كما شرحنا بالنسبة للتوزيع الطبيعى فى الفصل التاسع ، يمكن أن نعرف 95% و 99% أو غير ذلك من فترات الثقة باستخدام جدول توزيع t فى الملحق ، صفحة ٥٣٤ . بهذه الطريقة يمكن تقدير داخل حدود ثقة معينة متوسط المجتمع μ .

على سبيل المثال ، إذا كانت $-t_{0.975}$ و $t_{0.975}$ هى قيم t والتى تجعل 2.5% من المساحة تقع فى كل طرف من طرفى توزيع t فإن 95% فترة ثقة لـ t هى :

$$-t_{0.975} < \frac{\bar{X} - \mu}{s}\sqrt{N-1} < t_{0.975} \qquad (٣)$$

ومنها نرى أنه من المقدر أن تقع μ فى الفترة

$$\bar{X} - t_{0.975}\frac{s}{\sqrt{N-1}} < \mu < \bar{X} + t_{0.975}\frac{s}{\sqrt{N-1}} \qquad (٤)$$

بدرجة ثقة 95% (أى احتمال 0.95) . لاحظ أن $t_{0.975}$ تمثل قيمة المئين الذى رتبته 97.5 ، بينما $t_{0.025} = -t_{0.975}$ تمثل قيمة المئين الذى رتبته 2.5 .

وبشكل عام ، يمكن تمثيل حدود الثقة لمتوسطات المجتمع كالآتى :

$$\bar{X} \pm t_c \frac{s}{\sqrt{N-1}} \qquad (٥)$$

حيث القيم $\pm t_c$ ، تسمى بالقيم الحرجة أو معاملات الثقة ، وتعتمد على مستوى الثقة المرغوب فيه وحجم العينة . ويمكن الحصول عليها من الجدول فى صفحة ٥٣٤ .

بما أن $\nu = 4 - 1 = 3$ فإن $\chi^2_{0.95} = 7.81$ ، فإننا نصل إلى نفس الاستنتاج السابق . ومن سوء الحظ أن تقريب χ^2 للتكرارات الصغيرة غير جيد ، ولهذا لا ننصح بضم التكررات معاً فى هذه الحالة ولكن يجب أن نلجأ لطرق الاحتمال الدقيقة المذكورة فى الفصل السادس .

١٢ – ٨ فى 360 رمية لزهرتين طاولة ، ظهر ما مجموعه « سبعة » 74 مرة وما مجموعه « إحدى عشر » 24 مرة باستخدام مستوى المعنوية 0.05 ، اختبر الفرض أن الزهرتين غير متحيزتان .

الحـــل :

عدد الطرق التى تظهر بها زهرتان هو 36 طريقة . ما مجموعه « سبعة » يمكن أن تحدث بـ 6 طرق ، ما مجموعه « إحدى عشر » يمكن أن تحدث بطريقتين .

إذن $\Pr\{\text{سبعة}\} = 6/36 = 1/6$ ، $\Pr\{\text{إحدى عشر}\} = 2/36 = 1/18$ بهذا فإننا نتوقع $1/6(360) = 60$ « سبعة » و $1/18(360) = 20$ « إحدى عشر » بحيث

$$\chi^2 = \frac{(74-60)^2}{60} + \frac{(24-20)^2}{20} = 4.07$$

بما أن $\nu = 2 - 1 = 1$ فإن $\chi^2_{0.95} = 3.84$. إذن بما أن $4.07 > 3.84$ فإننا نميل إلى رفض الفرض بأن الزهر غير متحيز . باستخدام تصحيح ييتس ، فإننا نجد :

$$\chi^2\ (\text{المصحح}) = \frac{(|74-60|-0.5)^2}{60} + \frac{(|24-20|-0.5)^2}{20} = \frac{(13.5)^2}{60} + \frac{(3.5)^2}{20} = 3.65$$

بهذا فإنه على أساس استخدام χ^2 المصحح ، فإننا لن نرفض الفرض عند مستوى المعنوية 0.05 .

وبشكل عام فإنه فى حالة العينات ذات الحجم الكبير كما هو الحال فى هذه المسألة ، فإن استخدام تصحيح ييتس أظهر أنه أكثر مأمونية من النتائج غير المصححة . وعلى أية حال ، فبما أن قيمة χ^2 المصححة تقع قرب القيمة الحرجة ، فإننا نتردد فى اتخاذ القرار فى أى اتجاه . فى مثل هذه الحالات قد يكون من الأفضل زيادة حجم العينة بأخذ قراءات أكثر إذا كنا نرغب فى الاحتفاظ بمستوى المعنوية 0.05 لسبب من الأسباب . بخلاف ذلك فيمكن رفض الفرض عند مستوى آخر (مثل 0.10) إذا كان ذلك مقبولا .

١٢ – ٩ فى بحث شمل 320 أسرة بكل منها 5 أطفال أظهر التوزيع الموضح بالجدول١٢ – ٣ . هل هذه النتيجة متفقة مع الفرض القائل أن ميلاد الذكور والإناث متساويين فى الاحتمال ؟

جدول ١٢ – ٣

عدد الأولاد والبنات	5 أولاد 0 بنات	4 أولاد 1 بنات	3 أولاد 2 بنات	2 أولاد 3 بنات	1 ولد 4 بنات	0 ولد 1 بنات	الإجمالى
عدد الأسر	18	56	110	88	40	8	320

الحــل :

اعتبر أن p هو احتمال ميلاد ذكر ، $q = 1 - p$ هو احتمال ميلاد أنثى . بهذا فإن احتمالات (5 أولاد) ، (4 أولاد وبنت) ، . . . . . ، (5 بنات) نحصل عليها من حدود مفكوك ذى الحدين

$$(p+q)^5 = p^5 + 5p^4q + 10p^3q^2 + 10p^2q^3 + 5pq^4 + q^5$$

إذا كانت $p = q = \frac{1}{2}$ فإن :

Pr { 5 أولاد ، صفر بنت } = $(\frac{1}{2})^5 = \frac{1}{32}$ Pr { 2 ولد ، 3 بنات } = $10(\frac{1}{2})^2(\frac{1}{2})^3 = \frac{10}{32}$

Pr { 4 أولاد ، بنت } = $5(\frac{1}{2})^4(\frac{1}{2}) = \frac{5}{32}$ Pr { ولد ، 4 بنات } = $5(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})^4 = \frac{5}{32}$

Pr { 3 أولاد ، 2 بنت } = $10(\frac{1}{2})^3(\frac{1}{2})^2 = \frac{10}{32}$ Pr { صفر ولد ، 5 بنات } = $(\frac{1}{2})^5 = \frac{1}{32}$

بهذا فإن عدد الأسر التى بها 0, 1, 2, 3, 4, 5 ولد تحصل عليها بضرب الاحتمالات السابقة فى عدد الأسر 320 والنتيجة هى 10, 50, 100, 100, 50, 10 . وبهذا فإن

$$\chi^2 = \frac{(18-10)^2}{10} + \frac{(56-50)^2}{50} + \frac{(110-100)^2}{100} + \frac{(88-100)^2}{100} + \frac{(40-50)^2}{50} + \frac{(8-10)^2}{10} = 12.0$$

وبما أن $\chi^2_{0.95} = 11.1$ و $\chi^2_{0.99} = 15.1$ لدرجات حرية $v = 6 - 1 = 5$ ، فيمكن رفض الفرض عند مستوى المعنوية 0.05 ولكن لا يمكن رفضه عند المستوى 0.01 . من هذا ننتهى إلى أن النتيجة محتملة المعنوية ، وأن ميلاد الذكور والإناث ليسا متساويا الاحتمال .

١٢ - ١٠ بين أن اختبار كا ـ تربيع المتضمن تصنيفين يكافىء اختبار المعنوية فى صفحة ٢٧٢ ، الفصل العاشر .

الحــل :

إذا كانت P هى نسبة العينة فى المجموعة I و p هى نسبة المجتمع و N هى إجمال التكرارات ، فإنه يمكن توضيح الوضع باستخدام الجدول المرفق . بالتعريف

	I	II	الاجمالى
التكرار المشاهد	NP	$N(1-P)$	N
التكرار المتوقع	Np	$N(1-p) = Nq$	N

$$\chi^2 = \frac{(NP-Np)^2}{Np} + \frac{[N(1-P) - N(1-p)]^2}{Nq}$$

$$= \frac{N^2(P-p)^2}{Np} + \frac{N^2(P-p)^2}{Nq} = N(P-p)^2\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right) = \frac{N(P-p)^2}{pq} = \frac{(P-p)^2}{pq/N}$$

وهو مربع الإحصائية z فى الصفحة ٢٧٢ .

١٢–١١ (أ) أثبت أن الصيغة (١) ، فى صفحة ٣٢٣ ، يمكن كتابتها $\chi^2 = \Sigma \frac{o_j^2}{e_j} - N.$

(ب) استخدم نتيجة (أ) لإثبات قيمة χ^2 المحسوبة فى المسألة ١٢ – ٦ .

الحـــل :

(أ) بالتعريف

$$\chi^2 = \Sigma \frac{(o_j - e_j)^2}{e_j} = \Sigma \left(\frac{o_j^2 - 2o_j e_j + e_j^2}{e_j}\right)$$

$$= \Sigma \frac{o_j^2}{e_j} - 2\Sigma o_j + \Sigma e_j = \Sigma \frac{o_j^2}{e_j} - 2N + N = \Sigma \frac{o_j^2}{e_j} - N$$

حيث استخدمنا النتيجة (٢) فى صفحة ٣٢٣

(ب)

$$\chi^2 = \Sigma \frac{o_j^2}{e_j} - N = \frac{(315)^2}{312{\cdot}75} + \frac{(108)^2}{104{\cdot}25} + \frac{(101)^2}{104{\cdot}25} + \frac{(32)^2}{34{\cdot}75} - 556 = 0{\cdot}470$$

جودة التوفيق :

١٢–١٢ استخدم اختبار كا – تربيع لتحديد يد مدى جودة توفيق البيانات بالمسألة ١٧ – ٣١ ، الفصل السابع .

الحـــل :

$$\chi^2 = \frac{(38 - 33{\cdot}2)^2}{33{\cdot}2} + \frac{(144 - 161{\cdot}9)^2}{161{\cdot}9} + \frac{(342 - 316{\cdot}2)^2}{316{\cdot}2} + \frac{(287 - 308{\cdot}7)^2}{308{\cdot}7} + \frac{(164 - 150{\cdot}7)^2}{150{\cdot}7} + \frac{(25 - 29{\cdot}4)^2}{29{\cdot}4}$$
$$= 7{\cdot}54.$$

بما أن عدد المعالم المستخدمة فى تقدير التكرارت المتوقعة هى $m = 1$ (بالتحديد المعلمة p لتوزيع ذى الحدين) ، $v = k - 1 - m = 6 - 1 - 1 = 4$

ل $v = 4$ ، $\chi^2_{0{\cdot}95} = 9.49$. وبهذا فإن التوفيق جيد

ل $v = 4$ ، $\chi^2_{0{\cdot}05} = 0.711$. , بما أن $\chi^2 = 7.54 > 0.711$ ، فإن التوفيق ليس على درجة عالية جداً من الدقة .

١٢–١٣ حدد مدى جودة توفيق بيانات المسألة ٧ – ٣٣ بالمسألة ٧ – ٣٣ ، الفصع السابع .

الحـــل :

$$\chi^2 = \frac{(5 - 4{\cdot}13)^2}{4{\cdot}13} + \frac{(18 - 20{\cdot}68)^2}{20{\cdot}68} + \frac{(42 - 38{\cdot}92)^2}{38{\cdot}92} + \frac{(27 - 27{\cdot}71)^2}{27{\cdot}71} + \frac{(8 - 7{\cdot}43)^2}{7{\cdot}43} = 0{\cdot}959$$

بما أن عدد المعالم المستخدمة فى تقدير التكرارات المتوقعة هى ٢ = m (بالتحديد المتوسط μ والانحراف المعيارى σ للتوزيع الطبيعى) ، $v = k - 1 - m = 5 - 1 - 2 = 2$

ل $v = 2$ ، $\chi^2_{0{\cdot}95} = 5.99$. وبهذا نستنتج بأن توفيق البيانات جيد جداً .

ل $v = 2$ ، $\chi^2_{0{\cdot}05} = 0.103$. إذن $\chi^2 = 0.959 > 0.103$ ، فإن التوفيق ليس « على درجة كبيرة من الجودة » .

جداول الاقتران :

١٢–١٤ حل المسألة ١٠–٢٠ ، الفصل العاشر ، باستخدام اختبار كا – تربيع .

الحـــل :

يوضح الجدول ١٢ – ٤ بيانات المسألة . (أ) تحت فرض العدم H_0 بأن المصل ليس له تأثير ، فإننا نتوقع 70 شخصاً فى كل مجموعة سوف يشفوا من المرض و 30 شخصاً لن يشفوا ، كما هو موضح بالجدول ١٢ – ٤ (ب) . لاحظ أن H_0 يكافىء القول بأن الشفاء مستقل عن المصل ، أى أن التقسيمات مستقلة عن بعضها .

جدول ١٢ – ٤ (أ) التكرار المشاهد

	شفوا	لم يشفوا	المجموع
المجموعة A (استخدمت المصل)	70	30	100
المجموعة B (لم تستخدم المصل)	70	30	100
المجمـــوع	140	60	200

جدول ١٢ – ٤ (ب) التكرارات المتوقعة تحت H_0

	شفوا	لم يشفوا	المجموع
المجموعة A (استخدموا المصل)	75	25	100
المجموعة (لم تستخدم المصل)	65	35	100
المجمـــوع	140	60	200

$$\chi^2 = \frac{(75-70)^2}{70} + \frac{(65-70)^2}{70} + \frac{(25-30)^2}{30} + \frac{(35-30)^2}{30} = 2{\cdot}38$$

لتحديد عدد درجات الحرية ، اعتبر الجدول ١٢ – ٥ وهو يماثل الجداول أعلاه فيما عدا أن المجاميع فقط هى المذكورة . من الواضح أن لنا الحرية فى وضع رقم واحد فى أى من الخلايا الشاغرة ، و بما أنه إذا تم ذلك فإن الخلايا الباقية ستتحدد بصورة وحيدة من المجاميع الموضحة . بهذا فإنه توجد درجة حرية واحدة .

جدول ١٢ – ٥

	شفوا	لم يشفوا	المجموع
المجموعة A			100
المجموعة B			110
المجموع	140	60	200

طريقة اخرى : بالصيغة (أنظر المسألة ١٢–١٨) ، $v = (h-1)\,(k-1) = (2-1)\,(2-1) = 1$

بما أن $\chi^2_{0.95} = 3.84$ لدرجة حرية واحدة ، و بما أن $\chi^2 = 2.38 < 3.84$ ، فإننا نستنتج أن النتائج غير معنوية عند المستوى 0.05 . بهذا نكون غير قادرين على رفض H_0 عند هذا المستوى ونستنتج من هذا أن المصل أما أن يكون غير فعال أو نؤجل الحكم لحين إجراء اختبارات أكثر .

لاحظ أن $\chi^2 = 2.38$ هو مربع قيمة z ، $z = 1.54$ ، التى حصلنا عليها فى المسألة ١٠ – ٢٠ بالفصل العاشر . وبشكل عام فإن اختبار كا – تربيع المتضمن نسب العينات فى جدول اقتران 2×2 مكافىء لاختبار معنوية الفروق بين النسب باستخدام التوزيع الطبيعى كتقريب .

لاحظ كذلك أن اختبار χ^2 من طرف واحد يكافىء اختبار من طرفين باستخدام χ ، على سبيل المثال $\chi^2 > \chi_{0.95}$ تقابل $(\chi > \chi_{0.95})$ أو $(\chi < -\chi_{0.95})$. وبما أنه فى جداول 2×2 ، فإن χ^2 هو مربع قيم z ، ينتج عن ذلك أن χ مثل z لهذه الحالة . بهذا فإن رفض الفرض عند المستوى 0.05 باستخدام χ^2 تكافىء الرفض فى اختبار من طرف واحد عند المستوى 0.10 باستخدام z .

١٢ – ١٥ حل المسألة السابقة باستخدام تصحيح بيتس .

الحــل :

$$\chi^2(\text{مصحح}) = \frac{(|75-70|-0.5)^2}{70} + \frac{(|65-70|-0.5)^2}{70} + \frac{(|25-30|-0.5)^2}{30} + \frac{(|35-30|-0.5)^2}{30} = 1.93$$

وبهذا فإن الاستنتاج الذى وصلنا إليه فى المسألة السابقة مازال صحيحاً ويمكن التحقق من ذلك بملاحظة أن تصحيح بيتس يؤدى إلى خفض فى قيمة χ^2 .

١٢ – ١٦ الجدول ١٢ – ٦ يوضح عدد الطلبة الذين نجحوا وعدد الطلبة الذين رسبوا عند كل من المحاضرين : Mr.Z. و Mr.Y و Mr.X اختبر الفرض بأن نسبة الطلبة الراسبين الثلاثة متساوية .

جدول ١٢ – ٦

التكرارات المشاهدة

المجموع	Mr. Z	Mr. Y	Mr X	
50	47	56	153	نجح
5	14	8	27	رسب
55	61	64	180	المجموع

الحــل :

تحت الفرض H_0 بأن نسب الطلبة الراسبين عند المحاضرين الثلاثة متساوية فإنها تكون 15%=27/180 وبهذا يكون 85% من الطلبة ناجحين . فى هذه الحالة فإن Mr. X على سبيل المثال ، يجب أن يرسب عنده 15% من 55 طالباً وينجح 85% من 55 طالباً. التكرارات المتوقعة تحت N_0 موضحة بالجدول ١٢ – ٧

جدول ١٢ – ٧ التكرارات المتوقعة تحت H_0

Mr. X Z	Mr. Y	Mr.	المجموع	
			153	نجح
			27	رسب
55	61	64	180	المجموع

جدول ١٢ – ٨

المجموع	Mr. Z	Mr. Y	Mr. X
153	85% of 55 = 46·75	85% of 61 = 51·85	85% of 64 = 54·40
27	15% of 55 = 8·25	15% of 61 = 9·15	15% of 64 = 9·60
180	64	61	55

إذن

$$\chi^2 = \frac{(50-46.75)^2}{46.75} + \frac{(47-51.85)^2}{51.85} + \frac{(56-54.40)^2}{54.40} + \frac{(5-8.25)^2}{8.25} + \frac{(14-9.15)^2}{9.15} + \frac{(8-9.60)^2}{9.60} = 4.84$$

لتحديد عدد درجات الحرية ، اعتبر الجدول ١٢ – ٨ وهو يماثل الجداول المعطاة أعلاه فيما عدا أن المجاميع فقط هى المذكورة . من الواضح أن لنا الحرية فى وضع رقم واحد فى خلية شاغرة فى العمود الأول ورقم واحد فى خلية شاغرة فى العمود الثانى أو الثالث ، وبعد ذلك فإن جميع الأرقام فى الخلايا الباقية تتحدد تماماً من المجاميع الموضحة . أى أن هناك درجتى حرية فى هذه المسألة .

طريقة أخرى : بالصيغة $\nu = (h-1)(k-1) = (2-1)\ (3-1) = 2$

بما أن $\chi^2_{0.95} = 5.99$ ، فلا يمكن رفض H_0 عند مستوى 0.05 . لاحظ ، بما أن $\chi^2_{0.90} = 4.61$ فإنه يمكن رفض H_0 عند مستوى 0.10 إذا كنا على استعداد تحمل مخاطرة أن نكون مخطئين مرة واحدة فى كل 10 مرات .

١٢ – ١٧ استخدم الصيغة (٩) ، صفحة ٣٢٧ ، لحساب قيمة χ^2 بالمسألة السابقة .

الحـل :

بما أن $a_1 = 50,\ a_2 = 47,\ a_3 = 56,\ b_1 = 5,\ b_2 = 14,\ b_3 = 8,\ N_A = a_1 + a_2 + a_3 = 153,\ N_B = b_1 + b_2 + b_3 = 27,\ N_1 = a_1 + b_1 = 55,\ N_2 = a_2 + b_2 = 61,\ N_3 = a_3 + b_3 = 64,\ N = N_A + N_B = N_1 + N_2 + N_3 = 180$

فإن

$$\chi^2 = \frac{N}{N_A}\left[\frac{a_1^2}{N_1} + \frac{a_2^2}{N_2} + \frac{a_3^2}{N_3}\right] + \frac{N}{N_B}\left[\frac{b_1^2}{N_1} + \frac{b_2^2}{N_2} + \frac{b_3^2}{N_3}\right] - N$$

$$= \frac{180}{153}\left[\frac{(50)^2}{55} + \frac{(47)^2}{61} + \frac{(56)^2}{64}\right] + \frac{180}{27}\left[\frac{(5)^2}{55} + \frac{(14)^2}{61} + \frac{(8)^2}{64}\right] - 180 = 4.84$$

١٢ – ١٨ وضح أنه فى جداول الاقتران $h \times k$ فإن عدد درجات الحرية هى $(h-1) \times (k-1)$ حيث $h > 1,\ k > 1$.

الحـل :

فى جدول به h صف و k عمود ، يمكن ترك رقم واحد فى كل صف وفى كل عمود حيث أن هذه الأرقام من السهل معرفة قيمتها من معرفة مجاميع كل صف وكل عمود . يترتب على ذلك أن لنا الحرية فى وضع $(h-1)\ (k-1)$ رقم فى الجدول ، أما الأرقام الباقية فتتحدد تلقائياً وبصورة وحيدة . وبهذا فإن عدد درجات الحرية هى $(h-1)\ (k-1)$. لاحظ أن هذه النتيجة صحيحة على أساس أن معالم المجتمع المطلوبة للحصول على التكرارات المتوقعة معلومة .

١٢ – ١٩ (أ) أثبت أنه فى جدول الاقتران 2 × 2 الموضحة بالجدول ١٢ – ٩ (أ)

$$\chi^2 = \frac{N(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2}{N_1 N_2 N_A N_B}$$

(ب) مثل النتائج فى (أ) باستخدام بيانات المسألة ١٢ – ١٤ .

جدول ١٢ – ٩ (أ) النتائج المشاهدة

	I	II	المجموع
A	a_1	a_2	N_A
B	b_1	b_2	N_B
المجموع	N_1	N_2	N

جدول ١٢ – ٩ (ب) النتائج المتوقعة

	I	II	المجموع
A	$N_1 N_A/N$	$N_2 N_A/N$	N_A
B	$N_1 N_B/N$	$N_2 N_B/N$	N_B
المجموع	N_1	N_2	N

الحـــل :

كما فى المسألة ١٢ – ١٤ ، فإن النتائج المتوقعة تحت فرض العدم موضحة بالجدول ١٢ – ٩ (ب) . إذن

$$\chi^2 = \frac{(a_1 - N_1 N_A/N)^2}{N_1 N_A/N} + \frac{(a_2 - N_2 N_A/N)^2}{N_2 N_A/N} + \frac{(b_1 - N_1 N_B/N)^2}{N_1 N_B/N} + \frac{(b_2 - N_2 N_B/N)^2}{N_2 N_B/N}$$

ولـكن

$$a_1 - \frac{N_1 N_A}{N} = a_1 - \frac{(a_1 + b_1)(a_1 + a_2)}{a_1 + b_1 + a_2 + b_2} = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{N}$$

كذلك فإن $\left(b_2 - \frac{N_2 N_B}{N}\right)$, and $\left(b_1 - \frac{N_1 N_B}{N}\right)$, $\left(a_2 - \frac{N_2 N_A}{N}\right)$ مساوياً أيضاً $\left(\frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{N}\right)$

وبهذا يمكن أن نكتب

$$\chi^2 = \frac{N}{N_1 N_A}\left(\frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{N}\right)^2 + \frac{N}{N_2 N_A}\left(\frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{N}\right)^2 + \frac{N}{N_1 N_B}\left(\frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{N}\right)^2 + \frac{N}{N_2 N_B}\left(\frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{N}\right)^2$$

والذى يمكن تبسيطه إلى

$$\chi^2 = \frac{N(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2}{N_1 N_2 N_A N_B}$$

فى المسألة ١٢ – ١٤ ،

$$a_1 = 75, a_2 = 25, b_1 = 65, b_2 = 35, N_1 = 140, N_2 = 60, N_A = 100, N_B = 100, \text{and } N = 200$$

إذن ، وكما حصلنا عليه قبل ذلك ،

$$\chi^2 = \frac{200[(75)(35) - (25)(65)]^2}{(140)(60)(100)(100)} = 2{\cdot}38$$

باستخدام معامل تصحيح بيتس ، فإن النتيجة مثل تلك التى بالمسألة ١٢ – ١٥

$$\chi^2(\text{المصحح}) = \frac{N(|a_1b_2 - a_2b_1| - \frac{1}{2}N)^2}{N_1N_2N_AN_B} = \frac{200[|(75)(35) - (25)(65)| - 100]^2}{(140)(60)(100)(100)} = 1{\cdot}93$$

١٢ – ٢٠ أثبت أن اختباراً كا – تربيع المتضمن نسب عينتين يكافىء اختبار معنوية الفروق بين النسب باستخدام التوزيع الطبيعى كتقريب (أنظر صفحة ٢٧٢) .

الحــل :

اعتبر P_2 ، P_1 يرمزان إلى نسب العينتين و p إلى نسبة المجتمع . بالرجوع إلى المسألة ١٢ – ١٩ ، نجد أن

$$P_1 = a_1/N_1, \quad P_2 = a_2/N_2, \quad 1-P_1 = b_1/N_1, \quad 1-P_2 = b_2/N_2 \qquad (١)$$

$$p = N_A/N, \quad 1-p = q = N_B/N \qquad (٢)$$

بحيث

$$a_1 = N_1P_1, \quad a_2 = N_2P_2, \quad b_1 = N_1(1-P_1), \quad b_2 = N_2(1-P_2) \qquad (٣)$$

$$N_A = Np, \quad N_B = Nq \qquad (٤)$$

باستخدام (٣) و (٤) ، نجد من المسألة ١٢ – ١٩ ،

$$\chi^2 = \frac{N(a_1b_2 - a_2b_1)^2}{N_1N_2N_AN_B} = \frac{N[N_1P_1N_2(1-P_2) - N_2P_2N_1(1-P_1)]^2}{N_1N_2NpNq} \quad (\text{علماً أن } N = N_1 + N_2)$$

$$= \frac{N_1N_2(P_1-P_2)^2}{Npq} = \frac{(P_1-P_2)^2}{pq(1/N_1 + 1/N_2)} \quad (\text{since } N = N_1 + N_2)$$

وهو مربع الإحصائية المعطاة فى صفحة ٢٧٢

معامل الاقتران :

١٢ – ٢١ أوجد معامل الاقتران لبيانات جدول الاقتران بالمسألة ١٢ – ١٤

الحــل :

$$C = \sqrt{\frac{\chi^2}{\chi^2 + N}} = \sqrt{\frac{2{\cdot}38}{2{\cdot}38 + 200}} = \sqrt{0{\cdot}011\,76} = 0{\cdot}1084$$

١٢ – ٢٢ أوجد أكبر قيمة لـ C لجدول 2×2 بالمسألة ١٢ – ١٤

الحـل :

أكبر قيمة لـ C تحدث عندما يكون التصنيفان معتمدين على بعضهما اعتماداً كاملا أو متلازمين . فى هذه الحالة فإن جميع الذين استخدموا المصل سوف يشفوا بينما الذين لم يستخدموه لن يشفوا . ويظهر جدول الاقتران فى هذه الحالة كما فى الجدول ١٢–١٠.

جدول ١٢ – ١٠

	المجموع	لم يشفوا	شفوا
مجموعة A (استخدموا المصل)	100	0	100
مجموعة B (لم يستخدموا المصل)	100	100	0
المجموع	200	100	100

بما أن القيمة المتوقعة لتكرارات الخلايا بفرض الاستقلال الكامل ، تساوى كلها 50 .

$$\chi^2 = \frac{(100-50)^2}{50} + \frac{(0-50)^2}{50} + \frac{(0-50)^2}{50} + \frac{(100-50)^2}{50} = 200$$

بهذا فإن أكبر قيمة لـ C هى $C = \sqrt{\chi^2/(\chi^2+N)} = \sqrt{200/(200+200)} = 0{\cdot}7071$.

بشكل عام فى حالة الاعتماد الكامل فى جداول الاقتران عندما يكون كلا من عدد الصفوف وعدد الأعمدة يساوى k . فإن الخلايا التى ليس بها أصفار تحدث على القطر من أعلى اليسار إلى أدنى اليمين فى جدول الاقتران . فى مثل هذه الحالات ، $C_{max} = \sqrt{(k-1)/k}$ (أنظر المسائل ١٢ – ٥٢ ، ١٢ – ٥٣)

الارتباط بين الصفات :

١٢ – ٢٣ لجدول المسألة ١٢ – ١٤ ، أوجد معامل الارتباط (أ) بدون استخدام تصحيح بيتس (ب) باستخدام تصحيح بيتس

الحـل :

(أ) بما أن $\chi^2 = 2.38$ و $N = 200$ و $k = 2$ فإن $r = \sqrt{\frac{\chi^2}{N(k-1)}} = \sqrt{\frac{2.38}{200}} = 0{\cdot}1091$

مما يدل على ارتباط ضعيف بين الشفاء واستخدام المصل .

(ب) باستخدام المسألة ١٢ – ١٥ ، r (مصحح) $= \sqrt{1.93/200} = 0.0982$

١٢ – ٢٤ أثبت أن معامل الارتباط فى جداول الاقتران ، كما هو معروف بالمعادلة (١٢) ، صفحة ٣٢٧ ، يقع بين الصفر والواحد .

الحـل :

من المسألة ١٢ – ٥٣ ، النهاية العظمى لـ $\sqrt{\chi^2/(\chi^2+N)}$ هى $\sqrt{(k-1)/k}$

إذن

$$\frac{\chi^2}{\chi^2+N} \leqq \frac{k-1}{k}, \quad k\chi^2 \leqq (k-1)(\chi^2+N), \quad k\chi^2 \leqq k\chi^2-\chi^2+kN-N$$

$$\chi^2 \leqq (k-1)N, \quad \frac{\chi^2}{N(k-1)} \leqq 1, \quad \text{and} \quad r=\sqrt{\frac{\chi^2}{N(k-1)}} \leqq 1$$

بما أن $\chi^2 \geqq 0$ و $r \geqq 0$. إذن $0 \leqq r \leqq 1$ وهو المطلوب .

خاصية الانجماع فى χ^2

١٢ – ٢٥ لاختبار الفرض H_0 ، أجريت تجربة ثلاث مرات . حيث كانت قيم χ^2 هى 3.54 ، 1.86 ، 2.37 ، كل منها يقابله درجة حرية واحدة . وضح أنه بينما لايمكن رفض H_0 عند مستوى 0.05 على أساس بيانات أى تجربة بمفردها ، فإنه يمكن رفضها إذا جمعنا التجارب الثلاثة معاً .

الحـــل :

قيمة χ^2 التى نحصل عليها من تجميع نتائج الثلاثة تجارب، طبقاً لخاصية الانجماع $\chi^2 = 2{\cdot}37 + 2{\cdot}86 + 3{\cdot}54 = 9{\cdot}77$ بدرجات حرية $3 = 1 + 1 + 1$ بما أن $\chi^2_{0.95}$ لثلاثة درجات حرية هى 7.81 ، فيمكن رفض الفرض عند مستوى المعنوية 0.05 . ولكن بما أن $\chi^2_{0.95} = 3.84$ لدرجة حرية واحدة ، فلايمكن رفض H_0 على أساس نتائج أى تجربة بمفردها .

فى تجميع التجارب حيث قيم χ^2 المعطاة تقابل درجة حرية واحدة ، فإننا لانستخدم تصحيح بيتس حيث أنه يميل فى هذه الحالة إلى المغالاة فى التصحيح .

مســـائل اضـــافية

اختبار كا ـــ تربيع (كا٢) :

١٢ – ٢٦ فى 60 رمية لعملة ، لوحظ ظهور 37 صورة و 23 كتابة . اختبر صحة الفرض القائل أن العملة غير متحيزة باستخدام مستوى المعنوية (أ) 0.05 (ب) 0.01

ج : لايمكن رفض الفرض عند أى من المستويين .

١٢ – ٢٧ حل المسألة ١٢ – ٢٦ باستخدام تصحيح بيتس .

ج : الاستنتاج هو نفسه كما سبق .

١٢ - ٢٨ فى خلال فترة طويلة كانت الدرجات التى تمنح بواسطة مجموعة من المحاضرين فى مقرر دراسى معين هى فى المتوسط

12% A's, 18% B's, 40% C's, 18% D's and 12% F's.

إذا أعطى محاضر جديد 22 A's , 34 B's , 66 C's , 16 D's , 12F's خلال فصلين دراسين . حدد بمستوى معنوية 0.05 ما إذا كان المحاضر الجديد يتبع نمط التقديرات التى يعطيها الآخرون .

ج : المحاضر الجديد لايتبع نمط التقديرات المعطاة بواسطة الآخرين . (حقيقة أن الدرجات صارت أحسن من المتوسط وقد تكون راجعة لارتفاع المقدرة على التدريس أو لانخفاض المستويات أو لكليهما) .

١٢ - ٢٩ قذفت ثلاثة عملات مامجموعة 240 مرة وفى كل مرة لوحظ عدد الصور التى ظهرت . الجدول ١٢ - ١١ يوضح النتائج التى حصلنا عليها مع النتائج المتوقعة تحت الفرض القائل أن العملة غير متحيزة .

جدول ١٢ - ١١

	صفر صورة	١ صورة	٢ صورة	٣ صورة
التكرار المشاهد	24	108	95	23
التكرار المتوقع	30	90	90	30

اختبر صحة هذا الفرض عند مستوى المعنوية 0.05 .

ج : لايوجد مبرر لرفض الفرض بأن العملة غير متحيزة .

١٢ - ٣٠ عدد الكتب المستعارة من مكتبة عامة خلال أسبـــوع معين موضح بالجدول ١٢ - ١٢ . اختبر صحة الفرض القائل أن عدد الكتب ، المستعارة لا يعتمد على أيام الأسبوع ، مستخدماً ، مستوى معنوية (أ) 0.05 (ب) 0.01

جدول ١٢ - ١٢

	الإثنين	الثلاثاء	الأربعاء	الخميس	الجمعة
عدد الكتب المستعارة	135	108	120	114	146

ج : لا يوجد مبرر لرفض الفرض عند أى مستوى

١٢ - ٣١ وعاء يحتوى على 6 كرات حمراء و 3 كرات بيضاء . . اختيرت كرتان من الوعاء عشوائياً وتم تسجيل لونهما ثم أعيدت الكرات إلى الوعاء . وقد تم تكرار هذه العملية 120 مرة وسجلت النتائج فى الجدول ١٢ - ١٣ . (أ) حدد التكرارات المتوقعة (ب) حدد عند مستوى ، المعنوية 0.05 ما إذا كانت النتائج متسقة مع ما هو متوقع .

جدول ١٢ - ١٣

	0 أحمر 2 أبيض	1 أحمر 1 أبيض	2 أحمر 0 أبيض
عدد السحبات	6	53	61

ج : (أ) 50 و 60 ,10 على الترتيب (ب) لا يمكن رفض الفرض القائل أن النتائج تماثل ما هو متوقع عند مستوى المعنوية 0.05 .

١٢-٣٢ اختير 200 مسمار عشوائياً من إنتاج كل من 4 ماكينات . فكان عدد المسامير التالفة هو 3 ,10 ,9 ,2 . حدد ما إذا كان هناك فروق معنوية بن الماكينات باستخدام مستوى المعنوية 0.05 .

ج : الفروق معنوية عند المستوى 0.05 .

جودة التوفيق :

١٢-٣٣ (أ) استخدم اختبار كا - تربيع لتحديد مدى جودة توفيق بيانات المسألة ٧ - ٧٥ ، الفصل السابع ، (ب) هل التوفيق « متناهي الجودة » ؟

استخدم مستوى المعنوية 0.05 .

ج : (أ) التوفيق جيد (ب) لا .

١٢-٣٤ استخدم اختبار كا - تربيع لتحديد مدى جودة توفيق البيانات المشار إليها في (أ) المسألة ٧- ٧٧ ، الفصل السابع ، المسألة ٧ - ٧٨ ، الفصل السابع . استخدم مستوى معنوية 0.05 وفي كل حالة حدد ما إذا كان التوفيق « متناهي الجودة » .

ج : (أ) التوفيق « متناهي الجودة » . (ب) التوفيق غير جيد عند مستوى 0.05 .

١٢-٣٥ استخدم اختبار كا - تربيع لتحديد مدى جودة توفيق البيانات المشار إليها في (أ) المسألة ٧ - ٧٩ ، الفصل السابع ، (ب) المسألة ٧ - ٨٠ ، الفصل السابع . هل نتائجك في (أ) متسقة مع تلك في المسألة ١٢ - ٣٣ ؟

ج : (أ) التوفيق غير جيد عند مستوى 0.05 . بما أن توزيع ذي الحدين يعطي توفيقاً جيداً للبيانات ، وهذا يتسق مع المسألة ١٢ - ٣٣ .

(ب) هذا التوفيق جيد ولكنه ليس « متناهي الجودة » .

جداول الاقتران :

١٢-٣٦ الجدول ١٢-١٤ يظهر نتائج تجربة لملاحظة تأثير تطعيم حيوانات التجارب ضد مرض معين . استخدم (أ) 0.01 (ب) 0.05 مستوى معنوية ، اختبر صحة الفرض القائل أنه لا يوجد اختلاف بين المجموعة التي طعمت والمجموعة التي لم تطعم ، أي أن التطعيم والإصابة بالمرض مستقلين .

جدول ١٢-١٤

	أصيب بالمرض	لم يصب بالمرض
طعم	9	42
لم يطعم	17	28

ج : يمكن رفض الفرض عند المستوى 0.05 ولكن ليس عند المستوى 0.01 .

١٢-٣٧ حل المسألة السابقة باستخدام تصحيح ييتس .

ج : نفس الاستنتاج .

١٢-٣٨ الجدول ١٢-١٥ يوضح عدد الطلبة فى الفصلين A و B الذين نجحوا ، والذين رسبوا فى امتحان أعطى للفصلين . استخدم مستوى المعنوية (أ) 0.05 (ب) 0.01 ، لاختبار الفرض بأنه لا يوجد فروق بين الفصلين . حل المسألة باستخدام تصحيح ييتس وبدون استخدام تصحيح ييتس .

ج : لا يمكن رفض الفرض عند أى المستويين .

جدول ١٢-١٥

	ناجح	راسب
الفصل A	72	17
الفصل B	64	23

١٢-٣٩ فى مجموعة من المرضى يشكون من عدم قدرتهم على النوم الجيد، أعطى بعضهم حبوب منومة بينما أعطى الآخرين حبوب من السكر (على الرغم من أن جميعهم يعتقدون أنهم أعطوا حبوب منومة) . سألوا بعد ذلك عما إذا كانت الحبوب ساعدتهم على النوم أم لا . وكانت نتيجة إجاباتهم كما هو موضح بالجدول ١٢ - ١٦ . مفترضاً أن كل المرضى ذكروا الحقيقة ، اختبر صحة الفرض القائل أنه لا يوجد فرق بين الحبوب المنومة وحبوب السكر عند مستوى المعنوية 0.05 .

ج : لا يمكن رفض الفرض عند مستوى 0.05 .

جدول ١٢-١٦

	نــــام جيـــداً	لم ينم بصورة جيدة
أخذ الحبوب المنومة	44	10
أخذ حبوب السكر	81	35

جدول ١٢-١٧

	موافق	معارض	لم يقرر بعد
ديمقراطى	85	78	37
جمهورى	118	61	25

١٢-٤٠ فى اقتراح ذو أهمية قومية ، صوت المنتمين لحزب الديمقراطى والمنتمين لحزب الجمهورى كما هو موضح بالجدول ١٢-١٧ عند مستوى معنوية (أ) 0.01 (ب) 0.05 اختبر صحة الفرض القائل أنه لا يوجد فرق بين الحزبين فيما يختص بالاقتراح المقدم .

ج : يمكن رفض الفرض عند كلا المستويين .

١٢-٤١ الجدول ١٢-١٨ يوضح العلاقة بين أداء الطلبة فى مادتى الرياضة والطبيعة . اختبر الفرض بأن مستوى أداء الطالب ، فى الرياضة مستقل عن مستوى أدائه فى الطبيعة ، مستخدماً مستوى المعنوية (أ) 0.05 (ب) 0.01 .

ج : يرفض الفرض عند كلا المستويين .

جدول ١٢–١٨

		الرياضـــة		
		درجات مرتفعة	درجات متوسطة	درجات منخفضة
الطبيعة	درجات مرتفعة	56	71	12
	درجات متوسطة	47	163	38
	درجات منخفضة	14	42	85

١٢–٤٢ فى نتيجة استقصاء عنا إذا كان لعمر السائق الذى يبلغ من العمر 21 عام أو أكبر أى تأثير على عدد حوادث السيارات التى يكون هوطرفاً فيها (بما فى ذلك الحوادث الصغيرة) موضح بالجدول ١٢–١٩ . اختبرعند مستوى المعنوية (أ) 0.05 (ب) 0.01 صحة الفرض القائل أن عدد الحوادث مستقل عن عمر السائق . ماهى مصادر الصعوبة فى أساليب المعاينة والاعتبارات الأخرى التى قد تؤثر فى استنتاجك ؟

جدول ١٢–١٩

		سن السائق				
		21 — 30	31 — 40	41 — 50	51 — 60	61 — 70
عدد الحوادث	0	748	821	786	720	672
	1	74	60	51	66	50
	2	31	25	22	16	15
	أكثر من 2	9	10	6	5	7

ج : لايمكن رفض عند أى من المستويين .

١٢–٤٣ (أ) أثبت أن $\chi^2 = \Sigma(o^2_j/e_j) - N$ لجميع جداول الاقتران ، حيث N هو التكرار الكلى فى جميع الخلايا ، (ب) استخدم النتائج فى (أ) ، حل المسألة ١٢–٤١ .

١٢-٤٤ إذا كانت N_i و N_j تعبر على الترتيب عن مجموع التكرارات فى الصف i والعمود j فى جدول اقتران ، (التكرارات الهامشية) ، وضح أن التكرار المتوقع لخلية فى الصف i والعمود j هو N_iN_j/N حيث N هو مجموع التكرارات فى جميع الخلايا .

١٢-٤٥ أثبت الصيغة (٩) ، صفحة ٣٢٧ (ملحوظة : استخدم المسائل ١٢-٤٣ ، ١٢ - ٤٤) .

١٢-٤٦ عمم نتيجة الصيغة (٩) ، صفحة ٣٢٧ ، إلى حالة جداول الاقتران $2 \times k$ حيث $k > 3$.

١٢-٤٧ أثبت الصيغة (٨) ، صفحة ٣٢٧ .

١٢-٤٨ بالمناظرة للأفكار التى أثبتت لجداول الاقتران $h \times k$ ، ناقش جداول الاقتران $h \times k \times l$ ، مع ذكر التطبيقات الممكنة لهذه الجداول .

معامل الاقتران :

١٢-٤٩ الجدول ١٢-٢٠ يبين العلاقة بين لون الشعر ولون العين فى عينة من 200 طالب . (أ) احسب معامل الاقتران باستخدام تصحيح ييتس وبدون استخدام تصحيح ييتس . (ب) قارن النتيجة فى (أ) بأكبر قيمة لمعامل الاقتران .

جدول ١٢-٢٠

		لون الشعر	
		شقراء	غير شقراء
لون العين	زرقاء	49	25
	غير زرقاء	30	96

ج : (أ) باستخدام تصحيح ييتس 0.3779 ، 0.3863

١٢-٥٠ أوجد معامل الاقتران لبيانات (أ) المسألة ١٢-٣٦ (ب) المسألة ١٢-٣٨ بدون استخدام تصحيح ييتس وباستخدامه .

ج : (أ) 0.2205 ، 0.1985 (مصحح)　　(ب) 0.0872 ، 0.0738 (مصحح) .

١٢-٥١ أوجد معامل الاقتران لبيانات المسألة ١٢-٤١

ج : 0.4651

١٢-٥٢ أثبت أن النهاية العظمى لمعامل الاقتران فى جداول 3×3 هى $\sqrt{2/3} = 0.8165$ تقريباً .

١٢-٥٣ أثبت أن النهاية العظمى لمعامل الاقتران فى جداول $k \times k$ هى $\sqrt{(k-1)/k}$

ارتباط الصفات :

١٢-٥٤ أوجد معامل الارتباط للبيانات فى الجدول ١٢-٤٩

ج : (أ) 0.4188 ، 0.4082 (باستخدام تصحيح ييتس) .

١٢–٥٥ أوجد معامل الارتباط للبيانات فى جداول (أ) ١٢–٣٦ (ب) المسألة ١٢–٣٨ ، بدون استخدام تصحيح ييتس ، وباستخدامه .

ج : (أ) 0.2261 ، 0.2026 (مصحح)

(ب) 0.0875 ، 0.0740 (مصحح)

١٢–٥٦ أوجد معامل الارتباط بين درجات الرياضة والطبيعة فى الجدول بالمسألة ١٢–٤١

ج : 0.3715

١٢–٥٧ إذا كانت C هى معامل الاقتران فى جدول $k \times k$ و r هو معامل الارتباط المقابل ، أثبت أن

$$r = C/\sqrt{(1 - C^2)(k - 1)}$$

خاصية الانجماع فى χ^2

١٢–٥٨ لاختبار الفرض H_0 ، أجريت تجربة خمس مرات ، حيث كانت قيم χ^2 ، كل منها يقابل 4 درجات حرية هى 8.6 ,7.8 ,9.1 ,8.3 على الترتيب . وضح أنه بينما لا يمكن رفض الفرض H_0 عند المستوى 0.05 على أساس بيانات أى تجربة بمفردها ، فإنه يمكن رفضها عند المستوى 0.005 إذا جمعنا التجارب الخمس معاً .

الفصل الثالث عشر

توفيق المنحنيــات
وطريقة المربعــات الصغرى

العلاقة بين المتغيرات :

فى كثير من النواحى العملية نجد أن هناك علاقة بين متغيرين (أو أكثر) على سبيل المثال نجد أن أوزان الذكور البالغين تعتمد بدرجة معينة على أطوالهم ، محيط الدائرة يعتمد على نصف قطرها ، ضغط وزن معين من الغاز يعتمد على درجة حرارته ، وحجمه .

وفى أغلب الأحيان يكون من المرغوب فيه التعبير عن هذه العلاقة بصورة رياضية وذلك بتحديد المعادلة التى تربط بين المتغيرات .

توفيق المنحنيات :

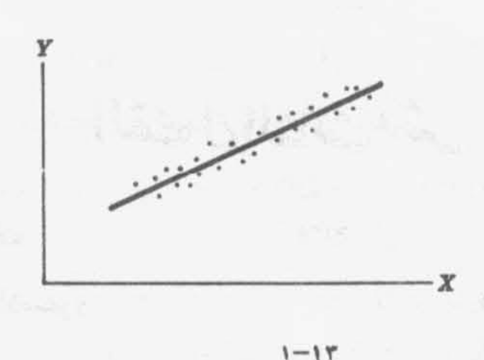
للمساعدة فى تحديد المعادلة التى تربط بين المتغيرات ، كخطوة أولى نجمع بيانات تظهر القيم المتقابلة للمتغيرات تحت الدراسة .

على سبيل المثال ، افترض أن X و Y يعبران عن أطوال وأوزان ذكور بالغين . فإن عينة مكونة من N شخص تعطى الأطوال $X_1, X_2, \ldots, X_N$ والأوزان المقابلة لها $Y_1, Y_2, \ldots, Y_N$.

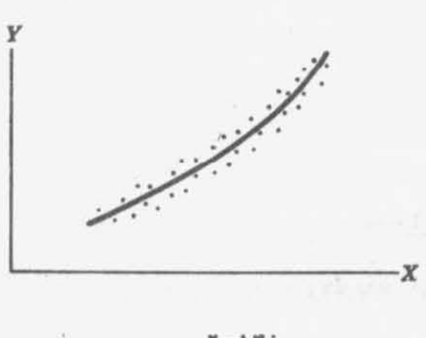
الخطوة التالية هى توضيح النقط $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots, (X_N, Y_N)$ فى رسم طبقاً لنظام الإحداثيات المتعامدة . وتسمى النقط الناتجة بشكل الانتشار .

ومن شكل الانتشار يمكن بالنظر تمهيد منحنى كتقريب لهذه البيانات ، مثل هذا المنحنى يسمى بالمنحنى التقريبى . فى الشكل ١٣ – ١ ، على سبيل المثال ، يظهر أن البيانات يمكن تقريبها بصورة جيدة بخط مستقيم ومن ثم نقول أن هناك علاقة خطية بين المتغيرات . فى الشكل ١٣ – ٢ ، فعلى الرغم من أن هناك علاقة موجودة بين المتغيرات إلا أنها علاقة غير خطية وبهذا يمكن أن نسميها علاقة غير خطية .

المشكلة العامة فى الحصول على معادلة المنحنيات التقريبية والتى تعطى أحسن توفيق لمجموعة من البيانات تسمى بتوفيق المنحنيات .



١٣-١



١٣-٢

معادلات المنحنيات التقريبية :

فيما يلي قائمة بعديد من الأشكال الشائعة للمنحنيات التقريبية ومعادلاتها وقد ذكرناها بهدف الرجوع إليها . جميع الحروف غير Y و X تمثل ثوابت . المتغير X يشار إليه بأنه متغير مستقل والمتغير Y بأنه المتغير التابع ، على الرغم من أنه يمكن أن تعكس التسميات لهما .

خط مستقيم (١) $Y = a_0 + a_1X$

منحنى قطع مكافىء أو منحنى من الدرجة الثانية (٢) $Y = a_0 + a_1X + a_2X^2$

منحنى من الدرجة الثالثة (٣) $Y = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$

منحنى من الدرجة الرابعة (٤) $Y = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + a_4X^4$

منحنى من الدرجة n (٥) $Y = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n$

الجانب الأيسر من المعادلات السابقة يسمى كثيرات الحدود من الدرجة الأولى ، الثانية ، الثالثة ، الرابعة ، الدرجة n على الترتيب . الدوال المعرفة بالمعادلات الأربعة الأولى تسمى أحياناً دوال خطية ، دوال من الدرجة الثانية ، دوال من الدرجة الثالثة ودوال من الدرجة الرابعة على الترتيب .

وهناك معادلات أخرى (من بين عديد من المعادلات) تستخدم في النواحي العملية نذكر منها ما يلي :

قطع زائد (٦) $Y = \frac{1}{a_0 + a_1X}$ or $\frac{1}{Y} = a_0 + a_1X$

المنحنى الأسي (٧) $Y = ab^X$ or $\log Y = \log a + (\log b)X = a_0 + a_1X$

المنحنى الهندسي (٨) $Y = aX^b$ or $\log Y = \log a + b \log X$

المنحنى الأسي المعدل (٩) $Y = ab^X + g$

المنحنى الهندسى المعدل (١٠) $Y = aX^b + g$

منحنى جومبرتز (١١) $Y = pq^{b^X}$ or $\log Y = \log p + b^X \log q = ab^X + g$

منحنى جومبرتز المعدل (١٢) $Y = pq^{b^X} + h$

المنحنى اللوجيستى (١٣) $Y = \dfrac{1}{ab^X + g}$ or $\dfrac{1}{Y} = ab^X + g$

(١٤) $Y = a_0 + a_1(\log X) + a_2(\log X)^2$

لتحديد المنحنى الذى يجب استخدامه ، من المفيد الحصول على شكل انتشار المتغيرات المحولة ، على سبيل المثال ، إذا كان شكل انتشار $\log Y$ vs. X يظهر علاقة خطية فإن المعادلة التى يجب استخدامها هى المعادلة (٧) بينما إذا كان $\log Y$ vs. $\log X$ يظهر علاقة خطية فإن المعادلة تكون فى الصورة (٨) ، لتسهيل ذلك فإننا نستخدم ورق رسم بيانى من نوع معين والذى يقسم أحد محوريه أو كلاهما تقسيما لوغاريتمياً ، ونشير إليه بالورق البيانى النصف لوغاريتمى أو بالورق البيانى لوغاريتم – لوغاريتم .

التمهيد باليد فى توفيق المنحنى :

يمكن أن نستخدم الحكم الشخصى فى رسم منحنى تقريبى لتوفيق مجموعة من البيانات وهذا يسمى بطريقة التمهيد باليد فى توفيق المنحنى . فإذا كان نوع معادلة المنحنى معروفاً ، فن الممكن الحصول على الثوابت باختبار عدد من النقط على المنحنى تساوى عدد الثوابت بالمعادلة . على سبيل المثال ، إذا كان المنحنى خط مستقم ، فإننا نحتاج إلى نقطتين ، إذا كان المنحنى قطع مكافىء ، فإننا نحتاج إلى ثلاثة نقط ، ولكن عيب هذه الطريقة أن الأشخاص المختلفين يحصلون على منحنيات ومعادلات مختلفة .

الخط المستقيم :

أبسط صورة للمنحنى التقريبى هو الخط المستقيم ، والتى يمكن كتابة معادلته كالآتى :

$$Y = a_0 + a_1X \qquad (١٥)$$

بمعرفة أى نقطتين (X_1, Y_1) و (X_2, Y_2) على الخط ، فإن الثوابت a_1 ، a_0 يمكن تحديدها . والمعادلة المستنتجة للخط يمكن كتابتها :

$$Y - Y_1 = \left(\frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}\right)(X - X_1) \text{ or } Y - Y_1 = m(X - X_1) \qquad (١٦)$$

حيث $m = \dfrac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}$ تسمى ميل الخط ويمثل مقدار التغير فى Y مقسوماً على مقدار التغير فى X .

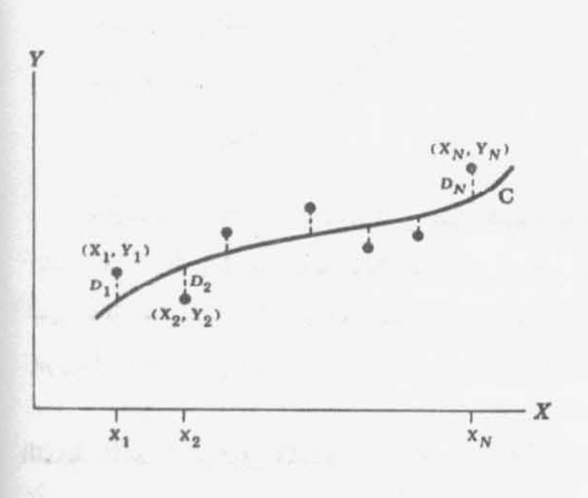
وعندما نكتب المعادلة فى الشكل (١٥) ، فإن الثابت a_1 هو الميل m . الثابت a_0 وهو قيمة Y عند $X = 0$ يسمى بالجزء المقطوع من المحور Y .

طريقة المربعات الصغرى :

لتلافى الحكم الشخصى فى تكوين الخطوط ، القطاعات المكافئة أو غيرها من المنحنيات التقريبية فن الضرورى الاتفاق على تعريف « أفضل توفيق للخط » ، « أفضل توفيق للقطع المكافىء » ، وهكذا .

بهدف الحصول على تعريف ممكن ، اعتبر الشكل١٣–٣ حيث نقط البيانات هى النقط
$(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots, (X_N$ و $Y_N)$.

لقيمة معينة من قيم X ، ولتكن X_1 ، سيكون هناك فرق بين القيمة Y_1 والقيمة المقابلة كما هى محددة بالمنحنى C كما هو موضح بالشكل فإننا نعبر عن هذا الفرق بالرمز D_1 ، والتى يسمى أحياناً بالانحراف ، الخطأ أو الباقى وقد يكون



شكل ١٣ – ٣

موجباً أو سالباً أو صفراً . بنفس الأسلوب نحصل لقيم $X_2, \ldots, X_N$ على الانحرافات المقابلة $D_2, \ldots D_N$.

لقياس « جودة التوفيق » للمنحنى C للبيانات المعطاة نستخدم الكمية $D_1^2 + D_2^2 + \ldots + D_N^2$ فإذا كانت هذه الكمية صغيرة فإن التوفيق جيد ، وإذا كانت كبيرة فإن التوفيق يكون سىء . لهذا نعطى التعريف التالى :

تعـــريف : من بين جميع المنحنيات التقريبية لمجموعة من البيانات ، المنحنى الذى له خاصية أن $D_1^2 + D_2^2 + \ldots + D_N^2$ نهاية صغرى (أصغر مايمكن) .

يسمى أفضل منحنى يمكن توفيقه .

المنحنى الذى له هذه الخاصية يقال أنه يوفق البيانات بمفهوم المربعات الصغرى ويسمى بمنحنى المربعات الصغرى . فالخط الذى له هذه الخاصية يسمى بخط المربعات الصغرى ، والقطع المكافىء الذى له هذه الخاصية يسمى قطع مكافىء المربعات الصغرى ، وهكذا .

من المعتاد استخدام التعريف السابق عندما يكون X هو المتغير المستقل و Y هو المتغير التابع . إذا كان X هو المتغير التابع فإننا نعدل التعريف بحيث نعتبر الانحرافات الرأسية بدلا من الانحرافات الأفقية ، والتى تعادل تغير محورى Y ، X هذان التعريفان يؤديان بشكل عام إلى منحنيات مربعات صغرى مختلفة . مالم يذكر خلاف ذلك فإننا سوف نعتبر Y هو المتغير التابع و X هو المتغير المستقل .

ومن الممكن تعريف منحنى مربعات صغرى آخر باعتبار البعد العمودى من كل نقطة من نقط البيانات إلى المنحنى بدلا من الأبعاد الرأسية والأفقية . ولكن هذا التعريف لايستخدم بكثرة .

خط المربعات الصغرى :

معادلة الخط التقريبى لمربعات الصغرى لمجموعة من النقط $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots, (X_N, Y_N)$ هى

$$Y = a_0 + a_1X \qquad (١٨)$$

حيث تتحدد قيمة الثوابت a_1 ، a_0 بحل المعادلتين الآتيتين :

$$\left.\begin{aligned} \Sigma Y &= a_0N + a_1\Sigma X \\ \Sigma XY &= a_0\Sigma X + a_1\Sigma X^2 \end{aligned}\right\} \qquad (١٩)$$

والتى تسمى بالمعادلات الاعتدالية لخط المربعات الصغرى (١٨) .

ويمكن الحصول على قيمة الثوابت a_1 ، a_0 بالمعادلة (١٩) ، وإذا أردنا ، بالصيغ

$$(٢٠) \qquad a_0 = \frac{(\Sigma Y)(\Sigma X^2) - (\Sigma X)(\Sigma XY)}{N\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2} \qquad a_1 = \frac{N\Sigma XY - (\Sigma X)(\Sigma Y)}{N\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2}$$

المعادلات الاعتدالية (١٩) يمكن تذكرها بسهولة بملاحظة أن المعادلة الأولى يمكن الحصول عليها بتجميع طرف المعادلة (١٨)، أى ، $\Sigma Y = \Sigma(a_0 + a_1X) = a_0N + a_1\Sigma X$ بينما المعادلة الثانية يمكن الحصول عليها بضرب طرف المعادلة (١٨) أولا فى X ثم تجميع طرف لمعادلة $\Sigma XY = \Sigma X\ (a_0 + a_0X) = a_0\Sigma X + a_1\Sigma X^2$. لاحظ أن هذه ليست خطوات لإثبات المعادلة الاعتدالية ولكنها ببساطة أسلوب لتذكر هذه المعادلات . لإثبات هذه العلاقة تستخدم التفاضل ، أنظر الملحق VIII ، صفحة ٥٤٠ .

لاحظ كذلك أنه فى (١٩) و (٢٠) استخدمنا الرموز المختصرة $\Sigma X, \Sigma XY$ ، وغيرها ، بدلا من $\sum_{j=1}^{N} X_j, \sum_{j=1}^{N} X_jY_j$ وغيرها .

ويمكن أحياناً اختصار العمل فى إيجاد خط المربعات الصغرى بتحويل البيانات بحيث $x = X - \bar{X}$ و $y = Y - \bar{Y}$ وبهذا تكتب معادلة خط المربعات الصغرى كالآتى (أنظر المسألة ١٣ - ١٥)

$$(٢١) \qquad y = \left(\frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2}\right)x \quad \text{أو} \quad y = \left(\frac{\Sigma xY}{\Sigma x^2}\right)x$$

وعلى وجه الخصوص إذا كانت X تحقق العلاقة $\Sigma X = 0$ ، أى أن ، $\bar{X} = 0$ فإن

$$(٢٢) \qquad Y = \bar{Y} + \left(\frac{\Sigma XY}{\Sigma X^2}\right)X$$

من هذه المعادلة يتضح أن خط المربعات الصغرى يمر خلال النقطة $(\bar{X}, \bar{Y})$ وتسمى مركز القوة أو مركز ثقل البيانات

إذا أخذنا المتغير X كتغير تابع بدلا من كونه متغير مستقل ، فإننا نكتب المعادلة (١٨) على صورة $X = b_0 + b_1 Y$ فإن النتائج السابقة تنطبق إذا أبدلنا X بدلا من Y وأحللنا b_1 ، b_0 بدلا من a_0, a_1 على الترتيب . خط المربعات الذى سنحصل عليه فى هذه الحالة لن يكون بشكل عام مثل الذى حصلنا عليه أعلاه (أنظر المسائل ١٣ – ١١ و ١٣ – ١٥ (د)) .

العلاقات غير الخطية :

العلاقات غير الخطية يمكن فى بعض الأحيان تحويلها إلى علاقات خطية باستخدام تحويلة مناسبة للمتغيرات . (أنظر المسألة ١٣ – ٢١) .

المربعات الصغرى للقطع المكافىء :

معادلة القطع المكافىء التقريبى للمربعات الصغرى لمجموعة من النقط $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots, (X_N, Y_N)$ هى

$$Y = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 \qquad (٢٣)$$

حيث تتحدد قيمة الثوابت a_0, a_1, a_2 بحل المعادلات التالية آنياً

$$\left.\begin{aligned} \Sigma Y &= a_0 N + a_1 \Sigma X + a_2 \Sigma X^2 \\ \Sigma XY &= a_0 \Sigma X + a_1 \Sigma X^2 + a_2 \Sigma X^3 \\ \Sigma X^2 Y &= a_0 \Sigma X^2 + a_1 \Sigma X^3 + a_2 \Sigma X^4 \end{aligned}\right\} \qquad (٢٤)$$

والتى تسمى بالمعادلات الاعتدالية لقطع مكافىء المربعات الصغرى .

المعادلات (٢٤) يمكن تذكرها بسهولة بملاحظة أن هذه المعادلات يمكن الحصول عليها بضرب المعادلة (٢٣) فى $1, X, X^2$ على الترتيب والتجميع على الطرفين للمعادلات الناتجة . وهذا الأسلوب يمكن تعميمه للحصول على المعادلات الاعتدالية لمنحنى المربعات الصغرى من الدرجة الثالثة ، منحنى المربعات الصغرى من الدرجة الرابعة وبشكل عام أى من منحنيات المربعات الصغرى المقابلة للمعادلة (٥) .

وكما هو الحال فى خط المربعات الصغرى ، فإنه يمكن تبسيط المعادلة (٢٤) باختيار X بحيث تكون $\Sigma X = 0$. ويمكن أيضاً إجراء التبسيط باختبار المتغيرات الجديدة $x = X - \bar{X}$ ، $y = Y - \bar{Y}$.

الانحـــدار :

فى أغلب الأحيان يكون المطلوب هوتقدير قيمة المتغير Y المقابلة لقيمة معطاة للمتغير X وذلك باستخدام بيانات مأخوذة من عينة . ويمكن أن يتم ذلك بتقدير قيمة Y من منحنى المربعات الصغرى التى توفق بيانات العينة . المنحنى الناتج يسمى منحنى انحدار Y على X حيث أن Y تقدر من X .

إذا كان المطلوب هو تقدير قيمة X من قيمة معطاة لـ Y فإننا نستخدم منحنى انحدار X على Y ، والتي تتضمن تبديل المتغيرات في شكل الانتشار بحيث تكون X هو المتغير التابع و Y هي المتغير المستقل . وهذه تكافىء أحلال الانحرافات الرأسية في تعريف منحنيات المربعات الصغرى في صفحة ٣٥٢ بالانحرافات الأفقية .

وبشكل عام فإن خط أو منحنى انحدار Y على X يماثل خط أو منحنى انحدار X على Y .

تطبيقات على السلاسل الزمنية :

إذا كان المتغير المستقل X هو الزمن ، فإن البيانات تظهر قيم X عند أوقات مختلفة ، تسمى البيانات المرتبة حسب الزمن بالسلاسل الزمنية . ويسمى خط أو منحنى انحدار Y على X في هذه الحالة خط الاتجاه العام أو منحنى الاتجاه العام ويستخدم غالباً لأهداف التقدير أو التنبؤ .

مسائل تتضمن أكثر من متغيرين :

المسائل المتضمنة أكثر من متغيرين يمكن معالجتها بأسلوب مماثل لهذا الذى استخدم في حالة المتغيرين . على سبيل المثال ، قد تكون هناك علاقة بين المتغيرات الثلاثة X, Y, Z والتي يمكن وضعها بالمعادلة .

$$Z = a_0 + a_1 X + a_2 Y \qquad (٢٥)$$

وتسمى معادلة خطية في المتغيرات X, Y, Z .

هذه المعادلات يمكن تمثيلها بمستوى في نظام للاحداثيات المتعامدة ذو ثلاثة أبعاد والنقط الفعلية للعينة $(X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2), \ldots, (X_N, Y_N, Z_N)$ قد « تنتشر » بصوره ليست متباعدة من هذا المستوى . والذى يمكن تسميته بالمستوى التقريبي .

بتعميم طريقة المربعات الصغرى ، يمكن أن نتكلم عن مستوى المربعات الصغرى الذى يقرب البيانات . فإذا كنا نقدر Z من قيم معطاة لـ X و Y ، فهذا يسمى مستوى انحدار Z على X و Y . المعادلات الاعتدالية المقابلة لمستوى المربعات الصغرى (٢٥) تعطى كما يلي :

$$\left.\begin{aligned} \Sigma Z &= a_0 N + a_1 \Sigma X + a_2 \Sigma Y \\ \Sigma XZ &= a_0 \Sigma X + a_1 \Sigma X^2 + a_2 \Sigma XY \\ \Sigma YZ &= a_0 \Sigma Y + a_1 \Sigma XY + a_2 \Sigma Y^2 \end{aligned}\right\} \qquad (٢٦)$$

ويمكن تذكرها بأننا نحصل عليها بضرب (٢٥) في $1, X, Y$ بالتتالي ثم التجميع .

ويمكن أيضاً اعتبار معادلات أكثر تعقيداً من (٢٥) . وهذه تمثل سطوح الانحدار وإذا زاد عدد المتغيرات عن ثلاثة ، فإن التمثيل الهندسي لايمكن استخدامه حيث أن هذا يتطلب فراغاً ذا أربعة ، خمسة . . . . أبعاد .

المشاكل التى تتضمن تقدير متغير من متغيرين أو أكثر تسمى مشاكل الانحدار المتعدد وسوف يتم دراستها بالتفصيل فى الفصل الخامس عشر .

مسائل محلولة

الخطوط المستقيمة :

١٣ - ١ (أ) ارسم خطاً مستقيماً يقرب البيانات بالجدول ١٣-١ . (ب) أوجد معادلة هذا الخط .

الجدول ١٣ - ١

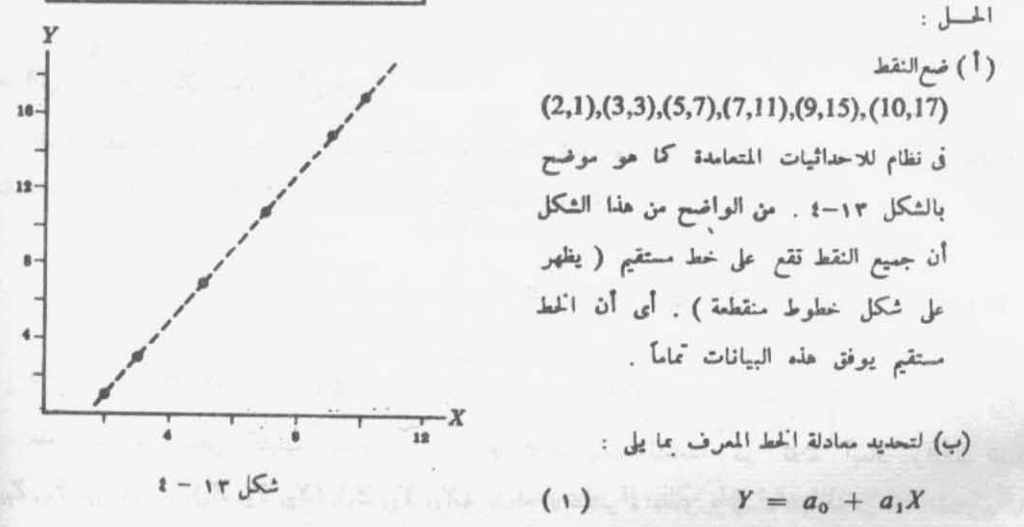
X	2	3	5	7	9	10
Y	1	3	7	11	15	17

الحـل :

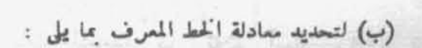
(أ) ضع النقط

(2,1),(3,3),(5,7),(7,11),(9,15),(10,17)

فى نظام للاحداثيات المتعامدة كما هو موضح بالشكل ١٣-٤ . من الواضح من هذا الشكل أن جميع النقط تقع على خط مستقيم (يظهر على شكل خطوط منقطعة) . أى أن الخط مستقيم يوفق هذه البيانات تماماً .



شكل ١٣ - ٤



(ب) لتحديد معادلة الخط المعرف بما يلى :

$$Y = a_0 + a_1X \qquad (١)$$

فإنه يكفى تحديد نقطتين . اختر النقطتين (2, 1) و (3, 3) على سبيل المثال .

للنقطة (2, 1) ، $Y = 1$ ، $X = 2$. بالتعويض بهذه النقط فى 1 ينتج

$$1 = a_0 + 2a_1 \qquad (٢)$$

كذلك النقطة (3, 3) ، $Y = 3$ ، $X = 3$ بالتعويض فى (١) ينتج

$$3 = a_0 + 3a_1 \qquad (٣)$$

بحل (٢) و (٣) آنياً نجد أن $a_0 = -3$ ، $a_1 = 2$ والمعادلة المطلوبة هى

$$Y = -3 + 2X \text{ أو } Y = 2X - 3$$

كوسيلة للمراجعة ، يمكن أن نثبت أن النقط $(5, 7)$, $(7, 11)$, $(9, 15)$, $(10, 17)$ تقع كذلك على الخط .

١٣ - ٢ فى المسألة ١٣ - ١ أوجد (أ) Y عند $X = 4$ (ب) Y عند $X = 15$ (ج) Y عند $X = 0$ (د) X عند $Y = 7.5$ (هـ) X عند $Y = 0$ (و) الزيادة فى Y المقابلة لزيادة X بوحدة واحدة .

الحــل :

نفترض أن نفس العلاقة $Y = 2X - 3$ تتحقق لقيم X و Y غير تلك الموضحة فى الجدول ١٣ - ١ بالمسألة ١٣ - ١

(أ) أذا كانت $X = 4$ فإن $Y = 2(4) - 3 = 8 - 3 = 5$. وبما أننا نحصل على قيمة Y المقابلة لقيمة X الواقعة بين قيمتين معينتين لـ X فإن هذه العملية تسمى بالاستكمال الخطى .

(ب) إذا كانت $X = 15$ فإن $Y = 2(15) - 3 = 30 - 3 = 27$. وبما أننا نحصل على قيمة Y المقابلة لقيمة X خارج قيم X المعطاة ، فإن هذه العملية تسمى بالاستكمال الخطى الخارجى .

(ج) إذا كانت $X = 0$ ، $Y = 2(0) - 3 = 0 - 3 = -3$. فإن قيمة Y عند $X = 0$ تسمى الجزء المقطوع من محور Y وهى قيمة Y عند تقاطع الخط (إذا مد لو كان ذلك ضرورياً) مع محور Y .

(د) إذا كانت $Y = 7.5$ فإن $7.5 = 2X - 3$ ، إذن $2X = 7.5 + 3 = 10.5$ و $X = 10.5/2 = 5.25$.

(هـ) إذا كانت $Y = 0$ فإن $0 = 2X - 3$ ، إذن $2X = 3$ و $X = 1.5$ وهى قيمة X عند $Y = 0$ وتسمى الجزء المقطوع من محور X . وهى قيمة X عند نقطة تقاطع الخط (إذا مد لو كان ذلك ضرورياً) مع محور X .

(و) إذا زادت X وحدة من 2 إلى 3 فإن Y تزيد من 1 إلى 3 أى تتغير بمقدار وحدتين .

إذا زادت X من 2 إلى 10 ، أى ، $8 = (2 - 10)$ وحدات ، فإن Y تزيد من 1 إلى 17 أو $16 = (1 - 17)$ وحدة . إذن Y تزيد 16 وحدة مقابلة لزيادة 8 وحدات فى X أو أنها تزيد وحدتين مقابل زيادة وحدة فى X .

بشكل عام إذا كانت ΔY تعبر عن التغير فى Y الناتج من تغير فى X مقداره ΔX فإن التغير فى Y مقابل تغير وحدة واحدة فى X هو $\Delta Y/\Delta X = 2$. وهذا يسمى ميل الخط ويساوى دائماً a_1 فى المعادلة $Y = a_0 + a_1X$. الثابت a_0 يسمى الجزء المقطوع من محور الصادرات للخط (أنظر الجزء (ج)) .

الأسئلة السابقة يمكن إجابتها بالرجوع مباشرة إلى الشكل ١٣ - ٤ .

١٣ - ٣ (أ) وضح أن معادلة الخط المستقيم الذى يمر بالنقط (X_1, Y_1) و (X_2, Y_2) يعطى بالمعادلة

$$Y - Y_1 = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}(X - X_1)$$

(ب) أوجد معادلة الخط المستقيم الذى يمر خلال النقط $(2, -3)$ و $(4, 5)$

الحـــل :

(أ) معادلة الخط المستقيم هى : $Y = a_0 + a_1X$ (١)

بما أن (X_1, Y_1) تقع على الخط فإن $Y_1 = a_0 + a_1X_1$ (٢)

بما أن (X_2, Y_2) تقع على الخط فإن $Y_2 = a_0 + a_1X_2$ (٣)

يطرح المعادلة (٢) من (١) فإن $Y - Y_1 = a_1(X - X_1)$ (٤)

يطرح المعادلة (٢) من (٣) ، $Y_2 - Y_1 = a_1(X_2 - X_1)$ أو $a_1 = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}$

بالتعويض بقيمة a_1 هذه فى (٤) نحصـــل على $Y - Y_1 = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}(X - X_1)$ وهو المطلوب الكمية $\frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}$ يرمز لهـــا غالباً بالحرف m ، وتمثل التغير فى Y مقسوماً على التغير المقابل له فى X وهو ميل الخط . وبهذا يمكن كتابة المعادلة المطلوبة فى الصورة $Y - Y_1 = m(X - X_1)$.

(ب) الطريقة ١ : باستخدام النتيجة فى (أ)

بالمقابلة للنقطة الأولى $(2, -3)$ فإن $Y_1 = -3$ ، $X_1 = 2$.

بالمقابلة للنقطة الثانية $(4, 5)$ فإن $Y_2 = 5$ ، $X_2 = 4$

إذن الميل $m = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} = \frac{5-(-3)}{4-2} = \frac{8}{2} = 4$

والمعادلة المطلوبة هى $Y - Y_1 = m(X - X_1)$ or $Y - (-3) = 4(X - 2)$

والتى يمكن كتابتها فى الصورة $Y + 3 = 4(X - 2)$ أو $Y = 4X - 11$

الطريقة ٢ : باستخدام طريقة المسألة ١٣-١ (ب) .

معادلة الخط المستقيم هى $Y = a_0 + a_1X$.

بما أن النقطة $(2, -3)$ على الخط فإن (١) $-3 = a_0 + 2a_1$

بما أن النقطة $(4, 5)$ على الخط فإن (٢) $5 = a_0 + 4a_1$

بحل (١) ، (٢) آنياً ، نحصل على $a_0 = -11$ و $a_1 = 4$ وبهذا فإن المعادلة المطلوبة هى

$Y = -11 + 4X$ أو $Y = 4X - 11$

١٣ - ٤ فسر بالرسم خطوات حل المسألة ١٣-٣ (أ)

الحـــل :

فى الشكل ١٣-٥ وضحنا الخط الذى يمر خلال النقط P و Q والتى كانت أحداثياتها (X_1, Y_1) و (X_2, Y_2) على الترتيب . النقطة R والتى أحداثياتها (X, Y) تعبر عن أى نقطة أخرى على الخط .

شكل ١٣ - ٥

من المثلثين المتشابهين PQS ، PRT

نجد أن

$$\frac{RT}{TP} = \frac{QS}{SP} \quad \text{or} \quad \frac{Y - Y_1}{X - X_1} = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} \qquad (١)$$

بضرب الطرفين فى $X - X_1$

$$Y - Y_1 = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}(X - X_1)$$

وهى المعادلة المطلوبة للخط .

لاحظ أن كلا النسبتين فى (١) هو الميل m وبهذا فإنه يمكن كتابة :

$$Y - Y_1 = m(X - X_1)$$

١٣ - ٥ أوجد (أ) الميل ، (ب) المعادلة (جـ) الجزء المقطوع من محور Y (د) الجزء المقطوع من محور X ، للخط الذى يمر بالنقط $(1, 5)$ ، $(4, -1)$.

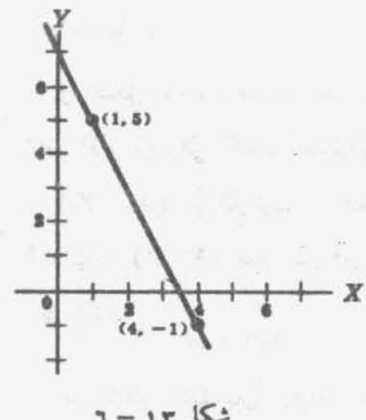
الحـــل :

(أ) $(X_1 = 1,\ Y_1 = 5)$ و $(X_2 = 4,\ Y_2 = -1)$

إذن

$$m = \text{الميل} = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} = \frac{-1 - 5}{4 - 1} = \frac{-6}{3} = -2$$

والإشارة السالبة فى الميل تشير إلى أنه بزيادة X فإن Y تتناقص ، كما هو موضح بالشكل ١٣ – ٦ .



شكل ١٣ – ٦

(ب) معادلة الخط هى

$$Y - Y_1 = m(X - X_1) \quad \text{أو} \quad Y - 5 = -2(X - 1)$$

أى

$$Y - 5 = -2X + 2 \quad \text{أو} \quad Y = 7 - 2X$$

وهذه يمكن أيضاً الحصول عليها باستخدام الطريقة الثانية فى المسألة ١٣ – ٣ (ب) .

(جـ) الجزء المقطوع من محور Y ، وهو قيمة Y عند $X = 0$ ، يعطى بالمعادلة $Y=7-2\ (0) = 7$ وهذه يمكن أيضاً الحصول عليها مباشرة من الرسم .

(د) الجزء المقطوع من محور X ، وهو قيمة X عند $Y=0$ نحصل عليه بالتعويض عن $Y = 0$ فى المعادلة $Y = 7 - 2X$ ، وعلى ذلك فإن $0 = 7 - 2X$ أو $2X = 7$ أى $X = 3.5$.

و هذا يمكن ملاحظته أيضاً مباشرة من الرسم .

١٣ – ٦ أوجد معادلة الخط الذى يمر خلال النقطة $(4, 2)$ والذى يوازى الخط $2X + 3Y = 6$.

الحـــل :

إذا كان الخطان متوازيين ، فإن ميلهما متساو . من المعادلة $2X + 3Y = 6$ فإن $3Y = 6 - 2X$ أو $Y = 2 - {}^2/_3\ X$ بحيث أن ميل الخط هو $m = -{}^2/_3$. إذن معادلة الخط المطلوبة هى

$$Y - Y_1 = m(X - X_1) \quad \text{أو} \quad Y - 2 = -\tfrac{2}{3}(X - 4)$$

والتى يمكن أيضاً كتابتها على الصورة $2X + 3Y = 14$

طريقة أخرى :

أى خط مواز لـ $2X + 3Y = 6$ معادلته تكون على الصورة $2X + 3Y = c$ وللحصول على c ، اعتبر $X = 4$ ، $Y = 2$. إذن $2(4) + 3(2) = c$ أو $c = 14$ والمعادلة المطلوبة هى $2X + 3Y = 14$.

بالمقارنة بين (٥) وحدود الثقة $(\bar{X} \pm z_c \sigma/\sqrt{N})$ المذكورة فى الفصل التاسع ، صفحة ٢٥٣ ، نجد أنه فى العينات أحللنا بدلا من z_c (والتى نحصل عليها من التوزيع الطبيعى) ، t_c (والتى نحصل عليها من توزيع t) وبدلا من σ استخدمنا $\hat{s} = \sqrt{N/(N-1)}s$ ، تقدير σ من العينة .

و كلما زادت N ، فإن كلا الطريقتين يتجهان نحو الاتفاق .

اختبارا الفروض والمعنوية :

اختبارات الفروض والمعنوية التى نوقشت بالفصل العاشر يمكن بسهولة أن تمتد لتشمل المشاكل الخاصة بالعينات الصغيرة ، والاختلاف الوحيد هو أن قيم z أو إحصائية z يستبدل بها القيم t أو إحصائية t الملائمة .

١ — الأوســاط :

لاختبار الفرض H_0 إن مجتمعاً يتوزع توزيعاً طبيعياً متوسط μ ، فإننا نستخدم قيم t أو إحصائية t .

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{s}\sqrt{N-1} = \frac{\bar{X} - \mu}{\hat{s}}\sqrt{N} \qquad (٦)$$

حيث $\bar{X}$ هو الوسط الحسابى لعينة حجمها N

وهذا مناظر لاستخدام قيم z ، $z = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{N}}$ ، لقيم N الكبيرة فيما عدا استخدام $\hat{s} = \sqrt{N/(N-1)}s$ بدلا من σ . الفرق أنه بينما z تتوزع توزيعاً طبيعياً ، فإن t تتبع توزيع أستودينت . كلما كبرت N فإنهما يتجهان نحو الاتفاق .

٢ — الفروق بين الأوســاط :

افترض أن عينتين عشوائيتين حجمهما N_1 و N_2 سحباً من مجتمعات تتوزع توزيعاً طبيعياً انحرافتها المعيارية متساوية $(\sigma_1 = \sigma_2)$ افترض كذلك أن متوسطات العينتين هما . $\bar{X}_2$ ، $\bar{X}_1$ وانحرافاتهما المعيارية هى s_2 ، s_1 . لاختبار الفرض H_0 أن العينتين مسحوبتين من نفس المجتمــع (أى أن $\mu_1 = \mu_2$ وكذلك $\sigma_1 = \sigma_2$) فإننا نستخدم قيم t المعرفة كالآتى :

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sigma\sqrt{1/N_1 + 1/N_2}} \qquad \text{حيث} \qquad \sigma = \sqrt{\frac{N_1 s_1^2 + N_2 s_2^2}{N_1 + N_2 - 2}} \qquad (٧)$$

حيث تتبع t توزيع أستودينت بدرجات حرية $\nu = N_1 + N_2 - 2$.

بالرجوع إلى المعادلة (٢) ، صفحة ٢٧٢ ، نجد أننا نحصل على المعادلة (٧) أعلاه بوضع $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ فى قيم z فى المعادلة (٢) المشار إليها ثم نستخدم كتقدير لـ σ^2 الوسط المرجح

$$\frac{(N_1 - 1)\hat{s}_1^2 + (N_2 - 1)\hat{s}_2^2}{(N_1 - 1) + (N_2 - 1)} = \frac{N_1 s_1^2 + N_2 s_2^2}{N_1 + N_2 - 2}$$

حيث $\hat{s}_1^2$ و $\hat{s}_2^2$ تقديرات غير متحيزة لقيم σ_1^2 و σ_2^2 (أنظر الخاصية (٣) ، صفحة ١١٦) .

توزيع كا ـــ تربيع (كا٢)

عرف الاحصائية

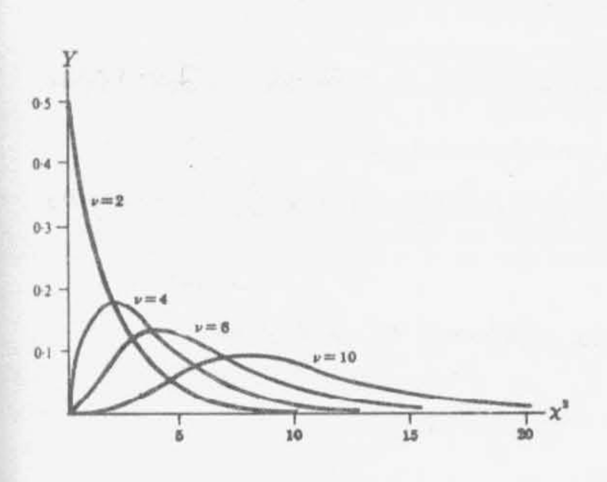
$$\chi^2 = \frac{Ns^2}{\sigma^2} = \frac{(X_1 - \bar{X})^2 + (X_2 - \bar{X})^2 + \ldots + (X_N - \bar{X})^2}{\sigma^2} \qquad (٨)$$

حيث χ هو الحرف اليونانى كا و χ^2 تقرأ كا تربيع .

إذا أخذنا فى الاعتبار عينات حجمها N مسحوبة من مجتمع طبيعى انحرافه المعيارى σ ، وإذا حسبنا لكل عينة χ^2 ، فإنه يمكننا الحصول على توزيع المعاينة لـ χ^2 . ويسمى توزيع كا - تربيع (أو كا٢) ، ويعرف كالآتى :

$$(٩) \qquad Y = Y_0(\chi^2)^{\frac{1}{2}(\nu-2)} e^{-\frac{1}{2}\chi^2} = Y_0\chi^{\nu-2} e^{-\frac{1}{2}\chi^2}$$

حيث $\nu = N - 1$ هــو عدد درجات الحرية ، Y_0 هو مقدار ثابت يعتمد على ν بحيث يجعل المساحة تحت المنحنى مساوية الواحد .



توزيع كا٢ لقيم ν المختلفة

شكل ١١ - ٢

يبين الشكل ١١ - ٢ توزيعات كا٢ المقابلة لبعض قيم ν المختلفة . نهاية Y العظمى تتحقق عند $\chi^2 = \nu - 2$ لقيم $\nu \geqq 2$.

فترات الثقة لـــ χ^2 :

كما فعلنا بالنسبة للتوزيع الطبيعى وتوزيع t ، فيمكن أن نعرف 95% ، 99% أو غيرها من حدود الثقة أو فترات الثقة لـ χ^2 باستخدام جداول توزيع χ^2 بالملحق ، صفحة ٥٣٥ . بهذه الطريقة يمكن تقدير داخل حدود ثقة معينة الانحراف المعيارى للمجتمع σ بدلالة الانحراف المعيارى للعينة s .

على سبيل المثال ، إذا كانت $\chi^2_{0.025}$ و $\chi^2_{0.975}$ هى قيم χ^2 (تسمى القيم الحرجة) حيث 2.5% من المساحة تقع فى كل من « طرفى » التوزيع ، فإن 95% حدود ثقة هى

$$\chi^2_{0.025} < \frac{Ns^2}{\sigma^2} < \chi^2_{0.975} \qquad (١٠)$$

ومنها نجد أن σ قدرت بحيث تقع داخل الفترة

$$\frac{s\sqrt{N}}{\chi_{0.975}} < \sigma < \frac{s\sqrt{N}}{\chi_{0.025}} \qquad (١١)$$

بدرجة ثقة 95% . بنفس الطريقة فإنه يمكن الحصول على فترات الثقة الأخرى . القيم $\chi_{0.035}$ و $\chi_{0.975}$ تمثل قيم المئنيات 2.5 و 97.5 على الترتيب .

الجدول فى الملحق (IV) ، صفحة ٥٣٥ يعطى المئنيات المقابلة لدرجات الحرية ν . لقيم ν الكبيرة $(\nu \geqq 30)$ ν يمكن أن نستفيد من أن $(\sqrt{2\chi^2} - \sqrt{2\nu - 1})$ قريب جداً من التوزيع الطبيعى الذى متوسطه الصفر وانحرافه المعيارى الواحد ، بحيث يمكن استخدام جداول التوزيع الطبيعى إذا كانت $\nu \geqq 30$. إذن إذا كانت χ^2_p و z_p مئنيات توزيع كا[٢] والتوزيع الطبيعى على الترتيب فإن

$$\chi_p^2 = \tfrac{1}{2}(z_p + \sqrt{2\nu - 1})^2 \qquad (١٢)$$

فى هذه الحالات تتفق النتائج بدرجة كبيرة مع النتائج التى حصلنا عليها فى الفصل الثامن والتاسع .

لمزيد من تطبيقات توزيع كا[٢] أنظر الفصل الثانى عشر .

درجات الحرية :

حتى يمكن حساب إحصائية مثل (١) أو (٨) ، فمن الضرورى استخدام مشاهدات نحصل عليها من العينة كذلك بعض معالم المجتمع . فإذا كانت هذه المعالم غير معروفة فيجب تقديرها من العينة .

عدد درجات الحرية فى إحصائية بشكل عام يرمز لها بالرمز ν وتعرف بأنها العدد N من المشاهدات المستقلة فى العينة (أى حجم العينة) ناقص العدد k لمعالم المجتمع والذى يجب تقديره من مشاهدات العينة . بالرموز ، $\nu = N - k$.

فى حالة الإحصائية (١) فإن عدد المشاهدات المستقلة فى العينة هو N ، ومنها يمكن حساب قيم $\bar{X}$ و s . وحيث أنه يجب أن نقدر μ ، فإن $k = 1$ بحيث $\nu = N - 1$.

فى حالة الإحصائية (٨) ، عدد المشاهدات المستقلة فى العينة هو N ، ومنها يمكن حساب قيمة s . وحيث أنه يجب أن نقدر σ ، فإن $k = 1$ وعلى ذلك فإن $\nu = N - 1$.

مسائل محلولة

توزيع « استودينت » ت

١١ – ١ شكل توزيع أستودينت t بدرجات حرية 9 موضح بالشكل ١١ – ٣ .

أوجد قيم t_1 التى تحقق الآتى :

(أ) المساحة المظللة إلى اليمين = 0.05

(ب) المساحة الكلية المظللة = 0.05

(جـ) المساحة الكلية الغير مظللة = 0.99

(د) المساحة المظللة إلى اليسار = 0.01

(هـ) المساحة إلى يسار t_1 تساوى 0.90

$-t_1$ t_1

شكل ١١ – ٣

الحـل :

(أ) إذا كانت المساحة المظللة إلى اليمين هى 0.05 ، فإن المساحة إلى يسار t_1 هى $0.95 = (1 - 0.05)$ و t_1 تمثل المئينة الـ 95 ، $t_{0.95}$.

بالرجوع إلى الجدول بالملحق III صفحة ٥٣٤ ، نتجه إلى أدنى تحت العمود المعنون ν حتى نصل إلى الرقم 9 . ثم نتجه إلى اليمين حتى نصل إلى العمود المعنون $t_{.95}$. والنتيجة هى 1.83 وهى قيمة t المطلوبة .

(ب) إذا كانت المساحة الكلية المظللة تساوى 0.05 ، فإن المساحة المظللة إلى اليمين هى 0.025 بالتماثل . بهذا فإن المساحة إلى يسار t_1 هى $0.975 = (1 - 0.025)$ وتمثل t_1 المئين الـ 97.5 . $t_{0.975}$ من الجدول بالملحق III صفحة ٥٣٤ نجد أن قيمة t المطلوبة هى 2.26 .

(جـ) إذا كانت المساحة الكلية غير المظللة هى 0.99 ، فإن المساحة الكلية المظللة هى $0.01 = (1 - 0.99)$ والمساحة المظللة إلى اليمين هى $0.005 = 0.01/2$. من الجدول نجد أن $t_{0.995} = 3.25$.

(د) إذا كانت المساحة المظللة إلى اليسار تساوى 0.01 ، بالتماثل فإن المساحة المظللة إلى اليمين هى 0.01 . من الجدول $t_{0.99} = 2.82$. بهذا فإن القيمة t الحرجة والتى تساوى المساحة المظللة إلى يسارها 0.01 هى -2.82 .

(هـ) إذا كانت المساحة إلى يسار t_1 هى 0.90 ، فإن t_1 تقابل المئين التسعين ، $t_{0.90}$ ، ومن الجدول يساوى 1.38 .

١١ – ٢ أوجد القيم الحرجة لـ t والتى تجعل المساحة فى الطرف الأيمن لتوزيع t هى 0.05 إذا كانت درجات الحرية ν تساوى (أ) 16 (ب) 27 (جـ) 200 .

الحـل :

باستخدام الجدول فى الملحق III ، صفحة ٥٣٤ ، نجد فى العمود المعنون $t_{0.95}$ القيم :

(أ) 1.75 مقابلة ل $v = 16$.

(ب) 1.70 مقابلة ل $v = 27$.

(جـ) 1.645 مقابلة ل $v = 200$.

(القيمة الأخيرة هى القيمة التى يمكن الحصـــول عليها باستخدام المنحنى الطبيعى . فى الجدول بالملحق III ، صفحة ٥٣٤ ، وتقابل هذه القيمة الموجودة فى الصف الأخير المعنون ∞ ، أى ، ما لانهاية) .

١١ – ٣ تعطى 95% معاملات الثقة (من طرفين) للتوزيع الطبيعى بالقيم ± 1.96 . ماهى المعاملات المقابلة لتوزيع t إذا كانت (أ) $v = 9$ (ب) $v = 20$ (جـ) $v = 30$ (د) $v = 60$ ؟

الحـل :

لمعاملات الثقة 95% « من طرفين » فإن المساحة الكلية المظللة فى الشكل ١١ – ٣ يجب أن تساوى 0.05 . بهذا فإن المساحة المظللة فى الطرف الأيمن هى 0.025 والقيمة الحرجة المقابلة ل t هى $t_{0.975}$. إذن معاملات الثقة المطلوبة هى $\pm t_{0.975}$. ولقيم v المعطاة نجد أن القيم المناظرة هى :

(أ) ± 2.26 (ب) ± 2.09 (جـ) ± 2.04 (د) ± 2.00 .

١١ – ٤ عينة من 10 قياسات لأقطار كرة أعطت متوسط $X = 4.38$ mm وانحراف معيارى $s = 0.06$ mm أوجد (أ) 95% (ب) 99% حدود ثقة القطر الفعلى .

الحـل :

(أ) 95% حدود ثقة تعطى كما يلى $X \pm t_{0.975}(s/\sqrt{N-1})$ بما أن $v = N-1 = 10-1 = 9$ نجد أن $t_{0.975} = 2.26$ (أنظر أيضاً المسألة ١١ – ٣ (أ)) . إذن باستخدام $X = 4.38$ و $s = 0.06$ فإن 95% حدود الثقة المطلوبة هى $4.38 \pm 2.26(0.06)/\sqrt{10-1}) = 4.38 \pm 0.0452$ mm, أى أننا نكون على ثقة بنسبة 95% بأن الوسط الحقيقى يقع بين

$$(4.38 + 0.0045) = 4.425 \text{ mm} \quad \text{و} \quad (4.38 - 0.045) = 4.335 \text{ mm}$$

(ب) 99% حدود ثقة تعطى كما يلى $X \pm t_{0.995}(s/\sqrt{N-1})$. لقيمة $v = 9$, $t_{0.995} = 3.25$. إذن 99% حدود الثقة هى $4.38 \pm 3.25(0.06/\sqrt{10-1}) = 4.38 \pm 0.0650$ mm; و 99% فترة ثقة هى 4.315 إلى 4.445 mm .

١١ – ٥ (أ) حل المسألة السابقة مفترضاً صلاحية نظرية العينات ذات الحجم الكبير .

(ب) قارن نتائج كلا الطريقتين .

الحـــل :

(أ) باستخدام نظرية العينات ذات الحجم الكبير ، 95% حدود الثقة هى

$$\bar{X} \pm 1{\cdot}96\sigma/\sqrt{N} = 4{\cdot}38 \pm 1{\cdot}96(0{\cdot}06/\sqrt{10}) = 4{\cdot}38 \pm 0{\cdot}037 \text{ mm}$$

وقد استخدمنا الانحراف المعيارى للعينة 0.06 ، كتقدير ل σ .

كذلك ، فإن 99% حدود الثقة هى

$$\bar{X} \pm 2{\cdot}58\sigma/\sqrt{N} = 4{\cdot}38 \pm 2{\cdot}58(0{\cdot}06/\sqrt{10}) = 4{\cdot}38 \pm 0{\cdot}049 \text{ mm}$$

(ب) فى كل حالة فإن فترة الثقة باستخدام طريقة العينات الصغيرة أو الطريقة المضبوطة للعينات ، أوسع من تلك التى حصلنا عليها باستخدام نظرية العينات الكبيرة . وهذا متوقع لأن درجة دقة أقل تكون متاحة باستخدام العينات الصغيرة عنها باستخدام العينات الكبيرة .

١١ – ٦ آلة لإنتاج الجلب المستديرة أنتجت فى الماضى جلب سمكها 0.50 mm ، لتقرير ما إذا كانت الآلة تعمـــل بصورة مرضية ، أخذت عينة من 10 جلب ووجد أن متوسط سمكها هو 0.53 mm وانحرافها المعيارى 0.03 mm . اختبر الفرض أن الآلة تعمل بصورة مرضية باستخدام مستوى المعنوية (أ) 0.05 (ب) 0.01

الحـــل :

المطلوب التقرير بين الفروض

$H_0 : \mu = 0.50$ ، الآلة تعمل بصورة مرضية .

$H_1 : \mu \neq 0.50$ ، الآلة لاتعمل بصورة مرضية .

بحيث يكون المطلوب هو اختبار من طرفين .

تحت الفرض H_0 ، فإن

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{s}\sqrt{N-1} = \frac{0{\cdot}53 - 0{\cdot}50}{0{\cdot}03}\sqrt{10-1} = 3{\cdot}00.$$

(أ) لاختبار من طرفين عند مستوى المعنوية 0.05 ، تتبنى قاعدة اتخاذ القرارات التالية :

(١) اقبل H_0 إذاكانت t تقع داخل الفترة من $-t_{0.975}$ إلى $t_{0.975}$ والتى لدرجات حرية $10 - 1 = 9$ تساوى الفترة من -2.26 إلى 2.26 .

(٢) ارفض H_0 فيما عدا ذلك .

بما أن $t = 3.00$ ، فإننا نرفض H_0 عند المستوى 0.05 .

(ب) لاختبار من طرفين عند مستوى المعنوية 0.01 ، تتبنى قاعدة اتخاذ القرارات التالية :

(١) أقبل H_0 إذا كانت t تقع داخـــل الفترة من $-t_{0.995}$ إلى $t_{0.995}$ والتى لدرجات حرية $10 - 1 = 9$ تساوى الفترة من -3.25 إلى 3.25 .

(٢) ارفض H_0 فيما عدا ذلك .

بما أن $t = 3.00$ ، فإننا نرفض H_0 عند المستوى 0.01 . وحيث أنه يمكننا رفض H_0 عند المستوى 0.05 ولكن ليس عندى المستوى 0.01 ، فيمكن القول بأن نتائج العينة محتملة المعنوية .

(أنظر المصطلح فى نهاية المسألة ١٠ – ٥ الفصل العاشر) . وينصح فى هـذه الحالة باختبار الآلة أو نختبر عينة ثانية على الأقل .

١١ – ٧ اختبرت 6 حبال من إنتاج أحد المصانع لمعرفة قوة مقاومتها للقطع فأظهرت متوسط قوة مقاومة القطع 7750 N بانحراف معيارى 145 N ، بينما يدعى المصنع المنتج الرقم 8000 N كقوة مقاومة للقطع لإنتاجه . هل يمكن تأييد ادعاء المنتج عند مستوى المعنوية (أ) 0.05 (ب) 0.01 ؟

الحـــل :

يجب أن نقرر بين الفرضين

$H_0 : \mu = 8000$ N ، وادعاء المصنع له مايبرره

$H_1 : \mu < 8000$ N ، وادعاء المصنع ليس له مايبرره .

أى أن المطلوب هو استخدام اختبار من طرف واحد .

تحت الفرض H_0 ، فإن

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{s}\sqrt{N-1} = \frac{7750 - 8000}{145}\sqrt{6-1} = 3.86$$

(أ) لاختبار من طرف واحد عند مستوى المعنوية 0.05 ، نتبنى قاعدة اتخاذ القرارات التالية :

(١) اقبل H_0 إذا كانت t أكبر من $-t_{0.95}$ ، والتى لدرجات حرية $5 = 1 - 6$ تعنى $t > -2.01$.

(٢) ارفض H_0 فيما عدا ذلك .

(ب) لاختبار من طرف واحد عند مستوى المعنوية 0.01 ، نتبنى قاعدة اتخاذ القرارات التالية :

(١) اقبل H_0 إذا كانت t أكبر من $-t_{0.99}$ ، والتى لدرجات حرية 5 تعنى $t > -3.36$.

(٢) ارفض H_0 فيما عدا ذلك .

بما أن $t = 3.86$ ، نرفض H_0 .

نستنتج من ذلك أنه من الصعب بشكل كبير قبول ادعاء المصنع .

١١ – ٨ نسبة الذكاء I.Q لـ 16 طالباً من منطقة معينة فى مدينة كان متوسطها 107 بانحراف معيارى 10 ، بينما نسبة الذكاء I.Q لـ 14 طالباً من منطقة أخرى بالمدينة كان متوسطها 112 بانحراف معيارى 8.

هل هناك اختلاف معنوى بين نسب الذكاء فى المجموعتين عند مستوى معنوية .

(أ) 0.01 (ب) 0.05 .

الحـــل :

إذا كانت μ_1 و μ_2 تمثل متوسط مجتمع نسبة الذكاء للطلبة من المنطقتين ، فإننا يجب أن نقرر بين الفرضين :

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ ، ولايوجد فرق أساسى بين المجموعتين

$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ ، ويوجد فرق معنوى بين المجموعتين

تحت الفرض H_0 ، $s\ H_0,\ t = \dfrac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sigma\sqrt{1/N_1 + 1/N_2}}$ where $\sigma = \sqrt{\dfrac{N_1 s_1^2 + N_2 s_2^2}{N_1 + N_2 - 2}}$.

إذن $\sigma = \sqrt{\dfrac{16(10)^2 + 14(8)^2}{16 + 14 - 2}} = 9{\cdot}44$ and $t = \dfrac{112 - 107}{9{\cdot}44\sqrt{1/16 + 1/14}} = 1{\cdot}45.$

(أ) باستخدام اختبار من طرفين عند مستوى معنوية 0.01 ، فيجب رفض H_0 إذا وقعت t خارج المدى من $-t_{0.995}$ إلى $t_{0.995}$ والتى لدرجات حرية $28 = (16 + 14 - 2) = (N_1 + N_2 - 2)$ تعنى المدى من -2.76 إلى 2.76 .

بهذا لايمكن رفض الفرض H_0 عند مستوى معنوية 0.01 .

(ب) باستخدام اختبار من طرفين عند مستوى معنوية 0.05 ، فيجب رفض H_0 إذا وقعت t خارج المدى من $-t_{0.975}$ إلى $t_{0.975}$ والتى لدجات حرية 28 تعنى المدى من -2.05 إلى 2.05 بهذا لايمكننا رفض H_0 عند مستوى المعنوية 0.05 .

نستنتج من هذا أنه لايوجد اختلاف معنوى بين نسبة الذكاء فى المجموعتين .

١١ - ٩ فى محطة للتجارب الزراعية كان المطلوب هو اختبار تأثير سماد من نوع معين على إنتاج القمح لهذا الفرض ، اختيرت 24 قطعة من الأرض لها نفس المساحة ، عولج نصفها بالسماد أما النصف الآخر فترك بدون معالجة (مجموعة ضابطة) فيما عدا ذلك فالظروف بينهم متشابهة . وكان متوسط الغلة من القمح فى المجموعة الضـــابطة هو 4.8 لتر بانحراف معيارى 4 لتر ، بينما متوسط غلة الفدان للقطع التى تم معالجتها هو 5.1 لتر بانحراف معيارى 3.6 لتر . هل يمكن أن نستنتج من ذلك أن هناك تحسن معنوى فى إنتاج القمح نتيجة لاستخدام السماد ، إذا استخدمنا مستوى معنوية . (أ) 1% (ب) 5% ؟

الحـــل :

إذا كانت μ_1 و μ_2 تمثل متوسط مجتمع غلة القمح من الأرض المعالجة والأرض غير المعالجة ، والمطلوب هوأن نقرر بين الفرضين :

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ ، والفروق ترجع إلى الصدفة

$H_1 : \mu_1 > \mu_2$ ، والسماد يؤدى إلى تحسين الغلة .

تحت الفرض H_0 ، $t = \dfrac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sigma\sqrt{1/N_1 + 1/N_2}}$ where $\sigma = \sqrt{\dfrac{N_1 s_1^2 + N_2 s_2^2}{N_1 + N_2 - 2}}$.

اذن $\sigma = \sqrt{\dfrac{12(4)^2 + 12(3{\cdot}6)^2}{12 + 12 - 2}} = 3{\cdot}97$ and $t = \dfrac{5{\cdot}1 - 4{\cdot}8}{3{\cdot}97\sqrt{1/12 + 1/12}} = 1{\cdot}85.$

(أ) باستخدام اختبار ذى طرفين عند مستوى معنوية 0.01 ، فيجب رفض H_0 إذا كانت t أكبر من $t_{0.99}$ ، والتى لدرجات حرية $22 = (12 + 12 - 2) = (N_1 + N_2 - 2)$ تساوى 2.52 .

بهذا لايمكن رفض H_0 عند مستوى المعنوية 0.01 .

(ب) باستخدام اختبار من طرف واحد عند مستوى معنوية 0.05 ، فيجب رفض H_0 إذا كانت t أكبر من $t_{0.95}$ ، والتى لدرجات حرية 22 تساوى 1.72 .

بهذا يمكن رفض H_0 عند مستوى المعنوية 0.05 . نستنتج من هذا أن التحسن فى غلة القمح باستخدام السماد هو محتمل المعنوية . أى أنه قبل الوصول إلى قرار حاسم خاص بفائدة السماد فقد يكون من المستحسن الحصول على أدلة أكثر .

توزيع كا – تربيع (كا٢) :

١١ – ١٠ رسم توزيع كا – تربيع بدرجات حرية 5 موضح بالشكل ١١ – ٤ .

أوجد القيم الحرجة لـ χ^2 التى تحقق الآتى :

(أ) المساحة المظللة إلى اليمين = 0.05

(ب) المساحة الكلية المظللة = 0.05

(جـ) المساحة المظللة إلى اليسار = 0.10

(د) المساحة المظللة إلى اليمين = 0.01

χ_1^2 χ_2^2 χ^2

شكل ١١ – ٤

الحـل :

(أ) إذا كانت المساحة المظللة إلى اليمين هى 0.05 ، فإن المساحة إلى يسار χ^2 هى $0.95 = (1 - 0.05)$ و χ_2^2 تمثل المئين الـ 95 . $\chi^2_{0.95}$.

بالرجوع إلى الجدول فى الملحق (IV) ، صفحة ٥٣٥ ، اتجه إلى أسفل تحت العمود المعنون ν حتى نصل إلى الرقم 5 . ثم اتجه إلى اليمين حتى تصل إلى العمود المعنون $\chi^2_{0.95}$.

والنتيجة 11.1 هى القيمة الحرجة لـ χ^2 .

(ب) بما أن التوزيع غير متماثل ، فإن هناك عدداً كبيراً من القيم الحرجة والتى تجعل المساحة الكلية المظللة = 0.05 على سبيل المثال ، المساحة المظللة إلى اليمين قد تكون 0.04 ، بينما المساحة المظللة إلى اليسار 0.01 . ومن المعتاد ، مالم يذكر خلاف ذلك ، اختيار المساحتين متساويتين . فى هذه الحالة كل مساحة تساوى 0.025 .

إذا كانت المساحة المظللة إلى اليمين 0.025 ، فإن المساحة إلى يسار χ_2^2 هى
$1 - 0.025 = 0.975$ و χ_2^2 تمثل المئين الـ 97.5 ، $\chi_{0.975}^2$ والتى يساوى 0.831

بهذا فإن القيم الحرجة هى 0.831 و 12.8 .

(ج) إذا كانت المساحة المظللة إلى اليسار هى 0.10 ، فإن χ_1^2 تمثل المئين العاشر $\chi_{0.10}^2$ ويساوى 1.61 .

(د) إذا كانت المساحة المظللة إلى اليمين هى 0.01 ، فإن المساحة إلى يسار χ_2^2 هى 0.99 و χ_2^2 تمثل المئين الـ 99 ، $\chi_{0.99}^2$ والتى تساوى 15.1 .

١١–١١ أوجد القيم الحرجة لـ χ^2 والتى تجعل المساحة فى الطرف الأيمن من توزيع χ^2 تساوى 0.05 ، إذا كان عدد درجات الحرية ν (أ) 15 (ب) 21 (ج) 50 .

الحل :

باستخدام الجدول بالملحق IV ، صفحة ٥٣٥ ، فى العمود المعنون $\chi_{0.95}^2$ نجد أن (أ) 25.0 تقابل $\nu = 15$ (ب) 32.7 تقابل $\nu = 21$ (ج) 67.5 تقابل $\nu = 50$.

١١–١٢ أوجد وسيط χ^2 المقابل لدرجات حرية (أ) 9 (ب) 28 (ج) 40 .

الحل :

باستخدام الجدول بالملحق IV ، صفحة ٥٣٥ ، فى العمود المعنون $\chi^2_{.50}$ (بما أن الوسيط هو المئين الخمسين) نجد أن القيم :

(أ) 8.34 تقابل $\nu = 9$ (ب) 27.3 تقابل $\nu = 28$ (ج) 39.3 تقابل $\nu = 40$.

من المهم ملاحظة أن قيم الوسيط قريبة جدا من عدد درجات الحرية . وفى الواقع فإنه لقيم $\nu > 10$ تساوى قيمة الوسيط $(\nu - 0.7)$ ، كما يمكن ملاحظته من الجدول .

١١–١٣ الانحراف المعيارى لأوزان 16 طالبا اختيروا بصورة عشوائية من مدرسة بها 1000 طالب كان 2.40 kg. أوجد (أ) 95% . (ب) 99% حدود ثقة للانحراف المعيارى لجميع الطلبة بالمدرسة .

الحل :

(أ) 95% حدود ثقة تعطى بالصيغة $s\sqrt{N}/\chi_{0.975}$ و $s\sqrt{N}/\chi_{0.025}$ لدرجات حرية
$\nu = 61 - 1 = 15$ ، $\chi_{0.975}^2 = 27.5$ أو $\chi_{0.975} = 5.24$ و $\chi_{2.025} = 6.26$
أو $\chi_{0.25} = 2.50$.

إذن 95% حدود ثقة هى $2.40\sqrt{16}/5.24$ و $2.40\sqrt{16}/2.50$ أى 1.83 Kg و 3.84 Kg
ونكون واثقين بدرجة 95% من أن الانحراف المعيارى للمجتمع يقع بين 1.83 و 3.84 kg .

(ب) 99% حدود ثقة تعطى بالصـــيغة $s\sqrt{N}/\chi_{0.995}$ و $s\sqrt{N}/\chi_{0.005}$. لدرجات حرية $\nu = 16 - 1 = 15$ ، $\chi^2_{0.995} = 32.8$ أو $\chi_{0.995} = 5.73$ و $\chi^2_{.005} = 4.60$ أو $\chi_{0.005} = 2.14$.

إذن 99% حدود ثقة هى $2.40\sqrt{16}/5.73$ و $2.40\sqrt{16}/2.14$ أى 1.68 kg و 4.49 kg ونكون واثقين بدرجة 99% من أن الانحراف المعيارى للمجتمع يقع بين 1.68 و 4.49 kg .

١١–١٤ أوجـــد $\chi^2_{0.95}$ لدرجات الحرية (ا) $\nu = 50$ (ب) $\nu = 100$.

الحـــل :

لقيم ν « أكبر من 30 ، يمكن أن نستخدم حقيقة أن $(\sqrt{2\chi^2} - \sqrt{2\nu - 1})$ تقترب بدرجة كبيرة من التوزيع الطبيعى الذى متوسطه الصفر وانحرافه المعيارى واحد . إذن إذا كانت z_p هى قيم مئينات z للتوزيع الطبيعى المعيارى ، فيمكن أن نكتب ، بدرجة تقريب جيدة .

$$\sqrt{2\chi^2_p} - \sqrt{2\nu - 1} = z_p \quad \text{or} \quad \sqrt{2\chi^2_p} = z_p + \sqrt{2\nu - 1}$$

حيث

$$\chi^2_p = \tfrac{1}{2}(z_p + \sqrt{2\nu - 1})^2$$

(ا) إذا كانت $\nu = 50$ فإن $\chi^2_{0.95} = \frac{1}{2}(z_{0.95} + \sqrt{2(50) - 1})^2 = \frac{1}{2}(1{\cdot}64 + \sqrt{99})^2 = 69{\cdot}2,$

والتى تتفق بشكل جيد مع القيمة 67.5 المعطاة بالجدول فى صفحة ٥٣٥

(ب) إذا كانت $\nu = 100$ فإن $\chi^2_{0.95} = \frac{1}{2}(z_{0.95} + \sqrt{2(100) - 1})^2 = \frac{1}{2}(1{\cdot}64 + \sqrt{199})^2 = 124{\cdot}0$

(القيمة الفعلية =124.3) .

١١–١٥ الانحراف المعيارى للعمر الانتاجى لعينة من 200 من لمبات الاضاءة هـــو 100 ساعة . أوجد (ا) 95% (ب) 99% حدود ثقة للانحراف المعيارى لجميع لمبات الاضاءة من هذا النوع .

الحـــل :

(ا) 95% حدود ثقة تعطى بالصيغة $s\sqrt{N}/\chi_{0.995}$ و $s\sqrt{N}/\chi_{0.025}$.

لدرجات حرية $\nu = 200 - 1 = 199$ ، نجد كما فى المسألة ١١–١٤

$$\chi^2_{0.975} = \tfrac{1}{2}(z_{0.975} + \sqrt{2(199) - 1})^2 = \tfrac{1}{2}(1{\cdot}96 + 19{\cdot}92)^2 = 239$$
$$\chi^2_{0.025} = \tfrac{1}{2}(z_{0.025} + \sqrt{2(199) - 1})^2 = \tfrac{1}{2}(-1{\cdot}96 + 19{\cdot}92)^2 = 161$$

ومنها $\chi_{0.975} = 15.5$ و $\chi_{0.025} = 12.7$

إذن 95% حدود ثقة هى $100\sqrt{200}/15.5 = 91.2$ و $100\sqrt{200}/12.7 = 111.3$ ساعة

أى أننا نكون واثقين بدرجة 95% من أن الانحراف المعيارى للمجتمع يقع بين 91.2 و 111.3 ساعة .

يجب مقارنة هذه النتيجة بالمسألة ٩–١٧ (أ) بالفصل التاسع .

(ب) 99% حدود ثقة تعطى بالصيغة $s\sqrt{N}/\chi_{0\cdot995}$ و $s\sqrt{N}/\chi_{0\cdot005}$. لدرجات حرية $\nu = 200 - 1 = 199$.

$$\chi^2_{0\cdot995} = \tfrac{1}{2}(z_{0\cdot995} + \sqrt{2(199) - 1})^2 = \tfrac{1}{2}(2\cdot58 + 19\cdot92)^2 = 253$$
$$\chi^2_{0\cdot005} = \tfrac{1}{2}(z_{0\cdot005} + \sqrt{2(199) - 1})^2 = \tfrac{1}{2}(-2\cdot58 + 19\cdot92)^2 = 150$$

ومنها $\chi_{0\cdot995} = 15.9$ و $\chi_{0\cdot005} = 12.2$.

إذن 99% حدود ثقة هى $100\sqrt{200}/15.9 = 88.9$ و $100\sqrt{200}/12.2 = 115.9$ ساعة على الترتيب .

أى أننا نكون واثقين بدرجة 99% من أن الانحراف المعيارى للمجتمع يقع بين 88.9 و 115.9 ساعة .

يجب مقارنة هذه النتيجة بالمسألة ٩–١٧ (أ) بالفصل التاسع .

١١–١٦ هل يمكن الحصول على 95% فترة ثقة للانحراف المعيارى للمجتمع بحيث يكون طولها أقل من تلك التى حصلنا عليها فى المسألة ١١–١٥ (أ)

الحـل :

حدود الثقة 95% للانحراف المعيارى للمجتمع بالمسألة ١١–١٥ (أ) حصلنا عليها باختيار قيم χ^2 الحرجة بحيث تكون المساحة فى كل طرف هى 2.5% . من الممكن الحصول على 95% حدود ثقة أخرى باختيار قيم χ^2 الحرجة بحيث تكون المساحات على الأطراف تساوى 5% أو 0.05 ، ولكن المساحة فى طرف لاتساوى المساحة فى الطرف الآخر .

الجدول ١١–١ يظهر عديد من القيم الحرجة (باستخدام طريقة المسألة ١١–١٤) و 95% فترات الثقة المقابلة .

جـدول ١١-١

الطول	فترة ثقة	القيم الحرجة
21·4	92·3 to 113·7	$\chi_{0\cdot01} = 12\cdot44, \chi_{0\cdot96} = 15\cdot32$
20·2	91·7 to 111·9	$\chi_{0\cdot02} = 12\cdot64, \chi_{0\cdot97} = 15\cdot42$
19·8	91·0 to 110·8	$\chi_{0\cdot03} = 12\cdot76, \chi_{0\cdot98} = 15\cdot54$
20·1	88·9 to 110·0	$\chi_{0\cdot04} = 12\cdot85, \chi_{0\cdot99} = 15\cdot73$

من هذا الجدول نجد أن هناك 95% فترة ثقة طولها 19.8 فقط وهى من 91.0 إلى 110.8 .
ويمكن الحصول على فترة ثقة طولها أقل عن طريق تكرار نفس أسلوب الحل ، باستخدام قيم حرجة مثل $\chi_{0\cdot031}$ و $\chi_{0\cdot981}$ و $\chi_{0\cdot032}$ و $\chi_{0\cdot982}$.

وهكذا . بشكل عام ، فإن النقص فى الفترة التى يمكن الحصول عليها بهذه الطريقة يكون فى العادة قيمة صغيرة يمكن إهمالها ولا يستحق المجهود المبذول فى الحصول عليها .

١١-١٧ فى فترات سابقة كان الانحراف المعيارى لأوزان عبوات زنة N 40.0 تملأ بواسطة آلة معينة هـو N 0.25 . سحبت عينة عشوائية من 20 عبوة فكان انحرافها المعيارى N 0.32 . هل هـذه الزيادة الظاهرة فى التشتت معنوية عند مستوى المعنوية (أ) 0.05 (ب) 0.01 .

الحـل :

يجب أن نقرر بين الفروض :

$H_0 : \sigma = 0.25$ ، والنتيجة المشاهدة ترجع إلى الصدفـة

$H_1 : \sigma > 0.25$ ، وهناك زيادة فى التشتت .

قيمـة χ^2 للعينة هى $\chi^2 = Ns^2/\sigma^2 = 20(0\cdot32)^2/(0\cdot25)^2 = 32\cdot8.$

(أ) باستخدام اختبار من طرف واحد ، فيجب أن نرفض H_0 عنـد مستوى المعنوية 0.05 إذا كانت قيمة χ^2 المحسوبة من العينة أكبر من $\chi^2_{0\cdot95}$ ، وهى تساوى 30.1 لدرجات حرية $\nu = 20 - 1 = 19$. بهذا يجب رفض H_0 عند مستوى معنوية 0.05 .

(ب) باستخدام اختبار من طرف واحد ، فيجب أن نرفض H_0 عند مستوى المعنوية 0.01 إذا كانت قيمة χ^2 المحسوبة من العينة أكبر من $\chi^2_{0\cdot99}$ ، وهى تساوى 36.2 لدرجات حرية 19 . بهذا لا يمكن رفض H_0 عند مستوى معنوية 0.01 .

من هذا نستنتج أن التشتت من المحتمل أن يكون قد زاد ويجب اختبار الآلة .

مسـائل اضـافية

توزيع كا ــ تربيع (كا٢) :

١١-١٨ لتوزيع استودينت بدرجات حرية 15 ، أوجــد قيم t_1 بحيث تكون :

(ا) المساحة إلى يمين t_1 هى 0.10

(ب) المساحة إلى يسار t_1 هى 0.95

(جـ) المساحة إلى يمين t_1 هى 0.01

(د) مجموعة المساحة إلى يمين t_1 وإلى يسار $-t_1$ هى 0.01

(هـ) المساحة بين $-t_1$ إلى t_1 هى 0.95 .

ج : (ا) 2.60 (ب) 1.75 (جـ) 1.34 (د) 2.95 (هـ) 2.13

١١-١٩ أوجــد القيم الحرجة لـ t والتى تجعل المساحة فى الطرف الأيمن لتوزيع t مساوية 0.01 . إذا كانت درجات الحرية v مساوية (ا) 4 (ب) 12 (جـ) 25 (د) 60 (هـ) 150 .

ج : (ا) 3.75 (ب) 2.68 (جـ) 2.48 (د) 2.39 (هـ) 2.33 .

١١-٢٠ أوجد قيم t_1 لتوزيع أستودينت والتى تحقق كل من الشروط التالية :

(ا) المساحة بين $-t_1$ و t_1 تساوى 0.9 و $v = 25$

(ب) المساحة إلى اليسار من $-t_1$ تساوى 0.025 و $v = 20$

(جـ) مجموع المساحة إلى اليمين من t_1 وإلى اليسار من $-t_1$ هى 0.01 و $v = 5$

(د) المساحة إلى يمين t_1 هى 0.55 و $v = 16$.

ج : (ا) 1.71 (ب) 2.09 (جـ) 4.03 (د) -0.128 .

١١-٢١ إذا كان المتغير U يتبع توزيع أستودينت حيث $v = 10$. أوجــد الثابت C بحيث تكون :

(ا) $\Pr\{U > C\} = 0.05$

(ب) $\Pr\{-C \leq U \leq C\} = 0.98$

(جـ) $\Pr\{U \leq C\} = 0.20$

(د) $\Pr\{U \geq C\} = 0.90$.

ج : (ا) 1.81 (ب) 2.76 (جـ) -8.79 (د) -1.37

١١–٢٢ إذا كان 99% معاملات الثقة (« من طرفين ») للتوزيع الطبيعي تعطى بالقيمة 2.58 ± .

ماهى العاملات المقابلة لتوزيع t إذا كانت :

(أ) $\nu = 4$ (ب) $\nu = 12$ (جـ) $\nu = 25$ (د) $\nu = 30$ (هـ) $\nu = 40$

ج : (أ) 4.60 ± (ب) 3.06 ± (جـ) 2.79 ± (د) 2.75 ± (هـ) 2.70 ± .

١١–٢٣ عينة من 12 قياس لقوة مقاومة خيوط النايلون للقطع أعطت متوسطا $7.38\ N$ وانحراف معيارى $1.24\ N$.

أوجـد (أ) 95% (ب) 99% حدود ثقة للقيمة الفعلية لقوة المقاومة للقطع .

ج : (أ) $7.38 \pm 0.82\ N$ (ب) $7.38 \pm 1.16\ N$

١١–٢٤ حل المسألة السابقة مفترضا أنه يمكن استخدام نظرية العينات الكبيرة وقارن بين النتائج التى حصلت عليها .

ج : (أ) $7.38 \pm 0.73\ N$ (ب) $7.38 \pm 0.96\ N$

١١–٢٥ خمسة قياسات لرد فعل شخصى لمنشط معين سجلت كالآتى 0.28, 0.30, 0.27, 0.33, 0.31 ثانية .

أوجد (أ) 95% (ب) 99% حدود ثقة لرد الفعل الحقيقى .

ج : (أ) 0.030 ± 0.298 ثانية (ب) 0.049 ± 0.298 ثانية .

١١–٢٦ كان متوسط العمر الإنتاجى للمبات اضاءة من إنتاج أحـد الشركات هو 1120 ساعة بانحراف معيارى 125 ساعة سحبت حديثا عينة من 8 لمبات إضاءة من إنتاج جديد فكان متوسط عمرها الإنتاجى 1070 ساعة . اختبر الفرض أن متوسط العمر الإنتاجى للمبات لم يتغير ، باستخدام مستوى المعنوية (أ) 0.05 (ب) 0.01

ج : باستخدام اختبار من طرفين نجد أنه لا يوجد دليل عند أى المستويين 0.05 أو 0.01 يشـير إلى أن متوسط الإنتاجى قد تغير .

١١–٢٧ فى المسألة السابقة اختبر الفرض $\mu = 1120$ ساعة ضد الفرض البديل $\mu < 1120$ ساعة ، باستخدام مستوى المعنوية (أ) 0.05 (ب) 0.01

ج : الاختبار من طرف واحد لا يشير إلى تناقص فى المتوسط عند أى المستويين 0.05 أو 0.01 .

١١–٢٨ مواصفات إنتاج سبيكة معدنية تتطلب أن يكون بها 23.2% نحاس . حللت عينة من 10 من المنتج أظهرت أن متوسط نسبة النحاس 23.5% وانحراف معيارى 0.24% .

هل يمكن أن نستنتج عند مستوى المعنوية :

(أ) 0.01 (ب) 0.05 بأن الإنتاج يطابق المواصفات ؟

ج : باستخدام اختبار من طرفين عند كلا المستويين نجد أن الانتاج لا يقابل المواصفات المطلوبة .

١١-٢٩ فى المسألة ١١-٢٨ اختبر صحة الفرض القائل أن متوسط محتويات النحاس أعلى مما هو مطلوب طبقا للمواصفات ، باستخدام مستوى المعنوية (أ) 0.01 (ب) 0.05

ج : باستخدام اختبار من طرف واحد عند كلا المستويين يظهر أن متوسط محتويات النحاس أعلى من المطلوب طبقا للمواصفات .

١١-٣٠ خبير فى الكفاية الإنتاجية يدعى ، أنه بادخال نوع جديد من النظام الآلى فى عمليات الإنتاج فإنه يمكن خفض الوقت المطلوب للإنتاج بصورة ملحوظة . ونظرا للتكاليف المتضمنة فى عملية صيانة الآلات ، فإن المدير يشعر بأنه ما لم ينخفض وقت الإنتاج بما لا يقل عن 8.0% فإنه لا يمكن الموافقة على إدخال العملية الجديدة . أظهرت نتائج ست تجارب بأن وقت الانتاج انخفض بنسبة 8.4% بانحراف معيارى 0.32% .
باستخدام مستوى المعنوية (أ) 0.01 (ب) 0.05
اختبر صحة الفرض القائل أن النظام الجديد يجب إدخاله .

ج : باستخدام اختبار من طرف واحد يظهر أن النظام الجديد يجب ألا يدخل إذا استخدم مستوى المعنوية 0.01 ، ولكن يجب إدخاله إذا كان مستوى المعنوية المستخدم 0.05 .

١١-٣١ باستخدام النوع A من البترول كان متوسط عدد الكيلومترات المقطوعة بواسطة 5 موتسيكلات متماثلة تحت ظروف متماثلة لكل لتر من البترول هو 22.6 بانحراف معيارى 0.48 . وباستخدام النوع B ، كان المتوسط هو 21.4 بانحراف معيارى 0.54 . باستخدام مستوى معنوية 0.05 ، اختبر ما إذا كان النوع A أفضل حقيقة من النوع B فيما يختص بعدد الكيلومترات المقطوعة .

ج : باستخدام اختبار من طرف واحد يظهر أن النوع A أفضل من النوع B عند مستوى المعنوية 0.05 .

١١-٣٢ اختبر نوعان من الكيماويات A و B لقياس درجة أكسدتها PH . أظهر تحليل ، عينات من A أن متوسط أكسدتها pH هو 7.52 بانحراف معيارى 0.024 . وأظهر تحليل 5 عينات من B متوسط أكسدتها pH هو 7.49 بانحراف معيارى 0.032 . باستخدام 0.05 مستوى معنوية ، حدد ما إذا كان هناك اختلاف بين نوعى المحلول فيما يختص بقيم pH .

ج : باستخدام اختبار من طرفين عند مستوى المعنوية 0.05 ، لا يمكن أن نستنتج على أساس هذه العينات من أن هناك اختلافاً فى درجة الأكسدة بين نوعى المحلول .

١١-٣٣ فى اختبار فى علم النفس ، كان متوسط درجات 12 طالبا فى فصل هو 78 والانحراف المعيارى 6 ، بينما كان درجات 15 طالبا فى فصل آخر هو 74 بانحراف معيارى 8 . باستخدام مستوى معنوية 0.05 ، حدد ما إذا كانت المجموعة الأولى أعلى مستوى من المجموعة الثانية .

ج : باستخدام اختبار من طرف واحد عند مستوى المعنوية 0.05 ، نستنتج أن المجموعة الأولى ليست أعلى مستوى من المجموعة الثانية .

توزيع كا ــ تربيع (كا٢) :

١١–٣٤ لتوزيع كا – تربيع بدرجات حرية 12 ، أوجد قيم χ_c^2 بحيث تكون :

(ا) المساحة إلى يمين χ_c^2 هى 0.05

(ب) المساحة إلى يسار χ_c^2 هى 0.99

(ج) المساحة إلى يمين χ_c^2 هى 0.025 .

ج : (ا) 21.0 (ب) 26.2 (ج) 23.3

١١–٣٥ أوجد القيم الحرجة لـ χ^2 والتى تكون المساحة فى الطرف الأيمن من توزيع χ^2 بالنسبة لها هى 0.05 ، إذا كانت درجات الحرية ν لها مساوية :

(ا) 8 (ب) 19 (ج) 28 (د) 40

ج : (ا) 15.5 (ب) 30.1 (ج) 41.3 (د) 55.8 .

١١–٣٦ حل المسألة ١١–٣٥ إذا كانت المساحة فى الطرف الأيمن هى 0.01

ج : (ا) 20.1 (ب) 36.2 (ج) 48.3 (د) 63.7

١١–٣٧ (ا) أوجد قيم χ_1^2 و χ_2^2 بحيث تكون المساحة تحت توزيع χ^2 المقابلة لـ $\nu = 20$ بين χ_1^2 و χ_2^2 هى 0.95 مفترضا تساوى المساحات إلى اليمين من χ_2^2 وإلى اليسار من χ_1^2 .

(ب) وضح أنه إذا لم يوضع فرض تساوى المساحات فى (ا) ، فإن قيم $\chi_1{}^2$ و χ_2^2 ليست وحيدة .

ج : (ا) 9.59 و 34.2

١١–٣٨ إذا كان المتغير U يتبع توزيع كا – تربيع بدرجات حرية $\nu = 7$ أوجد χ_1^2 و χ_2^2 بحيث :

(ا) $\Pr\{U > \chi_2^2\} = 0.025$

(ب) $\Pr\{U < \chi^2\} = 0.50$

(ج) $\Pr\{\chi_1^2 \le U \le \chi_2^2\} = 0.90$.

ج : (ا) 16.0 (ب) 6.35 (ج) مفترضا تساوى المساحات على الطرفين فإن

$\chi_2^2 = 14.1$ و $\chi_1^2 = 2.17$

١١–٣٩ الانحراف المعيارى للعمر الانتاجى لـ 10 لمبات إضاءة من إنتاج إحدى الشركات هــو 120 ساعة . أوجد (ا) 95% (ب) 99% حدود ثقة للانحراف المعيارى لجميع اللمبات من إنتاج الشركة .

ج : (ا) 87.0 إلى 230.9 (ب) 78.1 إلى 288.5 ساعة .

١١–٤٠ حل المسألة السابقة إذا كان الانحراف المعيارى لـ 25 من لمبات الإضاءة هو 120 ساعة .

ج : (ا) 95.6 إلى 170.4 (ب) 88.9 إلى 190.8 ساعة .

١١–٤١ أوجد (ا) $\chi^2_{0.05}$ (ب) $\chi^2_{0.95}$ لقيمة $v = 150$.

ج : (ا) 122.5 (ب) 179.2

١١–٤٢ أوجد (ا) $\chi^2_{0.025}$ (ب) $\chi^2_{0.975}$ لقيمة $v = 250$.

ج : (ا) 207.7 (ب) 295.2

١١–٤٣ وضح أنه لقيم v الكبيرة فإنه يمكن تقريب χ^2 تقريب جيد بالصيغة $(v + z_p\sqrt{2v})$ ، حيث z_p هى المئين ذى الرتبة P للتوزيع الطبيعى المعيارى .

١١–٤٤ حل المسألة ١١–٣٩ باستخدام توزيع χ^2 إذا كان الانحراف المعيارى لعينة حجمها 100 لمبة كهربائية هو 120 ساعة . قارن النتائج بتلك التى حصلت عليها بطرق الفصل التاسع .

ج : (ا) من 106.1 إلى 140.1 (ب) من 102.1 إلى 148.1 ساعة .

١١–٤٥ ما هى 95% حدود ثقة للمسألة ١١–٤٤ والتى لها أقل طول ؟

ج : من 105.5 إلى 139.6 ساعة .

١١–٤٦ الانحراف المعيارى لقوة المقاومة للكسر لكابلات من إنتاج شركة معينة هو 240 kN . بعد إدخال تعديلات على عملية تصنيع الكابلات ، أظهرت عينة من 8 كابلات أن الانحراف المعيارى لقوة مقاومتها للكسر هو 300 kN أدرس معنوية الزيادة الظاهرة فى التشتت ، باستخدام مستوى معنوية (ا) 0.05 (ب) 0.01

ج : على أساس بيانات العينة المعطاة فإن الزيادة الظاهرة فى التشتت ليست معنوية عند أى من المستويين .

١١–٤٧ الانحراف المعيارى لدرجات الحرارة السنوية فى مدينة خلال مدة 100 سنة هى 8° درجات مئوية . باستخدام متوسط درجة الحرارة فى خمسة عشر يوما خلال الخمس عشرة سنة الأخيرة ، وجد أن الانحراف المعيارى لدرجات الحرارة السنوية هو 5° درجات مئوية . اختبر صحة الفرض القائل أن درجات الحرارة فى المدينة أصبحت أقل تغيرا عنها عن الماضى ، باستخدام مستوى المعنوية (ا) 0.05 (ب) 0.01 .

ج : الانخفاض الظاهر معنوى عند المستوى 0.05 ولكن غير معنوى عند 0.01 .

الفصل الثانى عشر

اختبار كا – تربيع (كا^2)

التكرارات المشاهدة والنظرية

كما سبق أن شاهدنا أنه فى عديد من المرات ، لاتتفق النتائج التى نحصل عليها من العينات فى جميع الحالات مع النتائج المتوقعة طبقاً لقواعد الاحتمالات . على سبيل المثال ، فعلى الرغم من أن الاعتبارات النظرية تؤدى بنا إلى توقع 50 صورة و 50 كتابة فى رمية عملة غير متحيزة 100 مرة ، فمن النادر أن نحصل على هذه النتيجة بالضبط .

افترض أنه فى عينة معينة لوحظ أن مجموعة من الأحداث الممكنة $E_1, E_2, E_3, \ldots, E_k$ (أنظر الجدول ١٢ – ١) تحدث بتكرارات $o_1, o_2, o_3, \ldots, o_k$ تسمى بالتكرارات المشاهدة ، وأنه طبقاً لقواعد الاحتمالات فإنه يتوقع أن تحدث بتكرارات $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_k$ تسمى بالتكرارات المتوقعة أو التكرارات المشاهدة .

جدول ١٢ – ١

الحدث	E_1	E_2	E_3	...	E_k
التكرار المشاهد	o_1	o_2	o_3	...	o_k
التكرار المتوقع	e_1	e_2	e_3	...	e_k

غالباً مانريد معرفة ما إذا كانت التكرارات المشاهدة تختلف معنوياً عن التكرارات المتوقعة . فى الحالة عندما يكون هناك حدثين فقط E_1 ، E_2 من الممكن حدوثهم (تسمى أحياناً بالتقسيم الثنائى) ، على سبيل المثال كما فى حالة ، الصورة والكتابة ، مسامير تالفة أو غير تالفة وما إلى ذلك ، فإن المشكلة يمكن حلها بصورة مرضية بالطرق التى درست فى الفصول السابقة . فى هذا الفصل سوف ندرس المشكلة بصورة عامة .

تعريف :

تعطى إحصائية χ^2 (تقرأ كا – تربيع) مقياساً لمدى التفاوت الموجود بين التكرارات المتوقعة والتكرارات المشاهدة وتعرف كالآتى :

$$\chi^2 = \frac{(o_1 - e_1)^2}{e_1} + \frac{(o_2 - e_2)^2}{e_2} + \ldots + \frac{(o_k - e_k)^2}{e_k} = \sum_{j=1}^{k} \frac{(o_j - e_j)^2}{e_j} \qquad (١)$$

إذا كان مجموع التكرارات N فإن ،

$$\Sigma o_j = \Sigma e_j = N \qquad (٢)$$

تعبير مكافىء للتعبير (١) هو (أنظر المسألة ١٢ – ١١)

$$\chi^2 = \Sigma \frac{o_j^2}{e_j} - N \qquad (٣)$$

إذا كانت $\chi^2 = 0$ ، فإن التكرار المتوقع والتكرار المشاهد يتفقان معاً بالضبط ، بينما إذا كانت $\chi^2 > 0$ ، فإنهم لايتفقان معاً بالضبط . وكلما زادت قيمة χ^2 كلما زاد التفاوت بين التكرارات المتوقعة .

توزيع المعاينة لـ χ^2 يمكن تقريبه بشكل كبير بتوزيع كا – تربيع

$$Y = Y_0(\chi^2)^{\frac{1}{2}(\nu-2)} e^{-\frac{1}{2}\chi^2} = Y_0 \chi^{\nu-2} e^{-\frac{1}{2}\chi^2} \qquad (٤)$$

(سبق دراسته فى الفصل الحادى عشر) إذا كانت التكرارات المتوقعة تساوى 5 على الأقل ويتحسن التقريب للقيم الأكبر وتعطى درجات الحرية كالآتى :

(أ) $\nu = k - 1$ إذا أمكن حساب التكرار المتوقع بدون الحاجة لتقدير معالم المجتمع من إحصائيات العينة . لاحظ أننا طرحنا 1 من k نظراً للقيد الموضوع على المعادلة (٢) والذى ينص على أنه فى حالة معرفة $k - 1$ من التكرارات المتوقعة فإن التكرار الباقى يمكن تحديده .

(ب) $\nu = k - 1 - m$ إذا كانت التكرارات المتوقعة يمكن حسابها فقط فى حالة تقدير m من معالم المجتمع من إحصائيات العينة .

اختبارات المعنوية :

من الناحية العملية ، تحسب التكرارات المتوقعة على أساس الفرض H_0 . فإذا كانت قيمة χ^2 المحسوبة تحت هذا الفرض بالصيغة (١) أو (٣) أكبر من بعض القيم الحرجة (مثل $\chi^2_{0.95}$ أو $\chi^2_{0.99}$ ، وهى القيم الحرجة عند مستوى المعنوية 0.05 و 0.01 على الترتيب) ، فإننا نستنتج أن التكرارات المشاهدة تختلف معنوياً عن التكرارات المتوقعة ومن ثم نرفض H_0 عند مستوى المعنوية المقابل . وغير ذلك نقبل الفرض أو على الأقل لانرفض . وهذا الأسلوب يسمى اختبار كا – تربيع للفرض أو اختبار كا – تربيع للمعنوية .

ويجب ملاحظة أنه يجب أن ننظر بشك نحو الظروف التى تكون فيها χ^2 قريبة من الصفر حيث أنه من النادر أن تتفق التكرارات المشاهدة بدرجة جيدة جداً مع التكرارات المتوقعة . لاختبار مثل هذه الأحوال ، يمكن أن نقرر ما إذا كانت القيم المحسوبة لـ X^2 أقل من $\chi^2_{0.05}$ أو $\chi^2_{0.01}$ ، فى مثل هذه الحالات فيمكن أن نقرر بأن الاتفاق جيد عند مستوى المئوية 0.05 أو 0.01 على الترتيب .

اختبار كا٢ لجودة التوفيق :

يمكن استخدام اختبار كا٢ لتحديد مدى جودة توفيق توزيعات نظرية ، مثل التوزيع الطبيعى، ذى الحدين ، وغيرها لتوزيعات اعتبارية ، أى تلك التى نحصل عليها من بيانات العينة . (أنظر المسائل ١٢ – ١٢ و ١٢ – ١٣) .

جداول الاقتران :

الجدول ١٢ – ١ أعلاه ، حيث تشغل التكرارات المشاهدة صف واحد ، يسمى جدول تصنيف فى اتجاه واحد . وحيث أن عدد الأعمدة k ، يسمى أيضاً جدول $1 \times k$ (يقرأ 1 فى k) بتعميم هذه الفكرة نصل إلى جداول تصنيف فى اتجاهين أو جداول $h \times k$ حيث تشغل التكرارات المشاهدة h صف و k عمود مثل هذه الجداول تسمى أيضاً بجداول الاقتران .

ويقابل كل تكرار مشاهد فى جدول الاقتران $h \times k$ ، تكرار متوقع أو نظرى والذى تم حسابه طبقاً لبعض الفروض حسب قواعد الاحتمالات . هذه التكرارات التى تشغل خلايا جدول الاقتران تسمى تكرارات الخلايا . التكرار الكلى فى كل صف أو فى كل عمود يسمى بالتكرار الهامشى .

لنتحقق من الاتفاق بين التكرارات المشاهدة والتكرارات المتوقعة ، نحسب الاحصائية

$$\chi^2 = \sum_j \frac{(o_j - e_j)^2}{e_j} \qquad (٥)$$

حيث يتم التجميع على جميع الخلايا بجدول الاقتران ، الرموز o_j و e_j تمثل التكرارات المشاهدة والتكرارات المتوقعة على الترتيب فى الخلية j . وهذا المجموع والذى يناظر المعادلة (١) يحتوى على hk حد . مجموع جميع التكرارات المشاهدة يساوى N وهو يساوى مجموع التكرارات المتوقعة (قارن بالمعادلة (٢)) .

كاسبق ، فإن الاحصائية (٥) لها توزيع معاينة قريب جداً من التوزيع المعطى بالمعادلة (٤) ، بشرط أن تكون التكرارات المتوقعة ليست صغيرة جداً . وتعطى درجات الحرية v لتوزيع كا – تربيع لقيم $h > 1$ ، $k > 1$ كالآتى :

(أ) $v = (h-1)(k-1)$ إذا كانت التكرارات المتوقعة يمكن حسابها بدون تقدير معالم المجتمع من إحصائيات العينة . لإثبات ذلك أنظر المسألة ١٢ – ١٨ .

(ب) $v = (h-1)(k-1) - m$ إذا كانت التكرارات المتوقعة يمكن حسابها فقط بتقدير m من معالم المجتمع من إحصائيات العينة .

اختبارات الفروض لجداول $h \times k$ مماثلة لتلك فى جداول $1 \times k$. يمكن الحصول على التكرارات المتوقعة تحت فرض معين H_0 . ومن المعتاد أن نفترض أن التصنيفين مستقلين عن بعضهما .

ويمكن أن تعمم جداول الاقتران لتشمل أبعاداً أكبر . فعلى سبيل المثال ، يمكن أن يكون لدينا جداول $h \times k \times l$ عندما نأخذ فى الاعتبار 3 تصنيفات .

تصحيح بيتس للمتغير المتصل :

عندما نستخدم نتائج لتوزيع متصل فى حالة البيانات المتقطعة ، فإننا نستخدم تصحيحات للاتصال كما سبق أن شاهدنا فى الفصول السابقة . ومن المتاح أيضاً معامل تصحيح عندما نستخدم توزيع كا – تربيع . ويتضمن التصحيح إعادة كتابة (١) كالآتى :

$$\chi^2 \text{ (مصحح)} = \frac{(|o_1 - e_1| - 0.5)^2}{e_1} + \frac{(|o_2 - e_2| - 0.5)^2}{e_2} + \ldots + \frac{(|o_k - e_k| - 0.5)^2}{e_k} \quad (٦)$$

ويشار إليها بتصحيح بيتس . وهناك تعديل مناظر للمعادلة (٥) .

بشكل عام فإن معامل التصحيح يستخدم إذا كان عدد درجات الحرية يساوى 1 = v . للعينات ذات الحجم الكبير فإننا نحصل من الناحية العملية على نتيجة مماثلة لقيم χ^2 الغير مصححة ، ولكن تنشأ الصعوبات بالقرب من القيم الحرجة (أنظر المسألة ١٢ – ٨) . قد يكون من الأفضل فى حالة العينات الصغيرة حيث تقع كل من التكرارات المتوقعة بين 5 و 10 ، أن تقارن بين قيم χ^2 المصححة وغير المصححة . فإذا كانت القيمتان تؤديان إلى نفس الاستنتاج فيما يتعلق بالفرض ، مثل الفرض عند مستوى 0.05 ، فإنه من النادر أن نصادف أية صعوبة . أما إذا أدوا إلى نتائج مختلفة فإنه يمكن اللجوء إلى زيادة حجم العينة أو إذا كان ذلك غير عملى ، فيمكن استخدام الطرق المضبوطة للاحتمالات والمتضمنة استخدام توزيع كثيرات الحدود والمشار إليه ، فى الفصل السادس .

صيغة مبسطة لحساب χ^2 :

يمكن استنتاج صيغ مبسطة لحساب χ^2 حيث تتضمن استخدام التكرارات المشاهدة فقط . ونعطى فيما يلى النتائج لجداول الاقتران 2×2 و 2×3

جداول 2×2 .

$$\chi^2 = \frac{N(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2}{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)(a_1 + a_2)(b_1 + b_2)} = \frac{N\Delta^2}{N_1 N_2 N_A N_B} \quad (٧)$$

حيث

$$\Delta = a_1 b_2 - a_2 b_1,\ N = a_1 + a_2 + b_1 + b_2,\ N_1 = a_1 + b_1,\ N_2 = a_2 + b_2,\ N_A = a_1 + a_2,\ N_B = b_1 + b_2.$$

أنظر المسألة ١٢ – ١٩

باستخدام تصحيح ييتس تصبح

	I	II	Totals
A	a_1	a_2	N_A
B	b_1	b_2	N_B
Totals	N_1	N_2	N

$$\chi^2 \text{ (مصحح) } = \frac{N(|a_1b_2 - a_2b_1| - \frac{1}{2}N)^2}{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)(a_1 + a_2)(b_1 + b_2)}$$

$$= \frac{N(|\Delta| - \frac{1}{2}N)^2}{N_1N_2N_AN_B} \qquad (٨)$$

جداول 2×3

	I	II	III	Totals
A	a_1	a_2	a_3	N_A
B	b_1	b_2	b_3	N_B
Totals	N_1	N_2	N_3	N

$$\chi^2 = \frac{N}{N_A}\left[\frac{a_1^2}{N_1} + \frac{a_2^2}{N_2} + \frac{a_3^2}{N_3}\right] + \frac{N}{N_B}\left[\frac{b_1^2}{N_1} + \frac{b_2^2}{N_2} + \frac{b_3^2}{N_3}\right] - N \qquad (٩)$$

حيث استخدمنا النتيجة العامة والتى تصلح لجميع جداول الاقتران

$$\chi^2 = \Sigma\frac{o_j^2}{e_j} - N \qquad (١٠)$$

أنظر المسألة ١٢ – ٤٣ النتيجة (٩) لجداول $2 \times k$ حيث $k > 3$ ، يمكن تعميمها (أنظر المسألة ١٢ – ٤٦) .

معامل الاقتران :

لقياس درجة العلاقة ، التوافق أو الاعتماد بين التقسيمات فى جداول الاقتران نستخدم المعامل

$$C = \sqrt{\frac{\chi^2}{\chi^2 + N}} \qquad (١١)$$

ويسمى معامل الاقتران . وكلما زادت قيمة C ، تزيد درجة التوافق . ويحدد عدد الصفوف والأعمدة فى جدول الاقتران أكبر قيمة يمكن أن تأخذها C ، حيث لا يمكن أن تزيد عن الواحد . فإذا كان عدد الصفوف والأعمدة فى جدول اقتران يساوى k ، فإن النهاية العظمى لـ C هى $\sqrt{(k-1)/k}$.

(أنظر المسائل ١٢ – ١٢ ، ١٢ – ٥٢ ، ١٢ – ٥٣) .

ارتباط الصفات :

نظراً لأن التصنيف فى جداول الاقتران تصف غالباً مميزات أشخاص أو أشياء، فإننا نشير إليها صفات، وتسمى درجة الاعتماد أو التلازم أو العلاقة ، بارتباط الصفات . لجداول $k \times k$ نعرف

$$r = \sqrt{\frac{\chi^2}{N(k-1)}} \qquad (١٢)$$

كعامل الارتباط بين الصفات أو التصنيفات . ويقع هذا المعامل بين صفر وواحد (أنظر المسألة ١٢ - ٢٤) . لجداول $k \times k$ حيث $k=2$ يسمى هذا الارتباط بمعامل الارتباط الرباعى .

سوف ندرس المشكلة العامة للارتباط بين المتغيرات الرقية فى الفصل الرابع عشر .

خاصية الانجماع فى χ^2 :

افترض أن نتائج تكرار تجربة تعطى قيم χ^2 المحسوبة من العينة كالآتى $\chi_1^2, \chi_2^2, \chi_3^2, \ldots$ بدرجات حرية $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots$ على الترتيب . بهذا فإن نتيجة كل هذه التجارب تمكن اعتبارها مكافأة لقيمة χ^2 المعطاة بـ $\chi_1^2 + \chi_2^2 + \chi_3^2 + \ldots$ بدرجات حرية $\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \ldots$ أنظر المسألة ١٢ - ٢٥

مسائل محلولة

اختبار كا ـــ تربيع (كا٢) :

١٢ - ١ فى 200 رمية لعملة ، ظهرت 115 صورة و 85 كتابة . اختبر الفرض القائل أن العملة غير متحيزة باستخدام مستوى المعنوية (أ) 0.05 (ب) 0.01 .

الحــــل :

التكرارات المشاهدة للصورة والكتابة هى على الترتيب $o_1 = 115$ و $o_2 = 85$,

التكرارات المتوقعة للصورة والكتابة إذا كانت العملة غير متحيزة هى $e_1 = 100, e_2 = 100$ على الترتيب اذن

$$\chi^2 = \frac{(o_1 - e_1)^2}{e_1} + \frac{(o_2 - e_2)^2}{e_2} = \frac{(115 - 100)^2}{100} + \frac{(85 - 100)^2}{100} = 4.50$$

بما أن عدد الطبقات أو التقسيمات (الصور ، الكتابة) هى $k = 2$ و $\nu = k - 1 = 2 - 1 = 1$.

(أ) بما أن القيمة الحرجة $\chi^2_{0.95}$ لدرجة حرية واحدة تساوى 3.84 وأن $4.50 > 3.84$ فإننا نرفض الفرض القائل أن العملة غير متحيزة عند مستوى المعنوية 0.05 .

(ب) القيمة الحرجة $\chi^2_{0.99}$ لدرجة حرية واحدة تساوى 6.63 . وبما أن 4.50 > 6.63 ، فلا يمكن رفض الفرض القائل أن العملة غير متحيزة عند مستوى المعنوية 0.01 .

نستنتج من ذلك أن النتائج المشاهدة هى محتملة المعنوية وأن العملة من المحتمل أن تكون متحيزة .
للمقارنة بين هذه الطريقة والطرق سابق استخدامها ، أنظر المسألة ١٢ – ٣ .

١٢ – ٢ حل المسألة ١٢ – ١ باستخدام تصحيح ييتس .

الحـــل

$$\frac{(|o_1 - e_1| - 0.5)^2}{e_1} + \frac{(|o_2 - e_2| - 0.5)^2}{e_2} = \frac{(|115 - 100| - 0.5)^2}{100} + \frac{(|85 - 100| - 0.5)^2}{100}$$

$$= \frac{(14.5)^2}{100} + \frac{(14.5)^2}{100} = 4.205.$$

بما أن 3.84 < 4.205 و 6.63 > 4.205 ، فإن الاستنتاج الذى وصلنا إليه فى المسألة ١٢ – ١ مازال صحيحاً .

للمقارنة بالطرق السابقة ، أنظر المسألة ١٢ – ٣ .

١٢ – ٣ حل المسألة ١٢ – ١ باستخدام التوزيع الطبيعى كتقريب لتوزيع ذى الحدين .

الحـــل :

تحت الفرض القائل أن العملة غير متحيزة ، فإن المتوسط والانحراف المعيارى لعدد الصور المتوقعة فى 200 رمية لعملة هى $\mu = Np = (200)(0.5) = 100$ and $\sigma = \sqrt{Npq} = \sqrt{(200)(0.5)(0.5)} = 7.07$ على الترتيب .

الطريقة الأولى :

115 صورة معبراً عنها بوحدات معيارية $= (115 - 100)/7.07 = 2.12$

باستخدام مستوى معنوية 0.05 واختبار من طرفين ، فإنه يجب رفض الفرض القائل أن العملة غير متحيزة إذا كانت قيم z تقع خارج الفترة من 1.96 — إلى 1.96 . وبمستوى ثقة 0.01 فإن الفترة المقابلة هى من 2.58 — إلى 2.58 . ينتج عن ذلك كما فى المسألة ١٢ – ١ أنه يمكن رفض الفرض عند المستوى 0.05 ولكن ليس عند المستوى 0.01 .

لاحظ أن مربع القيم المعيارية أعلاه $(2.12)^2 = 4.50$ ، مثل قيمة χ^2 التى حصلنا عليها فى المسألة ١٢ – ١ . وهذا دائماً الحال لاختبار كا٢ فى حالة التقسيم الثنائى . أنظر المسألة ١٢ – ١٠ .

الطريقة الثانية :

باستخدام التصحيح للمتغير المتصل ، 115 صورة أو أكثر تكافىء 114.5 صورة أو أكثر . إذن 114.5 معبراً عنها بوحدات معيارية = $(114.5 - 100)/7.07 = 2.05$ وهذا يؤدى إلى نفس الاستنتاج كما فى الطريقة الأولى .

لاحظ أن مربع هذه القيمة المعيارية $(2.05)^2 = 4.20$ ، يتفق مع قيمة χ^2 المصححة للمتغير المتصل باستخدام تصحيح ييتس بالمسألة ١٢ – ٢ . وهذا دائماً الحال لاختبار كا٢ فى حالة التقسيم الثنائى عند استخدام تصحيح ييتس .

١٢ – ٤ الجدول ١٢ – ٢ يوضح التكرارات المشاهدة والمتوقعة فى رمية زهرة طاولة 120 مرة . اختبر الفرض القائل أن الزهرة غير متحيزة ، باستخدام مستوى معنوية 0.05 .

جدول ١٢ – ٢

الوجـــه	1	2	3	4	5	6
التكرار المشاهد	25	17	15	23	24	16
التكرار المتوقع	20	20	20	20	20	20

الحـــل :

$$\chi^2 = \frac{(o_1 - e_1)^2}{e_1} + \frac{(o_2 - e_2)^2}{e_2} + \frac{(o_3 - e_3)^2}{e_3} + \frac{(o_4 - e_4)^2}{e_4} + \frac{(o_5 - e_5)^2}{e_5} + \frac{(o_6 - e_6)^2}{e_6}$$

$$= \frac{(25 - 20)^2}{20} + \frac{(17 - 20)^2}{20} + \frac{(15 - 20)^2}{20} + \frac{(23 - 20)^2}{20} + \frac{(24 - 20)^2}{20} + \frac{(16 - 20)^2}{20} = 5.00$$

بما أن عدد الأقسام أو التصنيفات (الأوجه 6 ,5 ,4 ,3 ,2 ,1) هى $k = 6$ فإن $v = k - 1 = 6 - 1 = 5$:
القيمة الحرجة $\chi^2_{0.95}$ بدرجات حرية 5 هى 11.1 . وبما أن $11.1 > 5.00$ ، فلا يمكن رفض الفرض القائل أن الزهرة غير متحيزة .

لدرجات حرية 5 ، فإن $\chi^2_{0.05} = 1.15$ ، بحيث $\chi^2 = 5.00 > 1.15$ ينتج عن ذلك أن الاتفاق ليس جيداً بدرجة استثنائية ، مما يجعلنا ننظر إليه بشك .

١٢ – ٥ فى جدول للأرقام العشوائية به 250 رقم أظهر التوزيع التالى للأرقام $0, 1, 2, \ldots, 9$. هل التوزيع المشاهد يختلف بشكل معنوى عن التوزيع المتوقع ؟

الرقم	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
التكرار المشاهد	17	31	29	18	14	20	35	30	20	36
التكرار المتوقع	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25

الحــل :

$$\chi^2 = \frac{(17-25)^2}{25} + \frac{(31-25)^2}{25} + \frac{(29-25)^2}{25} + \frac{(18-25)^2}{25} + \ldots + \frac{(36-25)^2}{25} = 23.3$$

القيمة الحرجة $\chi^2_{0.99}$ لدرجات حرية $v = k - 1 = 9$ تساوى 21.7 وحيث أن $21.7 < 23.3$ لذلك نستنتج أن التوزيع المشاهد يختلف معنوياً عن التوزيع المتوقع عند مستوى المعنوية 0.01 . وينتج عن ذلك أن هناك بعض الشك حول جدول الأرقام العشوائية .

١٢ – ٦ فى تجارب مندل على البسلة لاحظ أن 315 مستديرة ولونها أصفر ، 108 مستديرة ولونها أخضر ، 101 مجعدة ولونها أصفر و 32 مجعده ولونها أخضر . طبقاً لنظريته فى الوراثة فإن الأعداد يجب أن تكون حسب النسب 1 : 3 : 3 : 9 . هل هناك أى دليل للتشكك فى نظريته . عند مستوى المعنوية (أ) 0.01 (ب) 0.05 ؟

الحــل :

العدد الكلى للبسلة $= 556 = 32 + 101 + 108 + 315$ بما أن الأعداد المتوقعة هى حسب النسب 1 : 3 : 3 : 9 ($9 + 3 + 3 + 1 = 16$) فإننا نتوقع

مستديرة ولونها أصفر $= 312.75 = {}^{9}/_{16}(556)$

مجعدة ولونها أصفر $= 104.25 = {}^{3}/_{16}(556)$

مستديرة ولونها أخضر $= 104.25 = {}^{3}/_{16}(556)$

مجعدة ولونها أخضر $= 34.75 = {}^{1}/_{16}(556)$

إذن

$$\chi^2 = \frac{(315-312.75)^2}{312.75} + \frac{(108-104.25)^2}{104.25} + \frac{(101-104.25)^2}{104.25} + \frac{(32-34.75)^2}{34.75} = 0.470$$

بما أن هناك أربعة تقسيمات ، $k = 4$ فإن عدد درجات الحرية $v = 4 - 1 = 3$.

(أ) لـ $v = 3$ فإن $\chi^2_{0.99} = 11.3$ بحيث لا يمكننا رفض النظرية عند المستوى 0.01 .

(ب) لـ $\nu = 3$ فإن $\chi^2_{0.95} = 7.81$ بحيث لا يمكننا رفض النظرية عند المستوى 0.05 .

نستنتج من ذلك أن هناك تطابق بين النظرية والتجربة .

لاحظ أنه لدرجات حرية 3 ، $\chi^2_{0.05} = 0.352$ و $\chi^2 = 0.470 > 0.352$ هذا على الرغم من أن الاتفاق جيد ، فإن النتيجة التى حصلنا عليها معرضة لدرجة معقولة لأخطاء المعاينة .

١٢ –٧ وعاء يحتوى على عدد كبير من الكرات لها أربعة ألوان مختلفة : أحمر ، برتقالى ، أصفر ، وأخضر . عينة من 12 كرة سحبت عشوائياً من الوعاء وأظهرت 2 أحمر ، 5 برتقالى ، 4 أصفر ، 1 أخضر . اختبر الفرض القائل أن الوعاء يحتوى على نسب متساوية من الكرات ذات الألوان المختلفة .

الحـــل :

تحت الفرض القائل أن الوعاء يحتوى على نسب متساوية من الكرات مختلفة الألوان ، فإننا نتوقع 3 من كل نوع فى عينة من 12 كرة .

بما أن العدد المتوقع أقل من 5 ، فإن تقريب كا – تربيع معرض لخطأ . ولتلافى ذلك ، فإننا نضم الخلايا بحيث يكون العدد المتوقع فى كل خلية 5 على الأقل .

إذا كنا نريد رفض الفرض ، فإننا نضم الخلايا بطريقة تجعل الدليل ضد الفرض يظهر بصورة أحسن مايمكن. ويمكن تحقيق ذلك فى حالتنا هذه باعتبار الخلية « أحمر أو أخضر » و « برتقالى أو أصفر » ، والتى تظهر 3 و 9 كرات على الترتيب . وبما أن العدد المتوقع فى كل خلية تحت فرض تساوى النسب هو 6 فإن :

$$\chi^2 = \frac{(3-6)^2}{6} + \frac{(9-6)^2}{6} = 3$$

لقيمة $\nu = 2 - 1 = 1$ ، فإن $\chi^2_{0.95} = 3.84$. بهذا لا يمكن رفض الفرض عند مستوى المعنوية 0.05 (على الرغم من أنه يمكن رفضه عند المستوى 0.01) . ومن الممكن تصور أن النتائج المشاهدة يمكن أن تنشىء لمجرد الصدفة على الرغم من أن تساوى نسب الألوان قد يكون موجوداً .

طريقة أخرى : باستخدام تصحيح ييتس ، نجد أن

$$\chi^2 = \frac{(|3-6|-0.5)^2}{6} + \frac{(|9-6|-0.5)^2}{6} = \frac{(2.5)^2}{6} + \frac{(2.5)^2}{6} = 2.1$$

وهذه تؤدى إلى نفس الاستنتاج أعلاه . وهذا متوقع بالطبع لأن تصحيح ييتس يؤدى دائماً إلى التقليل من قيمة χ^2 ويجب أن نلاحظ أنه إذا استخدمنا تقريب χ^2 على الرغم من حقيقة أن التكرارات صغيرة ، فإننا سوف نحصل على

$$\chi^2 = \frac{(2-3)^2}{3} + \frac{(5-3)^2}{3} + \frac{(4-3)^2}{3} + \frac{(1-3)^2}{3} = 3.33$$

١٣ - ٧ أوجد معادلة الخط الذى ميله هو -4 والجزء المقطوع من محور Y هو 16.

الحـــل :

فى المعادلة $Y = a_0 + a_1 X$ ، $a_0 = 16$ هو الجزء المقطوع من محور Y و $a_1 = -4$ هو الميل .

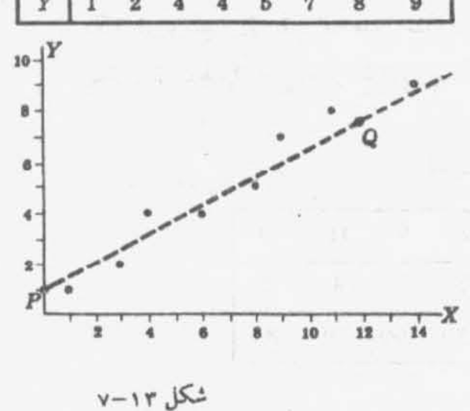
إذن المعادلة المطلوبة هى $Y = 16 - 4X$

١٣ - ٨ (أ) كون خطاً مستقيماً يقرب البيانات بالجدول ١٣-٢ .

(ب) أوجد معادلة هذا الخط .

جدول ١٣ - ٢

X	1	3	4	6	8	9	11	14
Y	1	2	4	4	5	7	8	9



شكل ١٣-٧

الحـــل :

(أ) وقع النقط $(1, 1), (3, 2), (4, 4), (6, 4), (8, 5), (9, 7), (11, 8), (14, 9)$ على نظام الأحداثيات المتعامدة كما فى الشكل ١٣-٧

الخط المستقيم الذى يقرب البيانات يتم رسمه بالتمهيد باليد فى الشكل . كطريقة لحذف عامل الحكم الشخصى ، أنظر : المسألة ١٣-١١ والتى تستخدم طريقة المربعات الصغرى .

(ب) لحصول على معادلة الخط الذى رسمه فى (أ) ، اختر أى نقطتين على الخط مثل Q ، P على سبيل المثال . أحداثيات هذه النقط كما يمكن قراءتها من الرسم هى بالتقريب $(12, 7.5)$ ، $(0, 1)$

وتكون معادلة الخط هى $Y = a_0 + a_1X$. باستخدام النقط $(12, 7.5)$ ، $(0, 1)$ نحصل على الترتيب على

$$1 = a_0 + a_1(0) \quad (١)$$

$$7.5 = a_0 + 12a_1 \quad (٢)$$

من (١) $a_0 = 1$ ، إذن من (٢) $a_1 = 6.5/12 = 0.542$.

وبهذا فإن المعادلة المطلوبة هى $Y = 1 + 0.542X$.

طريقة اخرى :

$$Y - Y_1 = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}(X - X_1),\quad Y - 1 = \frac{7{\cdot}5 - 1}{12 - 0}(X - 0),\quad Y - 1 = 0{\cdot}542X$$ أو $$Y = 1 + 0{\cdot}542X$$

١٣ - ٩ (أ) قارن قيم Y التي تحصل عليها من الخط التقريبي مع تلك الموجودة في الجدول ١٣ - ٢ بالمسألة ١٣ - ٨

(ب) ما هي قيمة Y المقدرة عند $X = 10$ ؟

الحـــل :

(أ) إذا كانت $X = 1$ فإن $Y = 1 + 0{\cdot}542(1) = 1{\cdot}542$ أو $1{\cdot}5$. إذا كانت $X = 3$ فإن $Y = 1 + 0{\cdot}542(3) = 2{\cdot}626$ أو $2{\cdot}6$. وبنفس الصورة ، يمكن الحصول على قيم Y المقابلة لقيم X الأخرى ونشير إلى قيم Y هذه المقدرة من المعادلة $Y = 1 + 0.54X$ بالرمز Y_{est} . هذه القيم مشار إليها بالجدول ١٣ - ٣ مع القيم الفعلية للبيانات في الجدول ١٣ - ٢ .

الجدول ١٣ - ٣

X	1	3	4	6	8	9	11	14
Y	1	2	4	4	5	7	8	9
Y_{est}	1·5	2·6	3·2	4·3	5·3	5·9	7·0	8·6

(ب) قيمة Y المقدرة عند $X = 10$ هي $Y = 1 + 0{\cdot}542(10) = 6{\cdot}42$ أو $6{\cdot}4$

١٣-١٠ الجدول ١٣ - ٤ يوضح القوة إلى أقرب كيلو وات والسرعة القصوى إلى أقرب km/h لعينة من 12 سيارة سباق مأخوذة بصورة عشوائية من توكيل سيارات

(أ) ارسم شكل الانتشار لهذه البيانات .

(ب) ارسم الخط الذي يقرب هذه البيانات .

(جـ) أوجد معادلة الخط المرسوم في (ب) .

(د) قدر السرعة القصوى للعربة التي قوتها 63 kw.

(هـ) قدر قوة العربة التي من المعروف أن سرعتها القصوى 168 km/h .

جدول ١٣ - ٤

القـــوة	68	65	67	62	65	74	70	66	60	72	63	70
السرعة القصوى	152	139	145	132	160	178	168	156	135	180	150	155

الحـــل :

(أ) نحصل على شكل الانتشار ، الموضح ، بالشكل ١٣ – ٨ ، بتوقيع النقط (70,155), (63,150),. . . .,(68,152)

(ب) الخط المستقيم الذى يقرب البيانات موضح بالشكل على صورة خطوط متقطعة . هذا الخط أحد الخطوط الكثيرة التى يمكن رسمها .

(جـ) اختر أى نقطتين على الخط المرسوم فى (ب) ، مثل P, Q على سبيل المثال .

أحداثيات هذه النقط كما يمكن قراءتها من ، هى على وجه التقريب (72, 170) ، (60,130)

إذن

$$Y - Y_1 = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}(X - X_1)$$

$$Y - 130 = \frac{170 - 130}{72 - 60}(X - 60)$$

$$Y = \frac{10}{3}X - 70$$

شكل ١٣ – ٨

(د) إذا كانت $X = 63$ فإن $Y = \frac{10}{3}(63) - 70 = 140$ km/h

(ج) إذا كانت $Y = 168$ فإن $168 = \frac{10}{3}X - 70, \frac{10}{3}X = 238$ و $X = 71{\cdot}4$ or 71 kW

خط المربعات الصغرى :

١٢–١١ وفق خط المربعات الصغرى لبيانات المسألة ١٣ – ٨ باستخدام

(أ) X كمتغير مستقل ، (ب) X كمتغير تابع

الحـــل

(أ) معادلة الخط هى $Y = a_0 + a_1 X$. والمعادلات الاعتدالية هى

$$\left.\begin{aligned} \Sigma Y &= a_0 N + a_1 \Sigma X \\ \Sigma XY &= a_0 \Sigma X + a_1 \Sigma X^2 \end{aligned}\right\}$$

يمكن ترتيب خطوات العمل لحساب المجاميع كما فى الجدول ١٣ – ٥ . على الرغم من أن العمود الأخير غير مطلوب لهذا الجزء من المسألة . فإننا قد أضفناه لاستخدامه فى الجزء (ب) .

جدول ١٣ – ٥

X	Y	X^2	XY	Y^2
1	1	1	1	1
3	2	9	6	4
4	4	16	16	16
6	4	36	24	16
8	5	64	40	25
9	7	81	63	49
11	8	121	88	64
14	9	196	126	81
$\Sigma X = 56$	$\Sigma Y = 40$	$\Sigma X^2 = 524$	$\Sigma XY = 364$	$\Sigma Y^2 = 256$

بما أن هناك ثمانية أزواج من قيم X, Y فإن $N = 8$ والمعادلات الاعتدالية تصبح .

$$\left.\begin{aligned} 8a_0 + 56a_1 &= 40 \\ 56a_0 + 524a_1 &= 364 \end{aligned}\right\}$$

بالحل آنياً ، $a_0 = \frac{٦}{١١}$ أو $0{\cdot}545, a_1 = \frac{٧}{١١}$ or $0{\cdot}636$ وخط المربعــات الصغرى هى

$Y = \frac{٦}{١١} + \frac{٧}{١١}X$ أو $Y = 0{\cdot}545 + 0{\cdot}636X$

طريقة اخرى :

$$a_0 = \frac{(\Sigma Y)(\Sigma X^2) - (\Sigma X)(\Sigma XY)}{N\,\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2} = \frac{(40)(524) - (56)(364)}{(8)(524) - (56)^2} = \frac{6}{11} \text{ or } 0{\cdot}545$$

$$a_1 = \frac{N\,\Sigma XY - (\Sigma X)(\Sigma Y)}{N\,\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2} = \frac{(8)(364) - (56)(40)}{(8)(524) - (56)^2} = \frac{7}{11} \text{ or } 0{\cdot}636$$

إذن $Y = a_0 + a_1X$ أو $Y = 0{\cdot}545 + 0{\cdot}636X$, كما سبق .

(ب) إذن اعتبرنا X هو المتغير التابع و Y هو المتغير المستقل ، فإن معادلة خط المربعات الصغرى هو $X = b_0 + b_1 Y$ والمعادلات الاعتدالية هى

$$\left.\begin{aligned} \Sigma X &= b_0 N + b_1 \Sigma Y \\ \Sigma XY &= b_0 \Sigma Y + b_1 \Sigma Y^2 \end{aligned}\right\}$$

إذا باستخدام الجدول ١٣ – ب ، فإن المعادلات الاعتدالية تصبح

$$\left.\begin{aligned} 8b_0 + 40b_1 &= 56 \\ 40b_0 + 256b_1 &= 364 \end{aligned}\right\}$$

ومنها $b_0 = -\frac{1}{2}$ or -0.50, $b_1 = \frac{3}{2}$ أو 1.50

هذه القيم يمكن أن نحصل عليها من الصيغ

$$b_0 = \frac{(\Sigma X)(\Sigma Y^2) - (\Sigma Y)(\Sigma XY)}{N\Sigma Y^2 - (\Sigma Y)^2} = \frac{(56)(256) - (40)(364)}{(8)(256) - (40)^2} = 0.50$$

$$b_1 = \frac{N\Sigma XY - (\Sigma X)(\Sigma Y)}{N\Sigma Y^2 - (\Sigma Y)^2} = \frac{(8)(364) - (56)(40)}{(8)(256) - (40)^2} = 1.50$$

وبهذا فإن معادلة المربعات الصغرى هى $X = b_0 + b_1 Y$ أو $X = -0.50 \quad 1.50Y$.

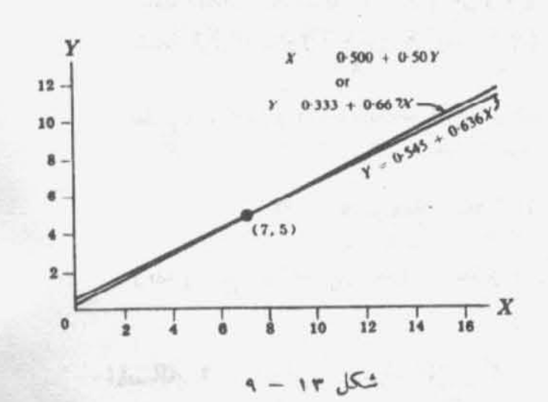
لاحظ أنه بحل هذه المعادلة فى Y نحصل على $Y = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}X$ أو $Y = 0.333 + 0.667X$ وهى ليست مثل الخط الذى حصلنا عليه فى (أ) .

١٣ - ١٢ ارسم الخطين اللذين حصلت عليهما فى المسألة السابقة

الحـل :

الرسم البيانى للخطين $Y = 0.545 + 0.636X$ و $X = -0.500 + 1.50Y$ موضح بالشكل ١٣ - ٩ .

لاحظ أن الخطين من الناحية العملية متفقان ، هذا دليل على أن البيانات توصف وصفاً جيداً بالعلاقة الخطية .



شكل ١٣ - ٩

الخط الذى حصلنا عليه فى (أ) يسمى بخط انحدار Y على X ويستخدم فى تقدير Y لقيم X المعطاة ، أما الخط الذى حصلنا عليه فى (ب) يسمى خط انحدار X على Y ويستخدم لتقدير X لقيم Y المعطاة .

١٣ - ١٣ (أ) وضح أن خطى المربعات الصغرى اللذين حصلنا عليهما فى ١٣ - ١١ يتقاطعان فى النقطة $(\bar{X}, \bar{Y})$.

(ب) قدر قيمة Y عند $X = 12$ (جـ) قدر قيمة X عند $Y = 3$

الحـل :

$\bar{X} = \frac{\Sigma X}{N} = \frac{56}{8} = 7,\ \bar{Y} = \frac{\Sigma Y}{N} = \frac{40}{8} = 5$ النقطة $(\bar{X}, \bar{Y})$ وتسمى مركز القوة ، هى $(7, 5)$

(أ) النقطة $(7, 5)$ تقع على خط $Y = 0.545 + 0.636X$ أو ، أكثر دقة ، $Y = {}^{6}/_{11} + {}^{7}/_{11}X$ ، حيث أن $5 = {}^{6}/_{11} + {}^{7}/_{11}(7)$. النقطة $(7, 5)$ تقع على الخط $X = ½ + {}^{3}/_{2}Y$ ، حيث أن $7 = -½ + {}^{3}/_{2}(5)$.

طريقة اخرى :

معادلة الخطين هما $Y = {}^6/_{11} + {}^7/_{11}X$ و $X = -\frac{1}{2} + {}^3/_2\, Y$

بحل المعادلتين آنياً ، نجد أن $X = 7,\ Y = 5$. بهذا فإن الخطين يتقاطعان فى النقطة $(7, 5)$.

(ب) بوضع $X = 12$ فى خط انحدار Y (المسألة ١٣ – ١١) فإن $Y = 0{\cdot}545 + 0{\cdot}636(12) = 8{\cdot}2$.

(جـ) بوضع $Y = 3$ فى خط انحدار X (المسألة ١٣ – ١١) فإن $X = -0{\cdot}50 + 1{\cdot}50(3) = 4{\cdot}0$.

١٣ – ١٤ أثبت أن خط المربعات الصغرى يمر دائماً خلال النقطة $(\bar{X}, \bar{Y})$.

الحـل :

المسألة ١ : X هو المتغير المستقل

معادلة المربعات الصغرى هى (١) $Y = a_0 + a_1X$

معادلة اعتدالية لخط المربعات الصغرى هى (٢) $\Sigma Y = a_0N + a_1 \Sigma X$

بقسمة طرفى المعادلة (٢) على N يعطى (٣) $\bar{Y} = a_0 + a_1\bar{X}$

بطرح (٣) من (١) ، فإن خط المربعات الصغرى يمكن كتابته

$$Y - \bar{Y} = a_1(X - \bar{X}) \qquad (٤)$$

وهذا يوضح أن الخط يمر خلال النقطة $(\bar{X}, \bar{Y})$

المسألة ٢ : Y هو المتغير المستقل .

نسير على نفس خطوات الحالة (١) مع تبديل X و Y والثوابت a_1 و a_0 بالثوابت b_1 و b_0 على الترتيب نجد أن خط المربعات الصغرى يمكن كتابته كالآتى :

$$X - \bar{X} = b_1(Y - \bar{Y}) \qquad (٥)$$

وهذا يوضح أن الخط يمر خلال النقطة $(\bar{X}, \bar{Y})$.

لاحظ أن الخطين (٤) و (٥) ليسا متطابقين ، ولكنهما يتقاطعان فى النقطة $(\bar{X}, \bar{Y})$.

١٣ – ١٥ اعتبر أن X هو المتغير المستقل ، وضح أن معادلة خط المربعات الصغرى يمكن أن تكتب فى الصورة

$$y = \left(\frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2}\right)x \quad \text{أ,} \quad y = \left(\frac{\Sigma xY}{\Sigma x^2}\right)x$$

حيث $x = X - \bar{X}$ و $y = Y - \bar{Y}$.

(ب) إذا كانت $\bar{X} = 0$ وضح أن خط الانحدار فى (أ) يمكن كتابته على صورة

$$Y = \bar{Y} + \left(\frac{\Sigma XY}{\Sigma X^2}\right) X$$

(ت) اكتب معادلة خط المربعات الصغرى المقابلة لجزء (أ) إذا كان Y هو المتغير المستقل

(ث) أثبت أن الخطين فى (١) و (٢) ليسا بالضرورة متماثلين

الحـل :

(أ) المعادلة (٤) بالمسألة ١٣ - ١٤ يمكن كتابتها فى الصورة $y = a_1 x$ حيث $x = X - \bar{X}$ و $y = Y - \bar{Y}$. كذلك من حل المعادلات الاعتدالية آنياً (أنظر صفحة ٣٥٣) ، نحصل على .

$$a_1 = \frac{N\Sigma XY - (\Sigma X)(\Sigma Y)}{N\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2} = \frac{N\Sigma (x+\bar{X})(y+\bar{Y}) - \{\Sigma(x+\bar{X})\}\{\Sigma(y+\bar{Y})\}}{N\Sigma(x+\bar{X})^2 - \{\Sigma(x+\bar{X})\}^2}$$

$$= \frac{N\Sigma(xy + x\bar{Y} + \bar{X}y + \bar{X}\bar{Y}) - \{\Sigma x + N\bar{X}\}\{\Sigma y + N\bar{Y}\}}{N\Sigma(x^2 + 2x\bar{X} + \bar{X}^2) - \{\Sigma x + N\bar{X}\}^2}$$

$$= \frac{N\Sigma xy + N\bar{Y}\Sigma x + N\bar{X}\Sigma y + N^2\bar{X}\bar{Y} - \{\Sigma x + N\bar{X}\}\{\Sigma y + N\bar{Y}\}}{N\Sigma x^2 + 2N\bar{X}\Sigma x + N^2\bar{X}^2 - \{\Sigma x + N\bar{X}\}^2}$$

، لكن $\Sigma x = \Sigma(X - \bar{X}) = 0$ و $\Sigma y = \Sigma(Y - \bar{Y}) = 0$ ، بهذا يمكن تبسيط ماسبق إلى

$$a_1 = \frac{N\Sigma xy + N^2\bar{X}\bar{Y} - N^2\bar{X}\bar{Y}}{N\Sigma x^2 + N^2\bar{X}^2 - N^2\bar{X}^2} = \frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2}$$

ويمكن أيضاً كتابتها كما يلى :

$$a_1 = \frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2} = \frac{\Sigma x(Y - \bar{Y})}{\Sigma x^2} = \frac{\Sigma xY - \bar{Y}\Sigma x}{\Sigma x^2} = \frac{\Sigma xY}{\Sigma x^2}$$

إذن خط المربعات الصغرى هو $y = a_1 x$ ، أى $y = \left(\frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2}\right)x$ أو $y = \left(\frac{\Sigma xY}{\Sigma x^2}\right)x$

(ب) إذا كانت $\bar{X} = 0,\ x = X - \bar{X} = X$

إذن $y = \left(\frac{\Sigma XY}{\Sigma X^2}\right)X$ ، $y = \left(\frac{\Sigma xY}{\Sigma x^2}\right)$ أو $Y = \bar{Y} + \left(\frac{\Sigma XY}{\Sigma X^2}\right)X$

طريقة اخرى :

المعادلات الاعتدالية لخط المربعات الصغرى $Y = a_0 + a_1 X$ هى

$$\Sigma XY = a_0 \Sigma X + a_1 \Sigma X^2 \ , \quad \Sigma Y = a_0 N + a_1 \Sigma X$$

إذا كانت $\bar{X} = (\Sigma X)/N = 0$ فإن $\Sigma X = 0$ وتصير المعادلات الاعتدالية كالآتى :

$$\Sigma XY = a_1 \Sigma X^2 \quad و \quad \Sigma Y = a_0 N$$

ومنها $a_0 = \frac{\Sigma Y}{N} = \bar{Y}$ أو $a_1 = \frac{\Sigma XY}{\Sigma X^2}$

وبهذا فإن المعادلة المطلوبة لخط المربعات الصغرى هي $Y = a_0 + a_1X$ أو $Y = \bar{Y} + (\frac{\Sigma XY}{\Sigma X^2})X$

(جـ) بإبدال X و Y أو x و y يمكن أن نثبت كما في (أ) أن $x = (\frac{\Sigma xy}{\Sigma y^2})y$

(د) من (أ) ، خط المربعات الصغرى هو (١) $y = (\frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2})x$

من (جـ) ، خط المربعات الصغرى هو $x = (\frac{\Sigma xy}{\Sigma y^2})y$ أو $(2)\ y = (\frac{\Sigma y^2}{\Sigma xy})x$

بما أن $\frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2} \neq \frac{\Sigma y^2}{\Sigma xy}$ ، بشكل عام ، فإن خطى المربعات الصغرى (١) ، (٢) مختلفان بشكل عام . لاحظ أنهما يتقاطعان عند $x = 0$ و $y = 0$ أى عند النقطة $(\bar{x}, \bar{y})$.

١٣ – ١٦ إذا كانت $X' = X + A$ و $Y' = Y + B$ حيث A و B ثوابت ، أثبت أن

$$a_1 = \frac{N\Sigma XY - (\Sigma X)(\Sigma Y)}{N\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2} = \frac{N\Sigma X'Y' - (\Sigma X')(\Sigma Y')}{N\Sigma X'^2 - (\Sigma X')^2} = a_1'$$

الحـل :

$$x' = X' - \bar{X}' = (X + A) - (\bar{X} + A) = X - \bar{X} = x$$

$$y = Y' - \bar{Y}' = (X + B) - (\bar{Y} + B) = Y - \bar{Y} = y$$

إذن $\frac{\Sigma x'y'}{\Sigma x'^2} = \frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2}$ ومن ثم نحصل على النتيجة من المسألة ١٣ – ١٥ ونحصل على نتيجة مشابهة بالنسبة لـ b_1 .

هذه النتيجة مفيدة ، حيث أنها تمكنا من تبسيط الحسابات فى الحصول على خط الانحدار بطرح ثوابت اختيارية من المتغيرات X و Y (أنظر الطريقة الثانية فى المسألة ١٣ – ١٧) .

ملاحظة : الاستنتاج لايظل صحيحاً إذا كانت $Y' = c_2Y + B$ ، $X' = c_1X + A$ إلا إذا كانت $c_1 = c_2$.

١٣ – ١٧ وفق خط المربعات الصغرى لبيانات المسألة ١٣ – ١٠ باستخدام

(أ) X كمتغير مستقل (ب) X كمتغير تابع

الحـل :

(أ) من المسألة ١٣ – ١٥ (أ) الخـط المطلوب هو $y = (\frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2})x$ حيث $y = Y - \bar{Y}$ ، $x = X - \bar{X}$.

العمل المتضمن فى حساب المجاميع يمكن ترتيبه كما فى الجدول ١٣ – ٦ . من العمودين الأولين نحصل على

$$\bar{X} = 802/12 = 66.8 \quad \text{و} \quad \bar{Y} = 1850/12 = 154.2$$

العمود الأخير أضيف للاستخدام فى الجزء (ب) .

جدول ١٣ – ٦

القـوة	السرعة القصوى	y^2	x^2	xy	$y = Y - \bar{Y}$	$x = X - \bar{X}$
70	155	0·64	10·24	2·56	0·8	3·2
63	150	17·64	14·44	15·96	−4·2	−3·8
72	180	665·64	27·04	134·16	25·8	5·2
60	135	368·64	46·24	130·56	−19·2	−6·8
66	156	3·24	0·64	−1·44	1·8	−0·8
70	168	190·44	10·24	44·16	13·8	3·2
74	178	566·44	51·84	171·36	23·8	7·2
65	160	33·64	3·24	−10·44	5·8	−1·8
62	132	492·84	23·04	106·56	−22·2	−4·8
67	145	84·64	0·04	1·84	−9·2	0·2
65	139	231·04	3·24	27·36	15·2	−1·8
68	152	4·84	1·44	2·64	2·2	1·2
$\Sigma X = 802$ $\bar{X} = 66.8$	$\Sigma Y = 1850$ $\bar{Y} = 154.2$	Σy^2 2659·68	Σx^2 191·68	Σxy 616·32		

خط المربعات الصغرى المطلوب هو

$$y = \left(\frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2}\right)x = \frac{616.32}{191.68}x = 3.22x$$

أو $(X - 66.8)$ $3.22 =$ $Y - 145.2$ والذى يمكن كتابته على الصورة: $Y = 3.22\ X - 60.9$

وتسمى هذه المعادلة خط انحدار Y على X ويستخدم لتقدير Y من قيم معطاة لـ X .

(ب) إذا كان X هو المتغير التابع ، فإن الخط المطلوب هو

$$x = \left(\frac{\Sigma xy}{\Sigma y^2}\right)y = \frac{616.32}{2659.68}y = 0.232y$$

والذى يمكن كتابته على الصورة $X - 66.8 = 0.232\ (Y - 154.2)$ أو $X = 31.0 + 0.232\ Y$

هذه المعادلة تسمى خط انحدار X على Y ويستخدم لتقدير X من قيم Y المعطاة .

لاحظ أن طريقة المسألة ١٣ – ١١ يمكن أيضاً استخدامها إذا أردنا .

طريقة أخرى :

باستخدام نتيجة المسألة ١٣ – ١٦ ، يمكن أن نطرح ثوابت مناسبة من X ، Y . فإذا اخترنا أن نطرح 65 من X و 150 من Y فإن النتائج يمكن ترتيبها فى الجدول ١٣ – ٧ .

الجـدول ١٣ – ٧

X'	Y'	X'^2	$X'Y'$	Y'^2
5	5	25	25	25
−2	0	4	0	0
7	30	49	210	900
−5	−15	25	75	225
1	6	1	6	36
5	18	25	90	324
9	28	81	252	784
0	10	0	0	100
−3	−18	9	54	324
2	−5	4	−10	25
0	−11	0	0	121
3	2	9	6	4
$\Sigma X' = 22$	$\Sigma Y' = 50$	$\Sigma X'^2 = 232$	$\Sigma X'Y' = 708$	$\Sigma Y'^2 = 2868$

$$a_1 = \frac{N\Sigma X'Y' - (\Sigma X')(\Sigma Y')}{N\Sigma X'^2 - (\Sigma X')^2} = \frac{(12)(708) - (22)(50)}{(12)(232) - (22)^2} = 3.22$$

$$b_1 = \frac{N\Sigma X'Y' - (\Sigma Y')(\Sigma X')}{N\Sigma Y'^2 - (\Sigma Y')^2} = \frac{(12)(708) - (50)(22)}{(12)(2868) - (50)^2} = 0.232$$

بما أن $\bar{Y} = 150 + 50/12 = 154.2$ و $\bar{X} = 65 + 22/12 = 66.8$. فإن معادلات الانحدار هى

$$Y - 154.2 = 3.22(X - 66.8) \quad , \quad X - 66.8 = 0.0232(Y - 154.2)$$

أى أن $X = 0.232\ Y + 31.0$ و $Y = 3.22X - 60.9$ وهى نفس نتائج الطريقة الأولى .

١٣ – ١٨ (أ) مستخدماً نفس المحاور ارسم شكل الخطين فى المسألة ١٣ – ١٧ .

(ب) قدر السرعة القصوى لعربة إذا علم أن قوتها هى 63 k W .

(جـ) قدر قوة عربة سرعتها القصوى هى 168 km/h.

الحـل :

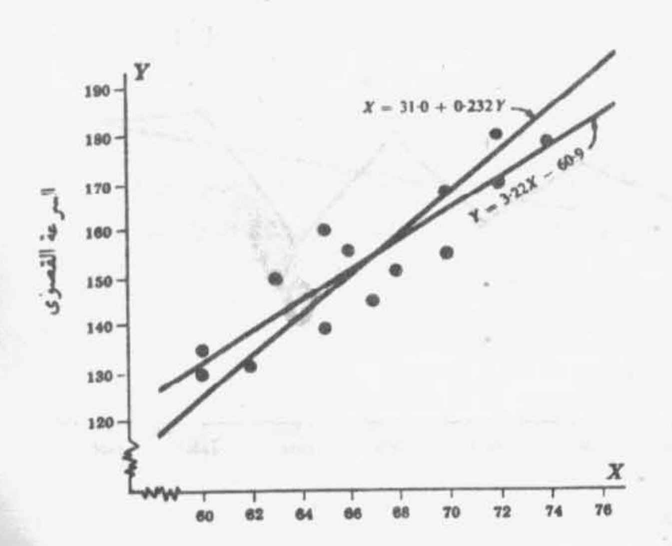
(أ) يوضح الشكل ١٣–١٠ الخطين معاً وكذلك نقط البيانات الأصلية. لاحظ أنهما يتقاطعان معا عند $(\bar{X}, \bar{Y})$ أو $(66.8, 154.2)$

(ب) لتقدير Y من X نستخدم خط انحدار Y على X ، والمعطى بالمسألة ١٣–١٧ كالآتى $Y = 3.22X - 60.9$. إذن إذا كانت $X = 63$ فإن

$$Y = 3{\cdot}22(63) - 60{\cdot}9 = 142 \text{ km/h}$$

(جـ) X من Y نستخدم خط انحدار X على Y ، والمعطى بالمسألة ١٣ – ١٧ كالآتى إذن $X = 31.0 + 0.232\ Y$ إذا كانت $Y = 168$ فإن

$$X = 31{\cdot}0 + 0{\cdot}232(168) = 70{\cdot}0 \text{ kW}$$



شكل ١٣ – ١٠

النتائج فى (ب) و (جـ) يجب مقارنتها بتلك فى المسألة ١٣ – ١٠ (د) و ١٣ – ١٠ (هـ)

تطبيقات على السلاسل الزمنية :

١٣ – ١٩ إنتاج الصلب بملايين الكيلوطن فى بلد معين خلال الفترة من 1946 — 1956 موضح بالجدول ١٣ – ٨

السنة	إنتاج الصلب (ملايين كيلو طن)
1946	66·6
1947	84·9
1948	88·6
1949	78·0
1950	96·8
1951	105·2
1952	93·2
1953	111·6
1954	88·3
1955	117·0
1956	115·2

(أ) عبر عن هذه البيانات بالرسم

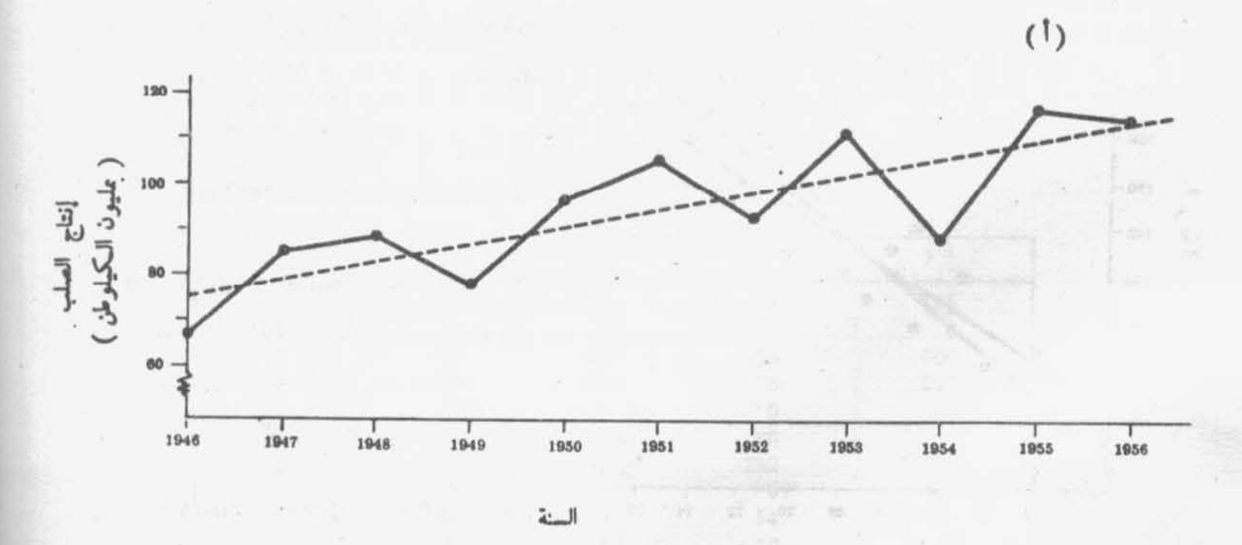
(ب) أوجد معادلة خط المربعات الصغرى الذى يوفق البيانات

(جـ) قدر إنتاج الصلب خلال الأعوام 1958 ، 1957 وقارن بالقيمة الحقيقية 85·3 ، 112.7 مليون كيلوطن .

(د) قدر إنتاج الصلب خلال الأعوام 1945، 1944 وقارن بالقيم الحقيقية 89.6 ، 79.7 مليون كيلوطن على الترتيب .

الحـل :





شكل ١٣ – ١١

(ب) الطريقة الأولى :

استخدم المعادلة $y=\left(\frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2}\right)x$ حيث $x = X - \bar{X}$ و $y = Y - \bar{Y}$. فإنه يمكن ترتيب العمل كما فى الجدول ١٣ – ٩ .

X	Y	$x = X - \bar{X}$	$y = Y - \bar{Y}$	x^2	xy	السنة
0	66·6	−5	−28·4	25	142·0	1946
1	84·9	−4	−10·1	16	40·4	1947
2	88·6	−3	−6·4	9	19·2	1948
3	78·0	−2	−17·0	4	34·0	1949
4	96·8	−1	1·8	1	−1·8	1950
5	105·2	0	10·2	0	0	1951
6	93·2	1	−1·8	1	−1·8	1952
7	111·6	2	16·6	4	33·2	1953
8	88·3	3	−6·7	9	−20·1	1954
9	117·0	4	22·0	16	88·0	1955
10	115·2	5	20·2	25	101·0	1956
$\Sigma X = 55$ $\bar{X} = 5$	$\Sigma Y = 1045{\cdot}4$ $\bar{Y} = 95{\cdot}0$			$\Sigma x^2 = 110$	$\Sigma xy = 434{\cdot}1$	

المعـادلة المطلوبة وهى $y = \left(\frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2}\right)x$ ستصبح $y = \left(\frac{434 \cdot 1}{110}\right)x$ أو $y = 3.95x$ والتى يمكن كتابتها على الصورة :

$$Y - 95 \cdot 0 = 3 \cdot 95(X - 5) \quad \text{أو} \quad Y = 75 \cdot 2 + 3 \cdot 95X$$

حيث نقطة الأصل $X = 0$ هى السنة 1946 ووحدات X هى سنة . الرسم البيانى لهذا الخط ، يسمى أحياناً خط الاتجاه العام ، وموضح بالشكل ١٣ – ١١ على صورة خطوط متقطعة . وتسمى المعادلة غالباً معادلة الاتجاه العام وقيم Y المحسوبة من قيم X المختلفة بالقيم الاتجاهية .

الطريقة الثانية :

إذا أعطينا قيم X للسنوات 1956 — 1946 بحيث $\Sigma X = 0$. فإن معادلة خط المربعات الصغرى يمكن أن تكتب على الصورة :

$$Y = \bar{Y} + \left(\frac{\Sigma XY}{\Sigma X^2}\right)X$$

وبما أن هناك عدداً فردياً من السنوات ، فإنه يمكن اعتبار $X = 0$ للسنة التى فى منتصف الفترة وهى 1951 ، $X = 1, 2, 3, 4, 5$ للسنوات التالية لها و $X = -1, -2, -3, -4, -5$ للسنوات السابقة عليها – ويوضح الجدول ١٣ – ١٠ العمود الثانى (من اليسار) هذه النتيجة وهذا يساوى العمود الرابع (من اليسار) فى الجدول الخاص بالطريقة الأولى . السنة المتوسطة 1951 تسمى بنقطة الأصل . وسنفترض – مالم يذكر خلاف ذلك – أن قيم Y تشير إلى القيم فى منتصف السنة ، أى ، فى أول يوليو . وبهذا فإن $X = 0$ تقابل أول يوليو سنة 1951 ، $X = 1$ تقابل أول يولية 1950 ، وهكذا . ويمكن تنظيم الحسابات المطلوبة كما فى الجدول ١٣ – ١٠ .

الجدول ١٣ – ١٠

X	Y	X^2	XY	السنة
−5	66·6	25	−333·0	1946
−4	84·9	16	−339·6	1947
−3	88·6	9	−265·8	1948
−2	78·0	4	−156·0	1949
−1	96·8	1	−96·8	1950
0	105·2	0	0	1951
1	93·2	1	93·2	1952
2	111·6	4	223·2	1953
3	88·3	9	264·9	1954
4	117·0	16	468·0	1955
5	115·2	25	576·0	1956
$\bar{X}$ 0	$\Sigma Y = 1045 \cdot 4$	$\Sigma X^2 = 110$	$\Sigma XY = 434 \cdot 1$	

إذن $\bar{Y} = (\Sigma Y/N) = 1{\cdot}45{\cdot}4/11 = 95{\cdot}0$ والمعادلة المطلوبة هى

$$Y = 95{\cdot}0 + (434{\cdot}1/110)X \quad \text{أو} \quad Y = 95{\cdot}0 + 3{\cdot}95X$$

حيث نقطة الأصل $X = 0$ هى السنة 1951 ووحدة X هى السنة .

لنقل نقطة الأصل إلى 1946 ، خمسة سنوات سابقة ، فيجب أن نضع $X - 5$ بدلا من X ، وبهذا نحصل على المعادلة $Y = 95{\cdot}0 + 3{\cdot}95(X - 5)$ أو $Y = 75{\cdot}2 + 3{\cdot}95X$ كما فى الطريقة الأولى .

الطريقة الثانية أفضل من الطريقة الأولى حيث أن العمل المطلوب فى الحساب قد اختصر . ولكن هذه الطريقة يجب أن تعدل إذا كان عدد السنوات فى البيانات زوجياً . ولهذا التعديل أنظر طريقة المسألة ١٣-٢٠ (ب) أما الطريقة الأولى فيمكن تطبيقها فى جميع الحالات .

(جـ) استخدم معادلة الاتجاه العام $Y = 95.0 + 3.95\ X$ ، حيث $X = 0$ تقابل 1951 . إذن السنوات 1958 ، 1957 تقابل $X = 7$ ، $X = 6$ على الترتيب .

إذا كانت $X = 6$ فإن $Y = 95{\cdot}0 + 0{\cdot}95(6) = 118{\cdot}7$ والتى تقترب بصورة جيدة من القيمة الفعلية 112.7.

إذا كانت $X = 7$ فإن $Y = 95{\cdot}0 + 3{\cdot}95(7) = 122{\cdot}6$ وهى لاتقارن بصورة جيدة بالقيمة الفعلية وتوضح المخاطرة المتضمنة فى عملية الاستنباط .

نفس النتيجة يمكن الحصول عليها باستخدام معادلة الاتجاه العام $Y = 75.2 + 3.95\ X$ والتى لها كنقطة أصل السنة 1946 ، وذلك بوضع $X = 12$ و $X = 11$ على الترتيب .

(د) باستخدام خط الاتجاه العام $Y = 75.2 + 3.95X$ عند $X = -2$ ، $X = -1$ نحصل على القيم

$$Y = 75{\cdot}2 + 3{\cdot}95(-1) = 71{\cdot}2 \quad , \quad Y = 75{\cdot}2 + 3{\cdot}95(-2) = 67{\cdot}3$$

١٣ - ٢٠ يوضح الجدول ١٣ - ١١ إنتاج الولايات المتحدة من السيجار ذى الحجم الصغير خلال الأعوام من 1954 — 1945.

(أ) عبر عن هذه البيانات بالرسم

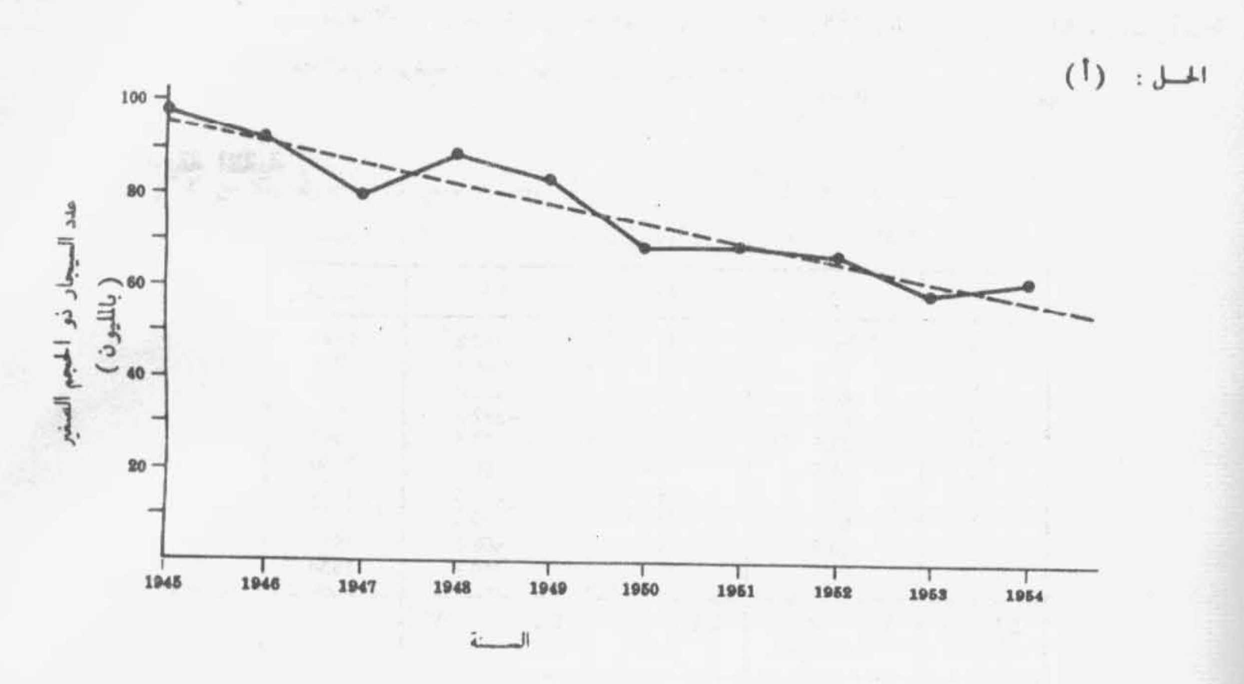
(ب) أوجد معادلة خط المربعات الصغرى التى توفق البيانات

(جـ) قدر إنتاج السيجار ذى الحجم الصغير خلال عام 1955

جـدول ١٣ – ١١

السـنة	1954	1953	1952	1951	1950	1949	1948	1947	1946	1945
عدد السيجار ذو الحجم الصغير (بالمليون)	61·2	58·3	67·1	69·2	68·9	83·5	89·1	80·0	92·3	98·2

الحـل : (أ)



شكل ١٣ – ١٢

(ب) الطريقة الأولى :

جدول ١٣ – ١٢

X	Y	$x = X - \bar{X}$	$y = Y - \bar{Y}$	x^2	xy	السـنة
0	98·2	−4·5	21·4	20·25	−96·30	1945
1	92·3	−3·5	15·5	12·25	−54·25	1946
2	80·0	−2·5	3·2	6·25	−8·00	1947
3	89·1	−1·5	12·3	2·25	−18·45	1948
4	83·5	−0·5	6·7	0·25	−3·35	1949
5	68·9	0·5	−7·9	0·25	−3·95	1950
6	69·2	1·5	−7·6	2·25	−11·40	1951
7	67·1	2·5	−9·7	6·25	−24·25	1952
8	58·3	3·5	−18·5	12·25	−64·75	1953
9	61·2	4·5	−15·6	20·25	−70·20	1954
$\Sigma X = 45$ $\bar{X} = 4·5$	$\Sigma Y = 767·8$ $\bar{Y} = 76·8$			$\Sigma x^2 = 82·5$	Σxy $= -354·9$	

المعادلة المطلوبة وهى $y = \left(\frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2}\right) x$ تصبح $y = \frac{-354.9}{82.5}$ أو $y = 4.30$ والتى يمكن كتابتها على الصورة :

$$Y = 96.2 - 4.30X \text{ أو } Y - 76.8 = -4.30(X - 4.5)$$

حيث نقطة الأصل $X = 0$ هى سنة 1945 ووحدة X هى السنة . الرسم البيانى لهذا الخط ، ويسمى أحياناً خط الاتجاه العام ، موضح بصورة خطوط متقطعة الشكل ١٣ – ١٢

الطريقة الثانية :

جدول ١٣ – ١٣

السنة	XY	X^2	Y	X
1945	−883.8	81	98.2	−9
1946	−646.1	49	92.3	−7
1947	−400.0	25	80.0	−5
1948	−267.3	9	89.1	−3
1949	−83.5	1	83.5	−1
1950	68.9	1	68.9	1
1951	207.6	9	69.2	3
1952	335.5	25	67.1	5
1953	408.1	49	58.3	7
1954	550.8	81	61.2	9
	$\Sigma XY = -709.8$	$\Sigma X^2 = 330$	$\Sigma Y = 767.8$ $\bar{Y} = 76.8$	$\Sigma X = 0$ $\bar{X} = 0$

فى هذه الطريقة فإننا نريد إعطاء السنوات القيم X بحيث تكون $\Sigma X = 0$ وبما أن عدد السنوات زوجى ، فإنه لاتوجد سنة وسطى ولايمكن بذلك استخدام الطريقة الثانية بالمسألة ١٣ – ١٩ . على أية حال ، فإنه يمكن إعطاء الأرقام 0.5 — 0.5 السنتين بالمنتصف وهما 1950 ، 1949 ، بحيث تمثل السنوات ... ,1951, 1952 بالأرقام . . . ,1.5, 2.5 وهذا ماهو موجود بالعمود الرابع من اليسار بالجدول ١٣ – ١٢ فى الطريقة الأولى .

كذلك ، ولتلافى الكسور نضاعف هذه القيم بحيث نحصل على العمود الثانى (من اليسار) فى الجدول ١٣ – ١٣. لاحظ أنه باستخدام هذه القيم لـ X فإن نقطة الأصل $X = 0$ هى فى المنتصف بين أول يوليو 1949 ، وأول يوليو 1950 وهو أول يناير 1950 أو 31 ديسمبر 1949.

كذلك فإن وحدة X هى نصف سنة .

بما أن $\bar{X} = 0$ فإن المعادلة المطلوبة لها الشكل $Y = \bar{Y} + \left(\frac{\Sigma XY}{\Sigma X^2}\right) X$ والتى تعطى (أنظر الجدول ١٣ – ١٣) .

$$Y = 76.8 - 2.15X \text{ أو } Y = 76.8 + (-709.8/330)X$$

حيث نقطة الأصل $X = 0$ تقابل يناير 1950 و X مقاسة بنصف سنة فإذا أردنا قياس X كسنة كاملة وليست كنصف سنة ، فيجب أن نضع $2X$ بدلا من X بحيث تكون المعادلة هى

$$Y = 76.8 - 4.30X$$

ونقطة الأصل هى أول يناير 1950 ، X مقاسة بالسنوات

إذا أردنا الآن نقل نقطة الأصل إلى أول يوليو 1945 ، فيجب أن نضع $X - 4.5$ بدلا من X (حيث أن المدة من أول يوليو 1945 إلى أول يناير 1950 هى 4.5 سنة) . وبهذا تكون النتيجة :

$$Y = 76{\cdot}8 - 4{\cdot}30(X - 4{\cdot}5) = 96{\cdot}2 - 4{\cdot}30X$$

حيث نقطة الأصل هى أول يوليو 1945 و X مقاسة بالسنوات . وهذا يتفق مع نتيجة الطريقة الأولى

(جـ) استخدم المعادلة $Y = 96.2 - 4.30X$ حيث $X = 10$ تقابل 1955.

إذن $Y = 53.2$ ، بحيث نتوقع إنتاج 53.2 مليون من السيجار ذى الحجم الصغير إذا استمر نفس الاتجاه العام .

المعادلات غير الخطية التى يمكن وضعها فى صورة خطية :

١٣ - ٢١ الجدول ١٣ - ١٤ يعطى القيم التجريبية للضغط P لحجم معين من الغاز المقابل للقيم المختلفة للحجم V . طبقاً لمبادىء علم الديناميكا الحرارية فإن هذه العلاقة تأخذ الصورة $PV^{\gamma} = C$, حيث C و γ ثوابت يجب أن تتواجد بين المتغيرات (أ) أوجد قيم C ، γ (ب) اكتب المعادلة التى يجب أن تربط بين V ، P . (جـ) قدر P عند $V = 100.0$.

جدول ١٣ - ١٤

الحجم	194·0	118·6	88·7	72·4	61·8	54·3
الضغط	10·1	19·2	28·4	37·6	49·5	61·2

الحـل :

بما أن $PV^{\gamma} = C$، فإن

$$\log P = \log C - \gamma \log V \quad \text{أو} \quad \log P + \gamma \log V = \log C$$

فإذا وضعنا $\log V = X$ و $\log P = Y$ ، فإن المعادلة الأخيرة يمكن كتابتها على الصورة

$$Y = a_0 + a_1 X \qquad (1)$$

حيث $a_0 = \log C$ و $a_1 = -\gamma$

الجدول ١٣ — ١٥ أدناه يعطى $X = \log V$ و $Y = \log P$ المقابلة لقيم V و P الموضحة بالجدول ١٣–١٤ وكذلك يوضح القيم المطلوبة في حساب معادلة المربعات الصغرى (١)

المعادلات الاعتدالية المقابلة لخط المربعات الصغرى (١) هى

$$\Sigma Y = a_0 N + a_1 \Sigma X \quad \text{و} \quad \Sigma XY = a_0 \Sigma X + a_1 \Sigma X^2$$

ومنها
$$a_0 = \frac{(\Sigma Y)(\Sigma X^2) - (\Sigma X)(\Sigma XY)}{N\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2} = 4{\cdot}20, \quad a_1 = \frac{N\Sigma XY - (\Sigma X)(\Sigma Y)}{N\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2} = -1{\cdot}40.$$

إذن $Y = 4.20 - 1.40\, X.$

الجدول ١٣ – ١٥

$X = \log V$	$Y = \log P$	X^2	XY
1·7348	1·7868	3·0095	3·0997
1·7910	1·6946	3·2077	3·0350
1·8597	1·5752	3·4585	2·9294
1·9479	1·4533	3·7943	2·8309
2·0741	1·2833	4·3019	2·6617
2·2878	1·0043	5·2340	2·2976
$\Sigma X = 11{\cdot}6953$	$\Sigma Y = 8{\cdot}7975$	$\Sigma X^2 = 23{\cdot}0059$	ΣXY 16·8543

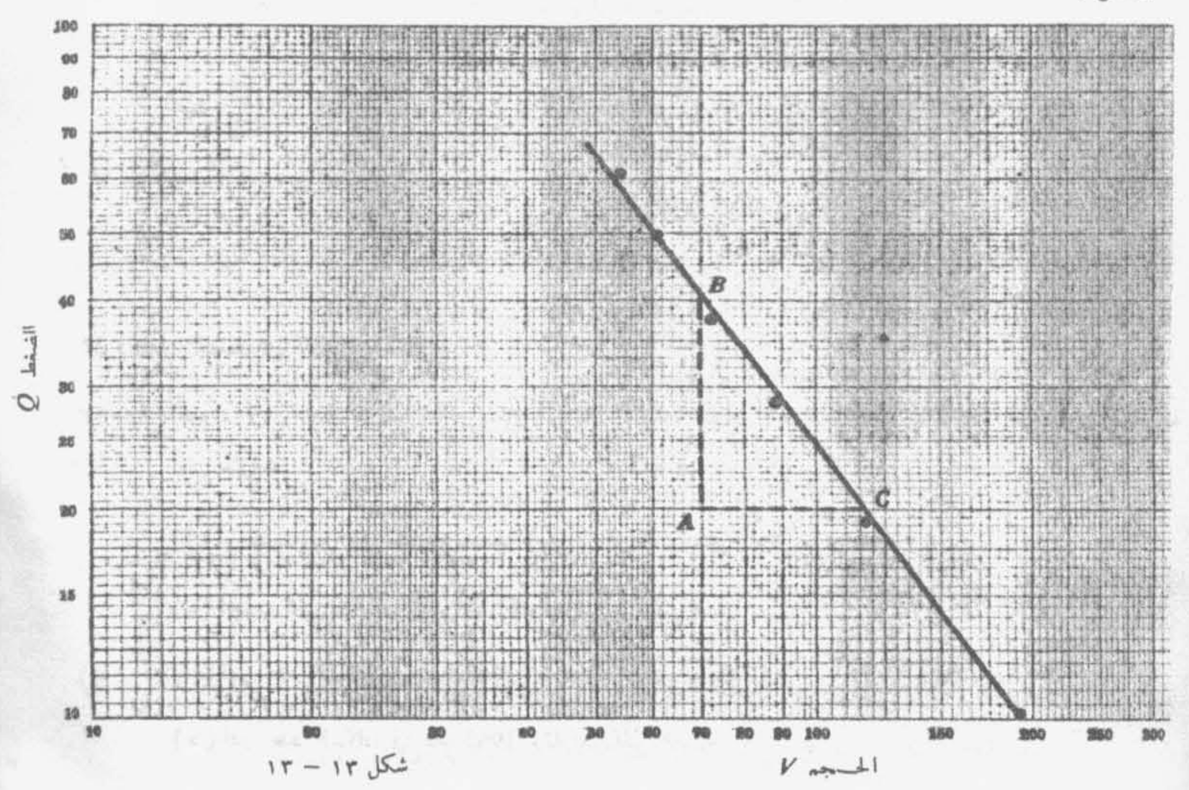
(أ) بما أن $a_1 = -1{\cdot}40 = -\gamma$، و $a_0 = 4{\cdot}20 = \log C$ فإن $\gamma = 1{\cdot}40$. و $C = 1{\cdot}60 \times 10^4$

(ب) المعادلة المطلوبة بدلالة V ، P يمكن كتابتها على الصورة. $PV^{1.40} = 16\ 000$

(جـ) عند $V = 100$ فإن $X = \log V = 2$ و $Y = \log P = 4{\cdot}20 - 1{\cdot}40(2) = 1{\cdot}40$ وعلى ذلك. $P = \text{antilog}\ 1{\cdot}40 = 25{\cdot}1$

١٣–٢٢ حل المسألة ١٣ – ٢١ برسم البيانات على ورق رسم بيانى بالتقسيم لوغاريتم – لوغاريتم

الحـل : 



شكل ١٣ – ١٣

لكل من أزواج القيم للضغط P والحجم V بالجدول ١٣ – ١٤ فى المسألة ١٣ – ١٢ ، نحصل على نقطة موقعة على ورق الرسم البيانى لوغاريتم كما هو موضح بالشكل ١٣ – ١٣ أعلاه .

ويوضح الشكل أيضاً الخط الذى يقرب هذه النقط (مرسوما بالتمهيد باليد) . يوضح الرسم الناتج أن هناك علاقة خطية بين $\log P$ و $\log V$ والذى يمكن تمثيلها بالمعادلة

$$Y = a_0 + a_1 X \text{ أو } \log P = a_0 + a_1 \log V$$

الميل a_1 ، وهو سالب فى هذه الحالة ، يعطى رقياً بنسبة الأطوال AB إلى AC (باستخدام وحدة طول ملائمة) .

وتعطى القياسات فى هذه الحالة $a_1 = -1.4$.

الحصول على a_0 ، فإننا نحتاج إلى نقطة على الخط . على سبيل المثال عندما تكون $V = 100$ فإن $P = 25$ من الشكل . إذن

$$a_0 = \log P - a_1 \log V = \log 25 + 1{\cdot}4 \log 100 = 1{\cdot}4 + (1{\cdot}4)(2) = 4{\cdot}2$$

بحيث

$$\log P + 1{\cdot}4 \log V = 4{\cdot}2, \ \log PV^{1\cdot4} = 4{\cdot}2, \text{ and } PV^{1\cdot4} = 16\,000$$

المربعات الصغرى للقطع المكافىء :

١٣-٢٣ الجدول ١٣ – ١٦ يوضح تعداد سكان الولايات المتحدة خلال الأعوام 1850 — 1950 على فترات كل منها عشر سنوات

(أ) أوجد معادلة القطع المكافىء باستخدام طريقة المربعات الصغرى والتى توفق هذه البيانات

(ب) احسب القيم الاتجاهية للسنوات بالجدول وقارنها بالقيم الفعلية

(ج) قدر عدد السكان فى عام 1945 .

(د) قدر عدد السكان فى عام 1960 وقارن بالقيم الفعلية .

(هـ) قدر عدد السكان فى 1840 وقارن بالقيمة الفعلية . (أنظر المسألة ١ – ٢٣ بالفصل الأول)

جدول ١٣ – ١٦

السنة	1950	1940	1930	1920	1910	1900	1890	1880	1870	1860	1850
سكان الولايات المتحدة (بالمليون)	151·1	131·7	122·8	105·7	92·0	76·0	62·9	50·2	39·8	31·4	23·2

المصدر : مكتب التعدادات .

الحـل :

(أ) اعتبر المتغيرات X و Y تعبر عن السنة وعدد السكان فى خلال السنة على الترتيب . معادلة قطع مكافىء المربعات الصغرى التى توفق البيانات هى :

$$Y = a_0 + a_1X + a_2X^2 \qquad (١)$$

حيث نحصل على قيمة a_0, a_1, a_2 من المعادلات الاعتدالية

$$\begin{cases} \Sigma Y = a_0 N + a_1 \Sigma X + a_2 \Sigma X^2 \\ \Sigma XY = a_0 \Sigma X + a_1 \Sigma X^2 + a_2 \Sigma X^3 \\ \Sigma X^2 Y = a_0 \Sigma X^2 + a_1 \Sigma X^3 + a_2 \Sigma X^4 \end{cases} \qquad (٢)$$

من الملائم اختيار X بحيث يكون منتصف سنة 1900 تقابل $X = 0$ ، والسنوات 1910, 1920, 1930, 1940, 1950 تقابل 5 ,4 ,3 ,2 ,1 و 1890, 1880, 1870, 1860, 1850 تقابل $-1, -2, -3, -4, -5$ على الترتيب . بهذا الاختيار فإن $\Sigma X , \Sigma X^3$ تساوى الصفر وبهذا تبسط المعادلات (٢) . ويمكن ترتيب العمل المطلوب فى الحسابات كما فى الجدول ١٣ – ١٧ أدناه .

باستخدام هذا الجدول فإن المعادلات الاعتدالية (٢) تصبح

$$\begin{cases} 11a_0 + 110a_2 = 886{\cdot}8 \\ 110a_1 = 1429{\cdot}8 \\ 110a_0 + 1958a_2 = 9209{\cdot}0 \end{cases} \qquad (٣)$$

من المعادلة الثانية فى (٣) $a_1 = 13.00$ ، من المعادلتين الأولى والثالثة $a_2 = 0{\cdot}3974$ ، $a_0 = 76.64$.
إذن المعادلة المطلوبة هى :

$$Y = 76{\cdot}64 + 13{\cdot}00X + 0{\cdot}3974X^2 \qquad (٤)$$

حيث نقطة الأصل $X = 0$ هى أول يوليو سنة 1900 ووحدة X هى عشر سنوات .

جدول ١٣ – ١٧

السنة	X	Y	X^2	X^3	X^4	XY	X^2Y
1850	−5	23·2	25	−125	625	−116·0	580·0
1860	−4	31·4	16	−64	256	−125·6	502·4
1870	−3	39·8	9	−27	81	−119·4	358·2
1880	−2	50·2	4	−8	16	−100·4	200·8
1890	−1	62·9	1	−1	1	−62·9	62·9
1900	0	76·0	0	0	0	0	0
1910	1	92·0	1	1	1	92·0	92·0
1920	2	105·7	4	8	16	211·4	422·8
1930	3	122·8	9	27	81	368·4	1105·2
1940	4	131·7	16	64	256	526·8	2107·2
1950	5	151·1	25	125	625	755·5	3777·5
	$\Sigma X = 0$	$\Sigma Y = 886{\cdot}8$	$\Sigma X^2 = 110$	$\Sigma X^3 = 0$	$\Sigma X^4 = 1958$	$\Sigma XY = 1429{\cdot}8$	$\Sigma X^2Y = 9209{\cdot}0$

(ب) القيم الاتجاهية ، نحصل عليها بالتعويض بالقيم $X = -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$ فى المعادلة (٤) ، وهى موضحة بالجدول ١٣ – ١٨ مع القيم الفعلية ومنها يتضح أن الاتفاق جيد .

جـدول ١٣ – ١٨

السـنة	$X = 5$ 1950	$X = 4$ 1940	$X = 3$ 1930	$X = 2$ 1920	$X = 1$ 1910	$X = 0$ 1900	$X = -1$ 1890	$X = -2$ 1880	$X = -3$ 1870	$X = -4$ 1860	$X = -5$ 1850
القيم الاتجاهية	151·6	135·0	119·2	104·2	90·0	76·6	64·0	52·2	41·2	31·0	21·6
القيم الفعلية	151·1	131·7	122·8	105·7	92·0	76·0	62·9	50·2	39·8	31·4	23·2

(جـ) سنة 1945 وتقابل $X = 4.5$ ومنها

$$Y = 76.64 + 13.00(4.5) + 0.3974\,(4.5)^2 \doteq 143.2$$

(د) سنة 1960 وتقابل $X = 6$ ومنها $Y = 76.64 + 13.00(6) + 0.3974\,(6)^2 = 168.9$.
وهذه لاتتفق بصورة جيدة مع القيمة الفعلية 179.3 .

(هـ) سنة 1840 تقابل $X = -6$ ومنه

$$Y = 76.64 + 13.00(-6) + 0.3974\,(-6)^2 = 12.9$$

وهذه لاتتفق بصورة جيدة مع القيمة الفعلية 17.1

وهذا المثال يوضح حقيقة أن العلاقة التى من الممكن أن تكون مرضية فى مدى قيم معينة لاتكون بالضرورة مرضية فى مدى أوسع للقيم

مسائل اضافية

الخطوط المستقيمة :

١٣–٢٤ إذا كانت $3X + 2Y = 18$ ، أوجد (أ) X عند $Y = 3$ (ب) Y عند $X = 2$ (جـ) X عند $Y = -5$ (د) Y عند $X = -1$ (هـ) الجزء المقطوع من محور X (و) الجزء المقطوع من محور Y .

ج : (أ) 4 (ب) 6 (جـ) 28/3 (د) 10.5 (هـ) 6 (و) 9 .

١٣–٢٥ عبر بيانياً عن المعادلات (أ) $Y = 3X - 5$ (ب) $X + 2Y = 4$ مستخدماً نفس المحاور . فى أى نقطة تتقاطع المستقيمات ؟

ج : $(2, 1)$

١٣–٢٦ (أ) أوجد معادلة الخط المستقيم الذى يمر بالنقطتين $(-1, 6)$ ، $(3, -2)$

(ب) أوجد الجزء المقطوع من المحور X والجزء المقطوع من المحور Y لخط فى (أ)

(جـ) أوجد قيمة Y عند $X = 3$ و $X = 5$.

(د) أثبت إجابتك فى (أ) ، (ب) ، (جـ) باستخدام الرسم .

ج : (أ) $2X + Y = 4$ (ب) الجزء المقطوع من محور X يساوى 2 ، من محور Y يساوى 4

(جـ) -6 ، -2

١٣-٢٧ أوجد معادلة الخط المستقيم الذى ميله $2/3$ والجزء المقطوع من محور Y يساوى -3

ج : $Y = {}^2/_3 X - 3$ أو $2X - 3Y = 9$.

١٣-٢٨ (أ) أوجد الميل والجزء المقطوع من محور Y لخط الذى معادلته $3X - 5Y = 20$. (ب) ما هى معادلة الخط الموازى لخط فى (أ) والذى يمر بالنقطة $(2,-1)$ ؟

ج : (أ) الميل $= {}^3/_5$ ، الجزء المقطول من $Y = -4$

(ب) $3X - 5Y = 11$

١٣-٢٩ أوجد (أ) الميل (ب) الجزء المقطوع من محور Y (جـ) معادلة الخط الذى يمر بالنقطتين $(2, 8)$ ، $(5, 4)$

ج : (أ) $-4/3$ (ب) $32/3$ (جـ) $4X + 3Y = 32$

١٣-٣٠ أوجد معادلة الخط المستقيم فى حالة ما إذا كان الجزء المقطوع من محور X هو 3 والجزء المقطوع من محور Y هو -5

ج : $X/3 + Y/(-5) = 1$ أو $5X - 3Y = 15$

١٣-٣١ إذا كانت 100 درجة حرارة مئوية تقابل 212 درجة فهرنهيت ، بينما درجة حرارة صفر مئوية تقابل 32 فهرنهيت . مفترضاً وجود علاقة خطية بين درجات الحرارة المئوية ودرجات الحرارة فهرنهيت (يرمز للدرجة المئوية بالرمز C والفهرنهيت بالرمز F) . أوجد

(ا) المعادلة التى تربط F ، C (ب) درجة الحرارة فهرنهيت المقابلة لدرجة الحرارة المئوية 80

(د) درجة الحرارة المئوية المقابله لدرجة الحرارة 68 فهرنهيت .

ج : (ا) $F = {}^9/_5 C + 32$ ، (ب) $176°F$ ، (جـ) $20°C$.

خط المربعات الصغرى :

١٣-٣٢ وفق خط المربعات الصغرى للبيانات بالجدول التالى باستخدام

X	3	5	6	8	9	11
Y	2	3	4	6	5	8

(ا) X كتغير مستقل

(ب) X كتغير تابع

عبر عن البيانات بالرسم وكذلك ارسم خط المربعات الصغرى مستخدما نفس المجموعة من المحاور .

ج : (ا) $Y = -{}^1/_3 + {}^5/_7 X$ أو $Y = -0.333 + 0.714X$ (ب) $X = 1 + {}^9/_7 Y$ أو $X = 1.00 + 1.29Y$.

١٣-٣٣ لبيانات المسألة السابقة أوجد (ا) قيم Y عندما $X = 5$ وعند $X = 12$ (ب) قيمة X عند $Y = 7$.

ج : (ا) 3.24, 8.24 (ب) 10.00

١٣-٣٤ (ا) استخدم طريقة التمهيد باليد للحصول على معادلة الخط الذى يمهد البيانات بالمسألة ١٣-٣٢

(ب) أجب عن المسألة ١٣-٣٣ باستخدام نتيجة الجزء (ا)

١٣-٣٥ الجدول التالى يوضح الدرجات فى امتحان نهائى فى مادتى الجبر والطبيعة التى حصل عليها 10 طلاب اختيروا عشوائيا من مجموعة كبيرة من الطلبة.

(ا) عبر عن هذه البيانات بالرسم

(ب) أوجد خط المربعات الصغرى الذى يوفق هذه البيانات ، مستخدما X كمتغير مستقل.

(ج) أوجد خط المربعات الصغرى الذى يوفق هذه البيانات ، مستخدما Y كمتغير مستقل.

(د) إذا حصل طالب على الدرجة 79 فى الجبر ما هى الدرجة المتوقع أن يحصل عليها فى الطبيعة.

(ه) إذا حصل طالب على الدرجة 95 فى الطبيعة ، ما هى الدرجة المتوقع أن يحصل عليها فى الجبر ؟

جبر (Y)	77	84	68	98	71	87	65	93	80	75
الطبيعة (X)	74	89	72	95	80	91	72	86	78	82

ج : (ب) $Y = 29.13 + 0.661X$

(ج) $X = -14.39 + 1.15Y$

(د) 79 (ه) 95

١٢-٣٦ الجدول التالى يوضح عدد عمال الزراعة فى الولايات المتحدة (بالمليون) خلال السنوات 1957 — 1949

(ا) عبر عن البيانات بالرسم.

(ب) أوجد خط المربعات الصغرى الذى توفق هذه السلسلة الزمنية وعبر عنها بالرسم.

(ج) احسب القيم الاتجاهية وقارنها بالقيم الفعلية.

(د) قدر عدد عمال الزراعة فى العام 1948 وقارنها بالقيمة الفعليه. (10.36 مليون)

(ه) تنبؤ بعدد عمال الزراعة فى العام 1958 (القيمة الحقيقية هى 7.53 مليون). ناقش المصادر الممكنة للخطأ فى مثل هذا التنبؤ.

السنة	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957
عدد عمال الزراعة (بالمليون)	9·96	9·93	9·55	9·15	8·86	8·64	8·36	7·82	7·58

المصدر : مصلحة الزراعة

ج : (ب) $Y = 8.872 - 0.312X$ ، حيث Y هو عدد عمال الزراعة بالمليون ، معبرا عنهم بالسنوات ونقطة الأصل هى أول يوليو 1953 .

(د) 10.43 مليون

(هـ) 7.31 مليون

١٣-٣٧ الرقم القياسى لأسعار الرعاية الطبية للمستهلكين بالولايات المتحدة موضح بالجدول للسنوات 1957 — 1950 . (فترة الأساس هى 1949 — 1947 ويعبر عنها بالقيمة 100 والتى تعنى 100% . الرقم القياسى لسنة 1952 على سبيل المثال ، هو 117.2 ويوضح أنه خلال سنة 1952 كان متوسط أسعار الرعاية الطبية هو 117.2% مما كانت عليه فى فترة الأساس أى ، زادت الأسعار بنسبة 17.2%) .

(ا) عبر عن البيانات بالرسم .

(ب) أوجد خط المربعات الصغرى الذى يوفق البيانات وعبر عنه بالرسم .

(ج) أحسب القيم الاتجاهية وقارنها بالقيم الفعلية .

(د) تنبؤ بالرقم القياسى لأسعار الخدمات الطبية خلال عام 1958 وقارن بالقيمة الفعلية (144.4) .

(هـ) فى أى سنة تتوقع أن تصل أسعار الرعاية الطبية إلى ضعف أسعار سنة 1949 — 1947 مفترضا استمرار خط الاتجاه العام الحالى ؟

السنة	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957
الرقم القياسى لأسعار الرعاية الطبية للمستهلكين (1947 — 1949 = 100)	106·0	111·1	117·2	121·3	125·2	128·0	132·6	138·0

المصدر : مكتب احصاءات العمل

ج : (ب) $Y = 122.42 + 21.19X$ إذا كانت وحدة X نصف السنة ونقطة الأصل هى ١ يناير 1954 أو $Y = 107.09 + 4.38X$ إذا كانت وحدة X هى السنة ونقطة الأصل هى 1 يوليو 1950

(د) 142.1 .

(هـ) 1971 .

منحنى المربعات الصغرى :

١٣–٣٨ وفق باستخدام طريقة المربعات الصغرى معادلة القطع المكافئ ، $Y=a_0+a_1X+a_2X^2$ للبيانات بالجدول المرفق .

X	0	1	2	3	4	5	6
Y	2·4	2·1	3·2	5·6	9·3	14·6	21·9

ج :
$$Y \quad 5{\cdot}51 - 3{\cdot}20(X-3)0{\cdot}733(X-3)^2$$
$$Y \quad 2{\cdot}51 - 1{\cdot}20X + 0{\cdot}733X^2$$

١٣–٣٩ الزمن الكلى المطلوب لايقاف سيارة عقب مشاهدة خطر يتكون من زمن رد الفعل (وهو الوقت بين تميز الخطر واستخدام الفرامل) وزمن الايقاف (وهو الوقت التالى لاستخدام الفرامل) . الجدول التالى يعطى مسافة الإيقاف d (بالمتر) لعربة تسير بسرعة v (متر فى الدقيقة) فى لحظة ظهور الخطر .

(ا) عبر بيانيا عن d المقابلة لـ v

(ب) وفق قطع مكافئ بالصورة $d = a_0 + a_1v + a_2v^2$ باستخدام طريقة المربعات الصغرى لهذه البيانات .

(جـ) قدر d عند $v = 45$ m/s و $v = 80$ m/s.

السرعـه v (m/s)	20	30	40	50	60	70
مسافة التوقف d (m)	54	90	138	206	292	396

ج : (ب) $d = 41{\cdot}77 - 1{\cdot}096v + 0{\cdot}08786v^2$

(جـ) 170 m, 516 m

١٣–٤٠ الجدول التالى يوضح معدل المواليد لكل 1000 من السكان فى الولايات المتحدة خلال السنوات 1915 — 1955 على فترات كل منها 5 سنوات .

(ا) عبر بيانيا عن هذه البيانات

(ب) وفق قطع مكافئ باستخدام المربعات الصغرى لهذه البيانات .

(جـ) احسب القيم الاتجاهية وقارن بالقيم الفعلية .

(د) وضح السبب فى أن المعادلة التى حصلت عليها فى (ب) غير مفيدة لأهداف الاستنباط .

السنة	1915	1920	1925	1930	1935	1940	1945	1950	1955
معدل المواليد لكل 1000 من السكان	25.0	23.7	21.3	18.9	16.9	17.9	19.5	23.6	24.6

المصدر : مصلحة الصحة والتعليم والرعاية الاجتماعية

ج : $Y = 18.16 - 0.1083X + 0.4653X^2$ ، حيث Y هو معدل المواليد لكل 1000 من السكان ووحدات X هى 5 سنوات ونقطة الأصل عند أول يوليو 1935.

١٣-٤١ عدد البكتريا Y الموجودة فى وحدة حجم معين فى مزرعة بكتريا بعد X ساعة مبينة فى الجدول التالى .

(أ) ارسم هذه البيانات مستخدما ورق رسم بيانى ذى تقسيم نصف - لوغاريتمى حيث يستخدم المقياس اللوغاريتمى لـ Y والمقياس الحسابى لـ X .

(ب) وفق منحنى المربعات الصغرى على الصورة $Y = ab^X$ للبيانات ووضح السبب فى أن هذه المعادلة بالذات يجب أن تعطى نتائج جيدة .

(ج) قارن قيم Y التى تحصل عليها من هذه المعادلة مع القيم الفعلية

(د) قدر قيمة Y عند $X = 7$.

عدد الساعات	0	1	2	3	4	5	6
عدد البكتريا فى وحدة حجم	32	47	65	92	132	190	275

ج : (ب) $Y = 32.14(1.427)^X$ أو $Y = 32.14\,e^{0.3556X}$ حيث . . . $e = 2.718$ هو الأساس الطبيعى للوغاريتم .

(د) 387

١٣-٤٢ فى المسألة السابقة وضح كيف يمكن الحصول على المعادلة المطلوبة برسم البيانات على ورق رسم بيانى ذى التقسيم النصف لوغاريتمى وذلك دون استخدام طريقة المربعات الصغرى .

الفصل الرابع عشر

نظـــرية الارتبـــاط

الارتباط والانحدار :

فى الفصل السابق أخذنا فى الاعتبار مشكلة الانحدار أو تقدير متغير (المتغير التابع) من متغير أو أكثر على صلة به (المتغيرات المستقلة) . وفى هذا الفصل سندرس مشكلة على علاقة وثيقة بالمشكلة السابقة وهى مشكلة الأرتباط ، أو درجة العلاقة بين المتغيرات ، والتى تهدف إلى تحديد مدى جودة وصف معادلة خطية أو غيرها للعلاقة بين المتغيرات .

إذا كانت جميع قيم المتغيرات تحقق معادلة ما بالضبط فنسمى هذه المتغيرات بأنها مرتبطة ارتباطا كاملا أو أن هناك ارتباط كامل بينهم . بهذا فإن محيط الدائرة C ونصف قطرها r لجميع الدوائر مرتبطان ارتباطا كاملا نظرا لأن $C = 2\pi r$ أما إذا قذفنا زهرتين 100 مرة متتالية فإنه لا توجد علاقة بين النقط المقابلة فى كل زهرة (إلا إذا كان الزهر متحيزاً) أى ، أنهم غير مرتبطين . الطول كتغير والوزن كتغير للأشخاص قد يظهر بعض الارتباط .

إذا كان عدد المتغيرات اثنين فقط فإننا نتحدث عن الارتباط البسيط والانحدار البسيط . إذا كان هناك أكثر من متغيرين فإننا نتحدث عن الارتباط المتعدد والانحدار المتعدد . فى هذا الفصل ، سندرس الارتباط البسيط فقط . أما الارتباط المتعدد والانحدار المتعدد فسوف يتم دراستهما فى الفصل الخامس عشر .

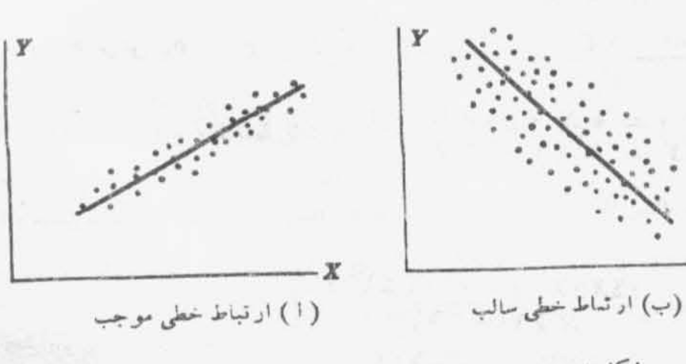
الارتباط الخطى :

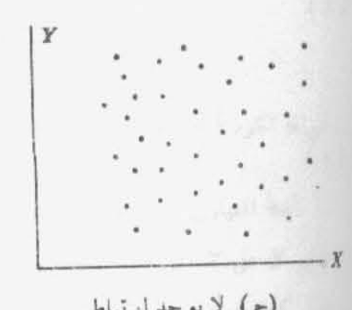
اعتبر أن Y, X هما المتغيران موضع الدراسة ، فإن شكل الانتشار يوضح مكان النقط (X, Y) فى نظام للاحداثيات المتعامدة . فإذا كانت جميع النقط فى شكل الانتشار تبدو أنها تقع بالقرب من خط ، كما فى (ا) ، (ب) بالشكل ١٤-١ ، فإن الارتباط يسمى خطيا . فى مثل هذه الحالات ، كما درسنا فى الفصل الثالث عشرة ، فإنه من الملائم أن نستخدم معادلة خطية لأغراض الأنحدار أو التقدير .

فإذا كانت Y تتجه للزيادة كلما ازدادت X ، كما فى (ا) ، فإن الارتباط يسمى ارتباطاً موجباً أو ارتباطاً طرديا . وإذا اتجهت Y للنقصان كلما زادت X ، كما فى (ب) ، فإن الارتباط يسمى ارتباطاً سالباً أو ارتباط عكسيا .

إذا كانت جميع النقط تتجه لأن تقع بالقرب من منحنى ، فإن الارتباط يسمى ارتباطا غير خطى وفى هذه الحالة فإن معادلة غير خطية تكون ملائمة للانحدار أو التقدير ، كما سبق أن شاهدنا فى الفصل الثالث عشر . ومن الواضح أن الارتباط غير الخطى يمكن أحيانا أن يكون موجبا كما يمكن أن يكون سالبا .

إذا لم يكن هناك ما يشير إلى وجود علاقة بين المتغيرات ، كما فى الشكل ١٤-١ (جـ) ، فإننا نقول إنه لا يوجد ارتباط بينهم ، أو أنهم غير مرتبطين .





(أ) ارتباط خطى موجب (ب) ارتباط خطى سالب (جـ) لا يوجد ارتباط

شكل ١٤-١

مقاييس الارتباط :

يمكن أن نحدد بصورة وصفية مدى جودة وصف خط أو منحنى العلاقة بين المتغيرات بملاحظة شكل الانتشار مباشرة . على سبيل المثال ، من نلاحظ أن الخط المستقيم أكثر جدوى فى وصف العلاقة بين X و Y فى بيانات الشكل ١٤-١ (أ) عنه فى وصف بيانات الشكل ١٤ - ١ (ب) وهذا راجع إلى حقيقة أن انتشار النقط حول الخط فى الشكل ١٤-١ (أ) أقـل .

معادلة الانحدار باستخدام المربعات الصغرى :

سندرس أولا مدى جودة تعبير خط مستقيم عن العلاقة بين متغيرين . لهذا فإننا نحتاج أولا لمعادلات الانحدار باستخدام المربعات الصغرى التى حصلنا عليها فى الفصل الثالث عشر . كما سبق أن أوضحنا ، فإن معادلة المربعات الصغرى لخط انحدار Y على X هى

$$Y = a_0 + a_1 X \quad (١)$$

حيث نحصل على a_0 ، a_1 من المعادلات الاعتدالية

$$\left.\begin{aligned} \Sigma Y &= a_0 N + a_1 \Sigma X \\ \Sigma XY &= a_0 \Sigma X + a_1 \Sigma X^2 \end{aligned}\right\} \quad (٢)$$

ومنها

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{(\Sigma Y)(\Sigma X^2) - (\Sigma X)(\Sigma XY)}{N\,\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2} \\ a_1 &= \frac{N\,\Sigma XY - (\Sigma X)(\Sigma Y)}{N\,\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2} \end{aligned}\right\} \qquad (٣)$$

كذلك ، فإن خط انحدار X على Y هــو

$$X = b_0 + b_1 Y \qquad (٤)$$

حيث نحصل على b_0 ، b_1 من المعادلات الاعتدالية

$$\left.\begin{aligned} \Sigma X &= b_0 N + b_1 \Sigma Y \\ \Sigma XY &= b_0 \Sigma X + b_1 \Sigma Y^2 \end{aligned}\right\} \qquad (٥)$$

ومنهـا

$$\left.\begin{aligned} b_0 &= \frac{(\Sigma X)(\Sigma Y^2) - (\Sigma Y)(\Sigma XY)}{N\,\Sigma Y^2 - (\Sigma Y)^2} \\ b_1 &= \frac{N\,\Sigma XY - (\Sigma X)(\Sigma Y)}{N\,\Sigma Y^2 - (\Sigma Y)^2} \end{aligned}\right\} \qquad (٦)$$

المعادلات (١) ، (٤) يمكن كتابتها أيضا على الصورة التالية

$$y = \left(\frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2}\right)x \quad \text{و} \quad x = \left(\frac{\Sigma xy}{\Sigma y^2}\right)y \qquad (٧)$$

حيث $x = X - \bar{X}$ و $y = Y - \bar{Y}$.

وتتساوى معادلتا الانحدار فى حالة وحيدة فقط إذا كانت جميع النقط فى شكل الانتشار تقع على خط . فى هذه الحالة فإن هناك ارتباطا خطيا تاماً بين X و Y .

الخطأ المعيارى للتقديرات :

إذا كانت Y_{est} تمثل تقديراً لقيمة Y المقابلة لقيمة معينة لـ X ، مستخدمين المعادلة (١) ، فإن مقياس لانتشار حول خط انحدار Y على X نحصل عليه من الكمية

$$s_{Y.X} = \sqrt{\frac{\Sigma (Y - Y_{est})^2}{N}} \qquad (٨)$$

وتسمى بالخطأ المعيارى لتقدير Y على X .

إذا استخدمنا خط الانحدار (٤) ، فإن الخطأ المعيارى لتقدير X على Y يعرف كالآتى :

$$s_{X.Y} = \sqrt{\frac{\Sigma (X - X_{est.})^2}{N}} \qquad (٩)$$

وبشكل عام فإن $S_{Y.X} \neq S_{X.Y}$.

المعادلة (٨) يمكن كتابتها على الصورة

$$s^2_{Y.X} = \frac{\Sigma Y^2 - a_0 \Sigma Y - a_1 \Sigma XY}{N} \qquad (١٠)$$

والتى قد تكون أكثر ملائمة للحساب (أنظر المسألة ١٤ – ٣) . ويمكن الحصول على تعبير مماثل للمعادلة (٩) .

الخطأ المعيارى للتقدير له خصائص مماثلة لخصائص الانحراف المعيارى . على سبيل المثال ، إذا رسمنا خطوطاً موازية لخط انحدار Y على X على أبعاد رأسية من الخط تساوى $S_{Y.X}$ ، $2S_{Y.X}$ ، $3S_{Y.X}$ فإننا سنجد ، إذا كانت N كبيرة بشكل كاف ، أن 68% ، 95% ، 99.7% من نقط العينة تقع بين هذه الخطوط على الترتيب .

كما أن الانحراف المعيارى المعدل $\hat{s} = \sqrt{\frac{N}{N-1}}\, s$ وجد مفيداً فى حالة العينات الصغيرة ، كذلك فإن الخطأ المعيارى المعدل للتقدير $\hat{s}_{Y.X} = \sqrt{\frac{N}{N-2}}\, s_{Y.X}$ أيضاً مفيد . ولهذا السبب فإن بعض الإحصائيين يفضلون تعريف (٨) أو (٩) بوضع $N - 2$ بدلا من N فى المقام .

الاختلاف المفسر والاختلاف غير المفسر :

يعرف الاختلاف الكلى لـ Y بأنه $\Sigma(Y - \bar{Y})^2$ ، أى ، مجموع مربعات انحرافات قيم Y عن الوسط $\bar{Y}$. كما هو موضح بالمسألة ١٤ – ب، يمكن كتابته على الصورة

$$\Sigma (Y - \bar{Y})^2 = \Sigma (Y - Y_{est.})^2 + \Sigma (Y_{est.} - \bar{Y})^2 \qquad (١١)$$

ويسمى الحد الثانى بالاختلاف المفسر ، وهذه التسمية راجعة إلى أن الاختلافات $Y_{est.} - \bar{Y}$ لها نموذج محدد ، بينما الاختلافات $Y_{est.}$ ، Y تسلك سلوكاً عشوائياً أو بصورة لايمكن التنبؤ بها .

معامل الارتباط :

النسبة بين الاختلافات المفسرة والاختلاف الكلى تسمى معامل التحديد . فإذا كانت الاختلافات المفسرة تساوى صفر ، أى أن الاختلاف الكلى جميعه غير مفسر ، فإن هذه النسبة تساوى الصفر . أما إذا كانت الاختلافات الغير مفسرة تساوى صفر ، أى أن الاختلاف الكلى جميعه مفسر ، فإن النسبة تساوى واحداً . وفى الحالات الأخرى تقع هذه النسبة بين الصفر والواحد .

بما أن النسبة دائماً غير سالبة ، فنرمز لها بالرمز r^2 . الكية r ، تسمى بمعامل الارتباط وتعرف كالآتى :

$$\sqrt{\frac{\text{الاختلاف المفسر}}{\text{الاختلاف الكلى}}} = \pm\sqrt{\frac{\Sigma(Y_{est.}-\bar{Y})^2}{\Sigma(Y-\bar{Y})^2}} \qquad (١٢)$$

ويتراوح بين -1 ، $+1$. العلامات $\pm$ تستخدم للارتباط الخطى الموجب والارتباط الخطى السالب . لاحظ أن r كية لا تميز لها أى أنها لا تعتمد على الوحدات المستخدمة .

باستخدام (٨) و (١١) وحقيقة أن الانحراف المعيارى لـ Y هو

$$s_Y = \sqrt{\frac{\Sigma(Y-\bar{Y})^2}{N}} \qquad (١٣)$$

نجد أن (١٢) يمكن كتابتها ، بإهمال الإشارة ، كالآتى :

$$r = \sqrt{1-\frac{s^2_{Y.X}}{s^2_Y}} \quad \text{أو} \quad s_{Y.X} = s_Y\sqrt{1-r^2} \qquad (١٤)$$

ويمكن إيجاد تعبيرات مماثلة إذا أبدلنا X و Y

فى حالة الارتباط الخطى فإن الكية r تظل كما هى بصرف النظر عما إذا اعتبرنا X أو Y هو المتغير المستقل . بهذا فإن r يعد مقياساً جيداً للارتباط الخطى .

ملاحظة خاصة بمعامل الارتباط :

التعاريف (١٢) أو (١٤) لمعامل الارتباط تعاريف عامة ويمكن استخدامها للعلاقة الغير خطية وكذلك للعلاقة الخطية ، والاختلاف الوحيد هو أن Y_{est} تحسب من معادلة انحدار غير خطية بدلا معادلة الانحدار الخطية والاشارات $\pm$ تحذف . فى هــذه الحالة المعادلة (٨) التى تعرف الخطأ المعيارى للتقدير تعد تعريفاً عاماً .

المعادلة (١٠) والتى تطبق فى حالة الانحدار الخطى فقط ، يجب تعديلها . فإذا كانت المعادلة المقدرة ، على سبيل المثال ، هى

$$Y = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_{n-1}X^n \qquad (١٥)$$

فإن المعادلة (١٠) تستبدل بالمعادلة

$$s^2_{Y.X} = \frac{\Sigma Y^2 - a_0\Sigma Y - a_1\Sigma XY - \dots - a_{n-1}\Sigma X^{n-1}Y}{N} \qquad (١٦)$$

وفى هذه الحالة فإن الخطأ المعيارى المعدل للتقدير (أنظر المبررات بالصفحة ٣٩١ هو $\sqrt{\frac{N}{N-n}}\,s_{Y.X}$ حيث المقدار $N - n$ يسمى بعدد درجات الحرية .

يجب التأكيد على أن قيمة r المحسوبة فى أية حالة تقيس درجة العلاقة بالنسبة إلى نوع المعادلة المفترضة . فإذا افترضنا معادلة خطية وإذا نتج عن المعادلة (١٢) أو (١٤) قيمة لـ r تقترب من الصفر ، فهذا يعنى أنه لايوجد تقريباً علاقة خطية بين المتغيرات . ولكن هذا لايعنى أنه لايوجد علاقة بين المتغيرات على الإطلاق ، حيث أنه قد يكون هناك بالفعل علاقة كبيرة غير خطية بين المتغيرات . وبصورة أخرى فإن معامل الارتباط يقيس مدى جودة توفيق المعادلة المفترضة للبيانات . مالم يوضح خلاف ذلك ، فإن مصطلح معامل الارتباط يستخدم ليعنى الارتباط الخطى .

ويجب إيضاح أن وجود معامل إرتباط مرتفع (أى يقترب من 1 أو 1 −) لايعنى وجود علاقة تبعية مباشرة بين المتغيرات . فقد يكون هناك معامل ارتباط مرتفع بين عدد الكتب المنشورة فى كل سنة وعدد مباريات الكرة الملعوبة فى كل سنة . مثل هذه الأمثلة يشار إليها بأنها ارتباط لامعنى له أو ارتباط زائف .

صيغة عزم حاصل الضرب لمعامل الارتباط الخطى :

إذا افترضنا وجود علاقة خطية بين متغيرين ، فإن المعادلة (١٢) تصبح

$$r = \frac{\Sigma xy}{\sqrt{(\Sigma x^2)(\Sigma y^2)}} \qquad (١٧)$$

حيث $x = X - \bar{X}$ و $y = Y - \bar{Y}$ (أنظر المسألة ١٤ − ١٠) . هذه الصيغة ، والتى تعطى تلقائياً الإشارة المناسبة لـ r ، تسمى صيغة عزم حاصل الضرب وتظهر بشكل واضح التماثل بين X و Y

فإذا كتبنا

$$s_{XY} = \frac{\Sigma xy}{N}, \qquad s_X = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{N}}, \qquad s_Y = \sqrt{\frac{\Sigma y^2}{N}} \qquad (١٨)$$

فإن S_X ، S_Y تعبر عن الانحرافات المعيارية للمتغيرات X و Y على الترتيب ، بينما s^2_Y و s^2_X تعبر عن تبايناتهما − المقدار الجديد S_{XY} يسمى تغاير X و Y . باستخدام رموز المعادلتين (١٧) ، (١٨) يمكن أن نكتب

$$r = \frac{s_{XY}}{s_X s_Y} \qquad (١٩)$$

لاحظ أن r لاتعتمد على وحدات قياس X و Y ، كذلك لاتعتمد على اختيار نقطة الأصل .

صيغة مختصرة للعمليات الحسابية :

الصيغة (١٧) يمكن كتابتها بصورة مكافئة كالآتى :

$$r = \frac{N\Sigma XY - (\Sigma X)(\Sigma Y)}{\sqrt{[N\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2][N\Sigma Y^2 - (\Sigma Y)^2]}} \qquad (٢٠)$$

وهذه الصيغة تستخدم غالباً عند حساب r (أنظر المسائل ١٤ − ١٥ ، ١٤ − ١٦) .

وبالنسبة للبيانات المجمعة فى جدول لمتغيرين أو التوزيع التكرارى لمتغيرين (أنظر المسألة ١٤ – ١٧) ، فإنه من الملائم استخدام طريقة الترميز كما فى الفصل السابق ، فى مثل هذه الحالة نجد أن المعادلة (٢٠) يمكن كتابتها كالآتى :

$$r = \frac{N\sum f u_X u_Y - (\sum f_X u_X)(\sum f_Y u_Y)}{\sqrt{[N\sum f_X u_X^2 - (\sum f_X u_X)^2][N\sum f_Y u_Y^2 - (\sum f_Y u_Y)^2]}} \qquad (٢١)$$

أنظر المسألة ١٤ – ١٨ . لتسهيل العمليات الحاسبية باستخدام هذه الصيغة ، نستخدم جدول ارتباط (أنظر المسألة ١٤–١٩)

أما للبيانات المجمعة ، فيمكن كتابة الصيغة (١٨) كالآتى :

$$s_{XY} = c_X c_Y \left[\frac{\sum f u_X u_Y}{N} - \left(\frac{\sum f_X u_X}{N}\right)\left(\frac{\sum f_Y u_Y}{N}\right)\right] \qquad (٢٢)$$

$$s_X = c_X \sqrt{\frac{\sum f_X u_X^2}{N} - \left(\frac{\sum f_X u_X}{N}\right)^2} \qquad (٢٣)$$

$$s_Y = c_Y \sqrt{\frac{\sum f_Y u_Y^2}{N} - \left(\frac{\sum f_Y u_Y}{N}\right)^2} \qquad (٢٤)$$

حيث c_Y و c_X هو طول الفئة (مفترضاً أنها ثابتة) المقابلة للمتغيرات Y و X على الترتيب . لاحظ أن (٢٣) ، (٢٤) مكافئتان للصيغة (١١) فى الفصل الرابع ، صفحة ١١٥ .

الصيغة (١٩) يمكن إثبات أنها مكافئة للصيغة (٢١) إذا استخدمنا النتائج (٢٢) – (٢٤) .

خطوط الانحدار ومعامل الارتباط الخطى :

معادلة خط المربعات الصغرى $Y = a_0 + a_1 X$ ، أو معادلة خط انحدار Y على X ، يمكن كتابتها على الصورة

$$Y - \bar{Y} = \frac{r s_Y}{s_X}(X - \bar{X}) \qquad \text{أو} \qquad y = \frac{r s_Y}{s_X} x \qquad (٢٥)$$

كذلك فإن خط انحدار X على Y ، $X = b_0 + b_1 Y$ ، يمكن كتابته كالآتى :

$$X - \bar{X} = \frac{r s_X}{s_Y}(Y - \bar{Y}) \qquad \text{أو} \qquad x = \frac{r s_X}{s_Y} y \qquad (٢٦)$$

ويتساوى ميل الخطوط بالمعادلات (٢٥) ، (٢٦) فى حالة وحيدة فقط وهى إذا كانت $r = \pm 1$. فى مثل هذه الحالة فإن الخطين متطابقان وهناك علاقة خطية كاملة بين المتغيرين X و Y . أما إذا كانت $r = 0$ فإن الخطين متعامدان ولايوجد ارتباط خطى بين Y و X . بهذا فإن معامل الارتباط الخطى يقيس بعد خطى الانحدار عن بعضهما .

لاحظ أنه إذا كتبت المعادلتان (٢٥) ، (٢٦) كالآتى : $Y = a_0 + a_1 X$ $X = b_0 + b_1 Y$

على الترتيب ، إذن $a_1 b_1 = r^2$ (أنظر المسألة ١٤ – ٢٢)

ارتباط الرتب :

بدلا من استخدام قيم محددة للمتغيرات ، أو عندما لايكون مثل هذا التحديد متاح ، فإنه يمكن ترتيب البيانات حسب ترتيب حجمها ، أهميتها ، . . وغير ذلك باستخدام الأرقام $1, 2, \ldots, N$. إذا رتبنا متغيرين X و Y بهذه الطريقة فإن معامل ارتباط الرتب كما يلي :

$$r_{\text{rank}} = 1 - \frac{6\,\Sigma D^2}{N(N^2-1)} \qquad (٢٧)$$

حيث : D = الفروق بين رتب القيم المتقابلة فى X ، Y

N = عدد أزواج القيم (X, Y) فى البيانات

الصيغة (٢٧) تسمى معامل سبيرمان لارتباط الرتب .

ارتباط السلاسل الزمنية :

إذا كان كل من المتغيرات X ، Y يعتمد على الزمن ، فإنه من الممكن أن توجد علاقة بين X ، Y على الرغم من أن مثل هذه العلاقة ليس بالضرورة أن تكون من نوع التبعية المباشرة ومن الممكن أن تنتج « ارتباطاً مزيفاً » . ونحصل على معامل الارتباط ببساطة باعتبار أزواج القيم (X, Y) المقابلة للأزمان المختلفة ومن ثم نستخدم الصيغ السابقة فى الحل . أنظر المسألة ١٤ – ١٨ .

ومن الممكن محاولة ربط قيم المتغير X فى زمن معين بالقيم المقابلة لـ X فى أزمان سابقة . ويسمى مثل هذا الارتباط بالارتباط الذاتى .

ارتباط الصفات :

الطريق التى استخدمت فى هذا الفصل لاتمكننا من الحصول على الارتباط بين متغيرات ليست رقمية بطبيعتها ، مثل صفات الأشخاص (كمثال : لون الشعر ، لون العينين ، ... وغيرها) . لمناقشة ارتباط الصفات ، أنظر الفصل الثانى عشر .

نظرية المعاينة للارتباط :

من الممكن اعتبار أن N من أزواج القيم (X, Y) لمتغيرين لعينة من مجتمع مكون من كل الأزواج الممكنة . بما أن لدينا متغيرين فإننا نسمى هذا المجتمع مجتمعاً ذا متغيرين ، والذى يمكن أن نفترض أنه مجتمع طبيعى ذو متغيرين .

ومن الممكن تصور مجتمع نظرى لمعامل الارتباط والذى نرمز له بالرمز ρ ، والذى يقدر بمعامل ارتباط العينة r . اختبارات الفروض الخاصة بقيم ρ المختلفة تتطلب معرفة توزيع المعاينة لـ r . عندما تكون $\rho = 0$ فإن شكل التوزيع

يكون متماثلا ويمكن استخدام إحصائية تتبع توزيع استودينت . لقيم $\rho \neq 0$ فإن التوزيع ملتو . فى مثل هذه الحالة تستخدم تحويلة ترجع إلى فيشر ينتج عنها إحصائية تتوزع تقريباً كالتوزيع الطبيعى . وتلخص الاختبارات التالية الأساليب المستخدمة .

١ ــ اختبار الفرض $\rho = 0$:

هنا نستخدم حقيقة أن الإحصائية

$$t = \frac{r\sqrt{N-2}}{\sqrt{1-r^2}} \quad (٢٨)$$

لها توزيع استودينت بدرجات حرية $\nu = N - 2$. أنظر المسائل ١٤ - ٣٣ ، ١٤ - ٣٤ .

٢ ــ اختبار الفرض $\rho = \rho_0 \neq 0$:

نستخدم هنا حقيقة أن الإحصائية

$$Z = \tfrac{1}{2}\log_e\left(\frac{1+r}{1-r}\right) = 1{\cdot}1513\log_{10}\left(\frac{1+r}{1-r}\right) \quad (٢٩)$$

حيث ... $e = 2.71828$ وهذه الإحصائية تتوزع بشكل تقريبى كالتوزيع الطبيعى متوسطه وانحرافه المعيارى كما يلى :

$$\mu_Z = \tfrac{1}{2}\log_e\left(\frac{1+\rho_0}{1-\rho_0}\right) = 1{\cdot}1513\log_{10}\left(\frac{1+\rho_0}{1-\rho_0}\right), \qquad \sigma_Z = \frac{1}{\sqrt{N-3}} \quad (٣٠)$$

هذه النتيجة يمكن أيضاً استخدامها للحصول على حدود الثقة لمعاملات الارتباط (أنظر المسائل ١٤ - ٣٥ ، ١٤ - ٣٦) . التحويلة (٢٩) تسمى تحويلة Z للعالم فيشر .

٣ ــ معنوية الفرق بين معاملات الارتباط :

لتحديد ما إذا كان معاملا الارتباط r_1, r_2 المسحوبان من عينتين N_1, N_2 على الترتيب ، يختلفان عن بعضهما اختلافاً معنوياً ، نحسب Z_1, Z_2 المقابلين لـ r_1, r_2 باستخدام المعادلة (٢٩) . ثم نستخدم بعد ذلك حقيقة أن إحصائية الاختبار .

$$z = \frac{Z_1 - Z_2 - \mu_{Z_1-Z_2}}{\sigma_{Z_1-Z_2}} \quad (٣١)$$

حيث

$$\mu_{Z_1-Z_2} = \mu_{Z_1} - \mu_{Z_2}, \qquad \sigma_{Z_1-Z_2} = \sqrt{\sigma^2_{Z_1} + \sigma^2_{Z_2}} = \sqrt{\frac{1}{N_1-3} + \frac{1}{N_2-3}}$$

تتوزع توزيعاً طبيعياً (أنظر المسألة ١٣ - ٣٧) .

نظرية المعاينة للانحدار :

معادلة الانحدار $Y = a_0 + a_1 X$ نحصل عليها على أساس بيانات العينة . فى أغلب الأحيان نهتم بمعادلة الانحدار للمجتمع الذى سحبت منه العينة . وفيما يلى اختباران خاصان بمثل هذا المجتمع .

١ — اختبار الفرض $a_1 = A_1$:

لاختبار الفرض أن معامل الانحدار a_1 يساوى قيمة محددة A_1 ، فإننا نستخدم حقيقة أن الاحصائية

$$t = \frac{a_1 - A_1}{s_{Y.X}/s_X}\sqrt{N-2} = \frac{a_1 - A_1}{\sqrt{1-r^2}}\sqrt{N-2} \tag{٣٢}$$

تتبع توزيع استودينت بدرجات حرية $N - 2$. ويمكن استخدام ذلك للحصول على فترات ثقة لمعامل الانحدار للمجتمع باستخدام قيم العينة . أنظر المسائل ١٤ – ٣٨ و ١٤ – ٣٩ .

٢ — اختبار الفرض للقيم المتنبا بها :

إذا كانت Y_0 تعبر عن القيمة المتنبأ بها لـ Y المقابلة لـ $X = X_0$ كما هى مقدرة من معادلة الانحدار المحسوبة من العينة . أى أن $Y_0 = a_0 + a_1 X_0$. اعتبر أن Y_p تعبر عن قيمة Y المتنبأ بها المقابلة لـ $X = X_0$ للمجتمع . إذن الإحصائية

$$t = \frac{Y_0 - Y_p}{s_{Y.X}\sqrt{N + 1 + (X_0 - \bar{X})^2/s_X^2}}\sqrt{N-2} = \frac{Y_0 - Y_p}{\hat{s}_{Y.X}\sqrt{1 + 1/N + (X_0 - \bar{X})^2/(N s_X^2)}} \tag{٣٣}$$

تتبع توزيع استودينت بدوجات حرية $N - 2$. ومنها يمكن أن نحصل على حدود ثقة لقيم المجتمع المتنبأ بها . (أنظر المسألة ١٤ – ٤٠)

٣ — اختبار الفرض لقيم المتوسط المتنبا بها :

إذا كانت Y_0 تعبر عن قيمة Y المتنبأ بها المقابلة لـ $X = X_0$ كما هى مقدرة من معادلة الانحدار المحسوبة من العينة ، أى أن $Y_0 = a_0 + a_1 X_0$. اعتبر أن $\bar{Y}_p$ تعبر عن القيمة المتوسطة لـ Y المتنبأ بها المقابلة لـ $X = X_0$ للمتجمع . إذن الأحصائية

$$t = \frac{Y_0 - \bar{Y}_p}{s_{Y.X}\sqrt{1 + (X_0 - \bar{X})^2/s_X^2}}\sqrt{N-2} = \frac{Y_0 - \bar{Y}_p}{\hat{s}_{Y.X}\sqrt{1/N + (X_0 - \bar{X})^2/(N s_X^2)}} \tag{٣٤}$$

تتبع توزيع أستوديث بدرجات حرية $N - 2$. ومنها يمكن أن نحصل على حدود الثقة لقيم متوسط المجتمع المتنبأ بها . (أنظر المسألة ١٤ – ٤١) .

مسـائل محـلولة

اشكال الانتشار وخطوط الانحدار :

١٤ - ١ الجدول ١٤ - ١ يوضح أوزان عينة مكونة من 12 أب (X) وأكبر الأبناء Y .

(أ) ارسم شكل الانتشار

(ب) أوجد خط انحدار Y على X باستخدام المربعات الصغرى .

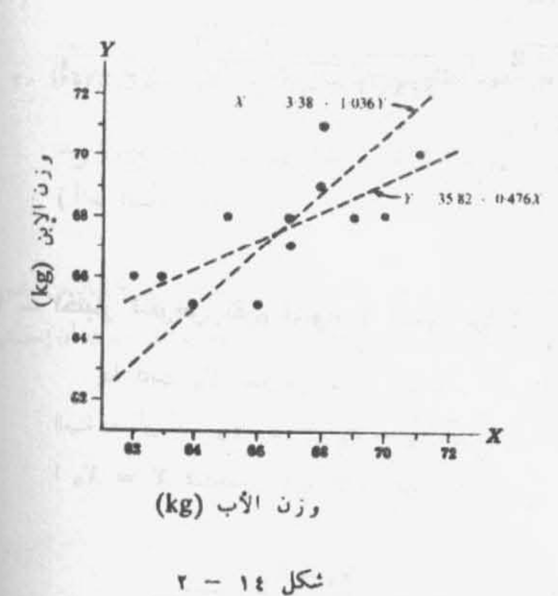
(ﺣ) أوجد خط انحدار X على Y باستخدام المربعات الصغرى .

جـدول ١٤ - ١

الوزن X للأب (kg)	65	63	67	64	68	62	70	66	68	67	69	71
الوزن Y للإبن (kg)	68	66	68	65	69	66	68	65	71	67	68	70

الحـل :

(أ) نحصل على شكل الانتشار بتوقيع النقط (X, Y) فى نظام للأحداثيات المتعامدة موضح كما هو بالشكل ١٤ - ٢ .



شكل ١٤ - ٢

(ب) خط انحدار Y على X يعطى بالمعادلة $Y = a_0 + a_1X$ حيث a_0 و a_1 نحصل عليهما بحل المعادلات الاعتدالية

$$\left.\begin{aligned} \Sigma Y &= a_0N + a_1 \Sigma X \\ \Sigma XY &= a_0 \Sigma X + a_1 \Sigma X^2 \end{aligned}\right\}$$

المجاميع موضحة بالجدول ١٤ - ٢ ، وبهذا تصبح المعادلات الاعتدالية

$$\left.\begin{aligned} 12a_0 + 800a_1 &= 811 \\ 800a_0 + 53\,418a_1 &= 54\,107 \end{aligned}\right\}$$

ومنها نجد أن $a_0 = 35.82$ و $a_1 = 0.476$ بحيث تكون $Y = 35.82 + 0.476X$

رسم هذه المعادلة موضح بالشكل ١٤ - ٢ .

جـــدول ١٤ – ٢

X	Y	X^2	XY	Y^2
65	68	4225	4420	4624
63	66	3969	4158	4356
67	68	4489	4556	4624
64	65	4096	4160	4225
68	69	4624	4692	4761
62	66	3844	4092	4356
70	68	4900	4760	4624
66	65	4356	4290	4225
68	71	4624	4828	5041
67	67	4489	4489	4489
69	68	4761	4692	4624
71	70	5041	4970	4900
$\Sigma X = 800$	$\Sigma Y = 811$	$\Sigma X^2 = 53418$	$\Sigma XY = 54107$	$\Sigma Y^2 = 54849$

طريقة أخرى :

$$a_0 = \frac{(\Sigma Y)(\Sigma X^2) - (\Sigma X)(\Sigma XY)}{N \Sigma Y^2 - (\Sigma Y)^2} = 35{\cdot}82, \qquad a_1 = \frac{N\Sigma XY - (\Sigma Y)(\Sigma Y)}{N \Sigma X^2 - (\Sigma X)^2}$$

(ﺟ) خط انحدار X على Y يعطى بالمعادلة $X = b_0 + b_1 Y$ حيث t ، b_0 نحصل عليهما بحل المعادلات الاعتدالية :

$$\left.\begin{aligned} \Sigma X &= b_0 N - b_1 \Sigma Y \\ \Sigma XY &\;\; b_0 \Sigma Y - b_1 \Sigma Y^2 \end{aligned}\right\}$$

باستخدام المجاميع بالجدول ١٤ – ٢ ، تصبح هذه

$$\left.\begin{aligned} 12b_0 + 811b_1 &= 800 \\ 811b_0 + 54849b_1 &= 54107 \end{aligned}\right\}$$

ومنها نجد أن $b_0 == -3.38$ $b_1 = 1.036$. بحيث تكون $X = -3.83 + 1.036\,Y$.

رسم هذه المعادلة موضح بالشكل ١٤ – ٢ .

طريقة أخرى :

$$b_0 = \frac{(\Sigma X)(\Sigma Y^2) - (\Sigma Y)(\Sigma XY)}{N \Sigma Y^2 - (\Sigma Y)^2} = -3{\cdot}38. \qquad b_1 = \frac{N\Sigma XY - (\Sigma Y)(\Sigma X)}{N \Sigma Y^2 - (\Sigma Y)^2} = 1{\cdot}036$$

١٤-٢ حل المسألة ١٤ – ١ (ب) و ١٤ – ١ (ﺟ) باستخدام خطوط الانحدار

$$y = \left(\frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2}\right) x \quad , \quad x = \left(\frac{\Sigma xy}{\Sigma y^2}\right) y$$

حيث $x = X - \bar{X}$, $y = Y - \bar{Y}$.

الحـــل :

الطريقة الأولى : يمكن تنظيم العمل كما فى الجدول ١٤ − ٣ .

جـــدول ١٤ - ٤

X	Y	$x = X - \bar{X}$	$y = Y - \bar{Y}$	x^2	xy	y^2
65	68	−1·7	0·4	2·89	−0·68	0·16
63	66	−3·7	−1·6	13·69	5·92	2·56
67	68	0·3	0·4	0·09	0·12	0·16
64	65	−2·7	−2·6	7·29	7·02	6·76
68	69	1·3	1·4	1·69	1·82	1·96
62	66	−4·7	−1·6	22·09	7·52	2·56
70	68	3·3	0·4	10·89	1·32	0·16
66	65	−0·7	−2·6	0·49	1·82	6·76
68	71	1·3	3·4	1·69	4·42	11·56
67	67	0·3	−0·6	0·09	−0·18	0·36
69	68	2·3	0·4	5·29	0·92	0·16
71	70	4·3	2·4	18·49	10·32	5·76
$\Sigma X = 800$ $\bar{X} = 800/12$ $= 66{\cdot}7$	$\Sigma Y = 811$ $\bar{Y} = 811/12$ $= 67{\cdot}6$			$\Sigma x^2 = 84{\cdot}68$	$\Sigma xy = 40{\cdot}34$	$\Sigma y^2 = 38{\cdot}92$

خط انحدار Y على X يساوى $y = \left(\frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2}\right) x = \left(\frac{40{\cdot}34}{84{\cdot}68}\right) x = 0{\cdot}476x$ or $Y - 67{\cdot}6 = 0{\cdot}476(X - 66{\cdot}7)$.

خط انحدار X على Y يساوى $x = \left(\frac{\Sigma xy}{\Sigma y^2}\right) y = \left(\frac{40{\cdot}34}{38{\cdot}92}\right) y = 1{\cdot}036y$ or $X - 66{\cdot}7 = 1{\cdot}036(Y - 67{\cdot}6)$.

وهذا يتفق مع نتائج المسألة ١٤ − ١ .

الطريقة الثانية :

اطرح مقداراً ثابتاً ملائماً ، وليكن **60** ، من كل قيمة من قيم X و Y ثم تابع الحل كما فى الطريقة الثانية بالمسألة ١٣ − ١٧ ، الفصل الثالث عشر .

جـــدول ١٤ − ٤

X'	Y'	X'^2	$X'Y'$	Y'^2
5	8	25	40	64
3	6	9	18	36
7	8	49	56	64
4	5	16	20	25
8	9	64	72	81
2	6	4	12	36
10	8	100	80	64
6	5	36	30	25
8	11	64	88	121
7	7	49	49	49
9	8	81	72	64
11	10	121	110	100
$\Sigma X' = 80$	$\Sigma Y' = 91$	$\Sigma X'^2 = 618$	$\Sigma X'Y' = 647$	$\Sigma Y'^2 = 729$

إذن $b^1 = \dfrac{N\Sigma X'Y' - (\Sigma Y')(\Sigma X')}{N\Sigma Y'^2 - (\Sigma Y')^2} = 1{\cdot}036$ $\qquad a^1 = \dfrac{N\Sigma X'Y' - (\Sigma Y')(\Sigma Y')}{N\Sigma X'^2 - (\Sigma X')^2}$

بما أن $\bar{X} = 60 + 80/12 = 66{\cdot}7$ and $\bar{Y} = 60 + 91/12 = 67{\cdot}6$ فإن معادلات الانحدار المطلوبة هى كما سبق.

لاحظ أنه لو حسبنا b_0 ، a_0 بهذه الطريقة ، فإننا لن نحصل على نفس النتائج السابقة حيث أنهما يعتمدان على اختيار نقطة الأصل . وعلى هذا فإن الطريقة تستخدم فقط للحصول على b_1 ، a_1 وهما لايعتمدان على اختيار نقطة الأصل .

الخطأ المعيارى للتقدير :

١٤ - ٣ إذا كانت معادلة انحدار Y على X هى $Y = a_0 + a_1 X$ ، أثبت أن الخطأ المعيارى للتقدير ، $s_{Y.X}$ يعرف كالآتى :

$$s^2_{Y.X} = \frac{\Sigma Y^2 - a_0 \Sigma Y - a_1 \Sigma XY}{N}$$

الحـــل :

قيمة Y المقدرة من خط الانحدار تعطى بالمعادلة $Y_{est.} = a_0 + a_1 X$ إذن

$$s^2_{Y.X} = \frac{\Sigma (Y - Y_{est.})^2}{N} = \frac{\Sigma (Y - a_0 - a_1 X)^2}{N}$$

$$= \frac{\Sigma Y(Y - a_0 - a_1 X) - a_0 \Sigma (Y - a_0 - a_1 X) - a_1 \Sigma X(Y - a_0 - a_1 X)}{N}$$

لكن

$$\Sigma (Y - a_0 - a_1 X) = \Sigma Y - a_0 N - a_1 \Sigma X = 0$$

و

$$\Sigma X(Y - a_0 - a_1 X) = \Sigma XY - a_0 \Sigma X - a_1 \Sigma X^2 = 0$$

ومن المعادلات الاعتدالية

$$\begin{cases} \Sigma Y = a_0 N + a_1 \Sigma X \\ \Sigma XY = a_0 \Sigma X + a_1 \Sigma X^2. \end{cases}$$

إذن

$$s^2_{Y.X} = \frac{\Sigma Y(Y - a_0 - a_1 X)}{N} = \frac{\Sigma Y^2 - a_0 \Sigma Y - a_1 \Sigma XY}{N}$$

هذه النتيجة يمكن أن تعمم لتشمل معادلات الانحدار غير الخطية .

١٤ - ٤ إذا كانت $x = X - \bar{X}$ و $y = Y - \bar{Y}$ ، أثبت أن نتيجة المسألة ١٤ - ٣ يمكن كتابتها كالآتى :

$$s_{Y.X}^2 = \frac{\Sigma y^2 - a_1 \Sigma xy}{N}$$

الحـل :

من المسألة ١٤ - ٣ ، حيث $X = x + \bar{X}$, $Y = y + \bar{Y}$ ، فإن

$$\begin{aligned} Ns_{Y.X}^2 &= \Sigma Y^2 - a_0 \Sigma Y - a_1 \Sigma XY = \Sigma(y + \bar{Y})^2 - a_0 \Sigma (y + \bar{Y}) - a_1 \Sigma (x + \bar{X})(y + \bar{Y}) \\ &= \Sigma (y^2 + 2y\bar{Y} + \bar{Y}^2) - a_0(\Sigma y + N\bar{Y}) - a_1 \Sigma (xy + \bar{X}y + x\bar{Y} + \bar{X}\bar{Y}) \\ &= \Sigma y^2 + 2\bar{Y} \Sigma y + N\bar{Y}^2 - a_0 N\bar{Y} - a_1 \Sigma xy - a_1\bar{X} \Sigma y - a_1 \bar{Y} \Sigma x - a_1 N\bar{X}\bar{Y} \\ &= \Sigma y^2 + N\bar{Y}^2 - a_0 N\bar{Y} - a_1 \Sigma xy - a_1 N\bar{X}\bar{Y} = \Sigma y^2 - a_1 \Sigma xy + N\bar{Y}(\bar{Y} - a_0 - a_1\bar{X}) \\ &= \Sigma y^2 - a_1 \Sigma xy \end{aligned}$$

حيث استخدمنا النتائج $\Sigma y = 0$ ، $\Sigma x = 0$, $\bar{Y} = a_0 + a_1 X$ (والتى تنتج من قسمة طرف المعادلة الاعتدالية $\Sigma Y = a_0 N + a_1 \Sigma X$ على N) .

١٤ - ٥ احسب الخطأ المعيارى للتقدير ، $s_{Y.X}$ لبيانات المسألة ١٤ - ١ باستخدام :

(أ) التعريف (ب) نتيجة المسألة ١٤ - ٤ .

الحـل :

(أ) من المسألة ١٤ - ١ (ب) خط انحدار Y على X هو $Y = 35.82 + 0.476X$. يبين الجدول ١٤ - ٥ قيم Y الفعلية (من جدول المسألة ١٤ - ١) وقيم Y المقدرة ، معبراً عنها بالرمز $Y_{est.}$.

كما حصلنا عليها من خط الانحدار على سبيل المثال ، المقابلة لقيمة $X = 65$

فإن $Y_{est.} = 35{\cdot}82 + 0{\cdot}476(65) = 66{\cdot}76$

كذلك يوضح الجدول القيم $Y - Y_{est.}$ s التى نحتاج إليها فى حساب $s_{Y.X}$

جـدول ١٤ - ٥

X	65	63	67	64	68	62	70	66	68	67	69	71
Y	68	66	68	65	69	66	68	65	71	67	68	70
$Y_{est.}$	66·76	65·81	67·71	66·28	68·19	65·33	69·14	67·24	68·19	67·71	68·66	69·62
$Y - Y_{est.}$	1·24	0·19	0·29	− 1·28	0·81	0·67	− 1·14	−2·24	2·81	−0·71	−0·66	0·38

إذن

$$s_{Y.X}^2 = \frac{\Sigma(Y - Y_{est.})^2}{N} = \frac{(1{\cdot}24)^2 + (0{\cdot}19)^2 + \cdots + (0{\cdot}38)^2}{12} = 1{\cdot}642$$

$$s_{Y.X} = \sqrt{1{\cdot}642} = 1{\cdot}28 \text{ kg}$$

(ب) من المسائل ١ ، ٢ ، ٤ ،

$$s_{Y.X}^2 = \frac{\Sigma y^2 - a_1 \Sigma xy}{N} = \frac{38{\cdot}92 - 0{\cdot}476(40{\cdot}34)}{12} = 1{\cdot}643$$

$$s_{Y.X} = \sqrt{1{\cdot}643} = 1{\cdot}28 \text{ kg} \quad ,$$

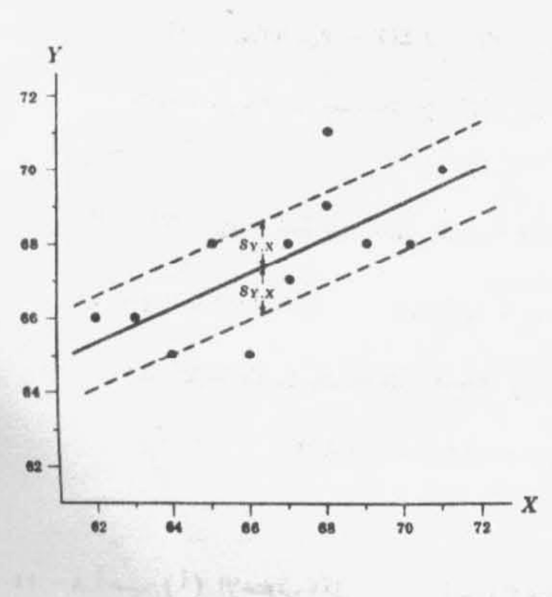
١٤ - ٩ (أ) ارسم خطين متوازيين لخط انحدار المسألة ١٤ - ١ وعلى بعد رأسى يساوى $s_{Y.X}$

(ب) حدد نسبة نقط البيانات التى تقع بين هذين الخطين .

الحـــل :

(أ) خط الانحدار

كما $Y = 35.82 + 0.476X$ حصلنا عليه فى المسألة ١٤ - ١ موضح بخط ثقيل فى الشكل ١٤ - ٣ . والخطان المتـــوازيان ، كلاهمـــا على بعد رأسى $s_{Y.X} = 1{\cdot}28$ منه (أنظر المسألة ١٤ - ٥) ، موضحان بخطوط متقطعة بالشكل ١٤ - ٣ .



شكل ١٤ - ٣

(ب) من الشكل يمكن مشاهدة أنه من الـ 12 نقطة من نقط البيانات تقع 7 نقـــط بين الخطوط بينما يظهر 3 تقع على الخطوط بمزيد من النقص باستخدام السطر الأخير فى الجدول ١٤ - ٥ بالمسألة ١٤ - ٥ ، على سبيل المثال ، يتضح أن نقطتين من الـ 3 نقط تقع بين الخطوط . وبهذا فإن النسبة المطلوبة = $9/12 = 75\%$

طريقة اخرى :

من السطر الأخير بالجدول ١٤ - ٥ بالمســألة ١٤ - ٥ ، $Y - Y_{est}$ ، تقع بين 1.28 و 1.28 - (أى $\pm s_{Y.X}$) . لـ 9 نقط (X, Y) . بهذا فإن النسبة المئوية المطلوبة هى $9/12 = 75\%$.

إذا كانت النقط تتوزع توزيعاً طبيعياً حول خط الانحدار ، فإن النظرية تتنبأ بأن حوالى 68% من النقــط تقع بين الخطوط . وهذه تكون تقريباً الحالة إذا كان الحجم العينة كبيراً .

ملحوظة : هناك تقدير أفضل للخطأ المعيارى فى تقدير المجتمع الذى سحبت منه عينة الأطوال يعطى بالصيغة

$$\hat{s}_{Y.X} = \sqrt{N/(N-2)}s_{Y.X} = \sqrt{12/10}(1{\cdot}28) = 1{\cdot}40 \text{ kg.}$$

الانحراف المفسر والانحراف غير المفسر .

١٤ - ٧ أثبت أن $\Sigma(Y - \bar{Y})^2 = \Sigma(Y - Y_{est.})^2 + \Sigma(Y_{est.} - \bar{Y})^2$:

الحــل :

بتربيع طرفى المعادلة $Y - \bar{Y} = (Y - Y_{est.}) - (Y_{est.} - \bar{Y})$ ثم التجميع ، نحصل على

$$\Sigma(Y - \bar{Y})^2 = \Sigma(Y - Y_{est.})^2 + \Sigma(Y_{est.} - \bar{Y})^2 - 2\,\Sigma(Y - Y_{est.})(Y_{est.} - \bar{Y})$$

النتيجة المطلوبة نحصل عليها مباشرة إذا أمكن إثبات أن الحد الأخير يساوى صفر ، وهذه هى الحالة فى حالة الانحدار الخطى نظراً لأن

$$\Sigma(Y - Y_{est.})(Y_{est.} - \bar{Y}) = \Sigma(Y - a_0 - a_1X)(a_0 + a_1X - \bar{Y})$$
$$= a_0\,\Sigma(Y - a_0 - a_1X) + a_1\,\Sigma\, X(Y - a_0 - a_1X) - \bar{Y}\,\Sigma(Y - a_0 - a_1X) = 0$$

ولأنه فى المعادلات الاعتدالية $\Sigma(Y - a_0 - a_1X) = 0 \text{ and } \Sigma X(Y - a_0 - a_1X) = 0$

هذه النتيجة يمكن إثبات صلاحيتها للانحدار غير الخطى باستخدام منحنى المربعات الصغرى المعرف بما يلى

$$Y_{est.} = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n$$

١٤ - ٨ أحسب (أ) الاختلاف الكلى . (ب) الاختلاف الغير مفسر .

(جـ) الاختلاف المفسر وذلك لبيانات المسألة ١٤-١ .

الحــل :

(أ) الاختلاف الكلى $= \Sigma(Y - \bar{Y})^2 = \Sigma y^2 = 38{\cdot}92$ من المسألة ١٤ - ٢

(ب) الاختلاف الغير مفسر $= \Sigma(Y - Y_{est.})^2 = Ns^2_{Y.X} = 19{\cdot}70$ من المسألة ١٤ - ٥

(جـ) الاختلاف المفسر $= \Sigma(Y_{est.} - \bar{Y})^2 = 38{\cdot}92 - 19{\cdot}70 = 19{\cdot}22$ من المسألة ١٤ - ٧

طريقة اخرى :

بما أن $\bar{Y} = 811/112 = 67.58$ ، فيمكن تكوين الجدول التالى باستخدام قيم Y_{est} التى حصلنا عليها بالجدول ١٤ – ٥ بالمسألة ١٤ – ٥ .

−0·82	−1·77	0·13	−1·30	0·61	−2·25	1·56	−0·34	0·61	0·13	1·08	2·04

إذن $\Sigma(Y_{est.} - \bar{Y})^2 = (-0{\cdot}82)^2 + (-1{\cdot}77)^2 + \ldots + (2{\cdot}04)^2 = 19{\cdot}21$

ويمكن الحصول على نتائج (أ) و (ب) مباشرة .

معامل الارتباط :

١٤ – ٩ أوجد (أ) معامل التحديد . (ب) معامل الارتباط . لبيانات المسألة ١٤ – ١ . استخدم نتائج المسألة ١٤ – ٨

الحـــل :

(أ) $$\text{معامل التحديد} = r^2 = \frac{\text{الاختلاف المفسر}}{\text{الاختلاف الكلى}} = \frac{19{\cdot}22}{38{\cdot}92} = 0{\cdot}4938$$

(ب) $$\text{معامل الارتباط} = r = \pm\sqrt{0{\cdot}4938} = \pm\ 0{\cdot}7027$$

بما أن المتغير Y_{est} يتزايد كلما تزايدت قيمة X ، فإن الارتباط موجب ويمكن بذلك أن نكتب $r = 0.7027$ أو $r = 0.70$ لرقمين معنويين .

١٤–١٠ أثبت أن معامل الارتباط بين المتغيرين X و Y يمكن كتابته فى حالة الانحدار الخطى كالآتى :

$$r = \frac{\Sigma xy}{\sqrt{(\Sigma x^2)(\Sigma y^2)}}$$

حيث $x = X - \bar{X}$ و $y = Y - \bar{Y}$.

الحـــل :

خط انحدار Y على X باستخدام المربعات الصغرى يمكن كتابته على الصورة $Y_{est.} = a_0 - a_1X$

أو $y_{est.} = a_1x$ ، حيث $a_1 = \frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2}$ و $y_{est.} = Y_{est.} - \bar{Y}$ (أنظر المسألة ١٥ (أ) بالفصل الثالث عشر) إذن

$$r^2 = \frac{\text{الاختلاف المفسر}}{\text{الاختلاف الكلى}} = \frac{\Sigma(Y_{est.} - \bar{Y})^2}{\Sigma(Y - \bar{Y})^2} = \frac{\Sigma y_{est.}^2}{\Sigma y^2}$$

$$= \frac{\Sigma a_1^2 x^2}{\Sigma y^2} = \frac{a_1^2\,\Sigma x^2}{\Sigma y^2} = \left(\frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2}\right)^2 \frac{\Sigma x^2}{\Sigma y^2} = \frac{(\Sigma xy)^2}{(\Sigma x^2)(\Sigma y^2)}$$

و $r = \pm \dfrac{\Sigma xy}{\sqrt{(\Sigma x^2)(\Sigma y^2)}}$ بما أن المقدار $\dfrac{\Sigma xy}{\sqrt{(\Sigma x^2)(\Sigma y^2)}}$ موجب فى حالة ما إذا زادت y_{est} كلما زادت x (أى ، ارتباط خطى موجب) وسالب إذا تناقصت y_{est} كلما زادت x (أى ، ارتباط خطى سالب) فيظهر فى الصيغة الإشارة الصحيحة تلقائياً . بهذا نعرف معامل الارتباط الخطى بأنه

$$r = \frac{\Sigma xy}{\sqrt{(\Sigma x^2)(\Sigma y^2)}}$$

وهذا يسمى غالباً بصيغة عزم حاصل الضرب لمعامل الارتباط الخطى .

عزم حاصل الضرب لمعامل الارتباط الخطى :

١٤-١١ أوجد معامل الارتباط الخطى بين المتغيرين X و Y المبينين فى الجدول ١٤ - ٦ .

جدول ١٤ - ٦

X	1	3	4	6	8	9	11	14
Y	1	2	4	4	5	7	8	9

الحـــل :

يمكن ترتيب العمل المطلوب فى الحسابات كما فى الجدول ١٤ - ٧

جدول ١٤ - ٧

X	Y	$x = X - \bar{X}$	$y = Y - \bar{Y}$	x^2	xy	y^2
1	1	−6	−4	36	24	16
3	2	−4	−3	16	12	9
4	4	−3	−1	9	3	1
6	4	−1	−1	1	1	1
8	5	1	0	1	0	0
9	7	2	2	4	4	4
11	8	4	3	16	12	9
14	9	7	4	49	28	16
$\Sigma X = 56$ $\bar{X} = 56/8 = 7$	$\Sigma Y = 40$ $\bar{Y} = 40/8 = 5$			$\Sigma x^2 = 132$	$\Sigma xy = 84$	$\Sigma y^2 = 56$

$$r = \frac{\Sigma xy}{\sqrt{(\Sigma x^2)(\Sigma y^2)}} = \frac{84}{\sqrt{(132)(56)}} = 0{\cdot}977$$

وهذا يوضح أن هناك ارتباطاً خطياً قوياً جداً بين المتغيرات ، كما لاحظنا بالفعل فى المسائل ١٣ - ٨ و ١٣ - ١٢ بالفصل الثالث عشر .

١٤-١٢ أوجد (أ) الانحراف المعيارى لـ X ، (ب) الانحراف المعيارى لـ Y ، (ج) تباين X ، (د) تباين Y (ج) تغاير X و Y وذلك لبيانات المسألة ١٤ – ١١

الحـــل :

(أ) $s_X = \sqrt{\frac{\Sigma (X-\bar{X})^2}{N}} = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{N}} = \sqrt{\frac{132}{8}} = 4{\cdot}06$ = الانحراف المعيارى لـ X

(ب) $s_Y = \sqrt{\frac{\Sigma (Y-\bar{Y})^2}{N}} = \sqrt{\frac{\Sigma y^2}{N}} = \sqrt{\frac{56}{8}} = 2{\cdot}65$ = الانحراف المعيارى لـ Y

(ج) $s_X^2 = 16{\cdot}50$ = تباين X

(د) $s_Y^2 = 7{\cdot}00$ = تباين Y

(هـ) $s_{XY} = \frac{\Sigma xy}{N} = \frac{84}{8} = 10{\cdot}50$ = تغاير X و Y

١٤-١٣ أثبت الصيغة $r = \frac{s_{XY}}{s_X s_Y}$ لبيانات المسألة ١٤ – ١١

الحـــل :

من المسألة ١٤ – ١٢ $r = \frac{s_{XY}}{s_X s_Y} = \frac{10{\cdot}50}{(4{\cdot}06)(2{\cdot}65)} = 0{\cdot}976$ ، وذلك بالاتفاق (فيما عدا أخطاء التقريب) مع نتائج المسألة ١٤ – ١١ .

١٤-١٤ باستخدام صيغة عزم حاصل الضرب ، أوجد معامل الارتباط الخطى لبيانات المسألة ١٤ – ١

الحـــل :

يمكن ترتيب العمل المطلوب فى الحساب كما فى الجدول ١٤ – ٣ بالمسألة ١٤ – ٢ . إذن

$$r = \frac{\Sigma xy}{\sqrt{(\Sigma x^2)(\Sigma y^2)}} = \frac{40{\cdot}34}{\sqrt{(84{\cdot}68)(38{\cdot}92)}} = 0{\cdot}7027$$

وهذا يتفق مع الطريقة المطولة المستخدمة فى المسألة ١٤ – ١٩

١٤-١٥ وضح أن معامل الارتباط الخطى يعرف كالآتى :

$$r = \frac{N\,\Sigma XY - (\Sigma X)(\Sigma Y)}{\sqrt{[N\,\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2][N\,\Sigma Y^2 - (\Sigma Y)^2]}}$$

الحـــل :

بكتابة $x = X - \bar{x}$ ، $y = Y - \bar{Y}$ فى نتيجة المسألة ١٠ ، نحصل على

$$r = \frac{\Sigma xy}{\sqrt{(\Sigma x^2)(\Sigma y^2)}} = \frac{\Sigma (X-\bar{X})(Y-\bar{Y})}{\sqrt{[\Sigma (X-\bar{X})^2][\Sigma (Y-\bar{Y})^2]}}$$

ولكن $\Sigma(X-\bar{X})(Y-\bar{Y}) = \Sigma(XY-\bar{X}Y-X\bar{Y}+\bar{X}\bar{Y}) = \Sigma XY - \bar{X}\Sigma Y - \bar{Y}\Sigma X + N\bar{X}\bar{Y}$

$$= \Sigma XY - N\bar{X}\bar{Y} - N\bar{Y}\bar{X} + N\bar{X}\bar{Y} = \Sigma XY - N\bar{X}\bar{Y}$$

$$= \Sigma XY - \frac{(\Sigma X)(\Sigma Y)}{N}$$

ونظراً لأن $\bar{X} = (\Sigma X)/N$ and $\bar{Y} = (\Sigma Y)/N$

وبصورة مماثلة $\Sigma(X-\bar{X})^2 = \Sigma(X^2 - 2X\bar{X} + \bar{X}^2) = \Sigma X^2 - 2\bar{X}\Sigma X + N\bar{X}^2$

$$= \Sigma X^2 - \frac{2(\Sigma X)^2}{N} + \frac{(\Sigma X)^2}{N} = \Sigma X^2 - \frac{(\Sigma X)^2}{N}$$

و $\Sigma(Y-\bar{Y})^2 = \Sigma Y^2 - \frac{(\Sigma Y)^2}{N}$ بهذا تصبح (١) في الصورة :

$$r = \frac{\Sigma XY - (\Sigma X)(\Sigma Y)/N}{\sqrt{[\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2/N][\Sigma Y^2 - (\Sigma Y)^2/N]}} = \frac{N\Sigma XY - (\Sigma X)(\Sigma Y)}{\sqrt{[N\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2][N\Sigma Y^2 - (\Sigma Y)^2]}}$$

١٤–١٦ استخدم صيغة المسألة ١٤ – ١٥ لحصول على معامل الارتباط الخطى لبيانات المسألة ١٤ – ١ .

الحــــل :

من الجدول ١٤ – ٢ بالمسألة ١٤ – ١ ، نحصل على

$$r = \frac{N\Sigma XY - (\Sigma X)(\Sigma Y)}{\sqrt{[N\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2][N\Sigma Y^2 - (\Sigma Y)^2]}}$$

$$= \frac{(12)(54\,107) - (800)(811)}{\sqrt{[(12)(53\,418) - (800)^2][(12)(54\,849) - (811)^2]}} = 0{\cdot}7027$$

كما فى المسألة ١٤ – ٩ و ١٤ – ١٤ .

طريقة اخرى :

قيمة r مستقلة عن اختيار نقطة الأصل فى Y و X . بهذا يمكن استخدام الطريقة الثانية بالمسألة ١٤ – ٢ لحصول على :

$$r = \frac{N\Sigma X'Y' - (\Sigma X')(\Sigma Y')}{\sqrt{[N\Sigma X'^2 - (\Sigma X')^2][N\Sigma Y'^2 - (\Sigma Y')^2]}} = \frac{12(647) - (80)(91)}{\sqrt{[(12)(618) - (80)^2][(12)(729) - (91)^2]}} = 0{\cdot}7027$$

معامل الارتباط للبيانات المجمعة :

١٤–١٧ الجدول ١٤ – ٨ يوضح التوزيع التكرارى للدرجات النهائية لـ 100 طالب فى مادتى الرياضة والطبيعة . بالرجوع إلى هذا الجدول أوجد

(أ) عدد الطلبة الذين حصلوا على الدرجات 79 — 70 فى الرياضة و 89 — 80 فى الطبيعة .

(ب) النسبة المئوية للطلبة الذين حصلوا فى الرياضة على درجات أقل من 70 .

(جـ) عدد الطلبة الذين حصلوا على درجات 70 أو أكثر فى الطبيعة وأقل من 80 فى الرياضة .

(د) النسبة المئوية للطلبة الذين نجحوا فى كل من الطبيعة والرياضة مفترضاً أن 60 هو الحد الأدنى لدرجة النجاح .

جـــدول ١٤ – ٨

درجـــات الرياضة

درجات الطبيعة	40 — 49	50 — 59	60 — 69	70 — 79	80 — 89	90 — 99	المجموع
90 — 99				2	4	4	10
80 — 89			1	4	6	5	16
70 — 79			5	10	8	1	24
60 — 69	1	4	9	5	2		21
50 — 59	3	6	6	2			17
40 — 49	3	5	4				12
المجموع	7	15	25	23	20	10	100

الحـــل :

(أ) اتجه إلى أسفل فى العمود المعنون 79 — 70 (درجات الرياضة) إلى الصف المعنون 89 — 80 (درجات الطبيعة) الخلية المشتركة وهى 4 تعطى عدد الطلبة المطلوب .

(ب) العدد الكلى للطلبة الذين درجاتهم فى الرياضة أقل من 70
= العدد الذى درجاته 49 — 40 + العدد الذى درجاته 59 — 50 + العدد الذى درجاته 69 — 60
47 = 25 +15+7= . النسبة المئوية للطلبة الذين درجاتهم فى الرياضة أقل من 70 هو :
. 47 / 100 = 47%

(جـ) عدد الطلبة المطلوب هو مجموع العناصر فى الجدول ١٤ – ٩ ، والذى يمثل جزءاً من الجدول ١٤ – ٨ .
عدد الطلبة المطلوب = 10 + 4 + 2 + 5 + 1 = 22

جدول ١٤ – ٩

درجات الرياضة

درجات الطبيعة	40 — 49	50 — 59
50 — 59	3	6
40 — 49	3	5

جدول ١٤ – ١٠

درجات الرياضة

درجات الطبيعة	60 — 69	70 — 79
90 — 99		2
80 — 89	1	4
70 — 79	5	10

(د) بالرجوع إلى الجدول ١٤ – ١٠ والمأخوذ من الجدول ١٤ – ٨ ، يتضح أن عدد الطلبة الذين كانت درجاتهم أقل من 60 فى كل من الرياضة والطبيعة هو 17 = 5 + 6 + 3 + 3 . وبهذا فإن عدد الطلبة الذين كانت درجاتهم 60 أو أكثر فى كل من الطبيعة والرياضة هو 83 = 17 — 100 ، والنسبة المئوية المطلوبة هى 83% = 100 / 83 .

الجدول ١٤ – ٨ يسمى أحياناً جدولا تكرارياً لمتغيرين أو توزيعاً تكرارياً ذا متغيرين ، كل مربع فى الجدول يسمى خلية ويقابل زوجين من الفئات . الرقم الموضح فى الخلية يسمى تكرار الخلية . على سبيل المثال ، فى الجزء (أ) الرقم 4 هو تكرار الخلية المقابل لأزواج الفئات 79 — 70 فى الرياضة و 89 — 80 فى الطبيعة .

المجاميع الموضحة فى الصف الأخير وفى العمود الأخير تسمى بالمجاميع الهامشية أو التكراوات الهامشية . وهى تقابل على الترتيب تكرارات الفئات للتوزيع التكرارى للرياضة إذا اعتبر بمفرده والتوزيع التكرارى للطبيعة بمفرده .

١٤–١٨ وضح كيف تعدل صيغة المسألة ١٤ – ١٥ بحيث تنطبق فى حالة البيانات المجمعة فى الجدول التكرارى المزدوج (جدول ١٤ – ٨) للمسألة ١٤ – ١٧ .

الحــــل :

للبيانات المجمعة ، يمكن أن نعتبر القيم المختلفة للمتغيرات X و Y تتفق مع مراكز الفئات بينما f_X و f_Y هى التكرارات المقابلة للفئات أو التكرارات الهامشية الموضحة فى الصف الأخير والعمود الأخير .

لجدول التكرارى المزدوج (ذى المتغيرين) . إذا اعتبرنا f تمثل تكرارات الخلايا المختلفة المقابلة لأزواج مراكز الفئات (X و Y) ، إذن يمكن أن نحل محل الصيغة ١٤ – ١٥ ، الصيغة التالية

$$r = \frac{N\Sigma fXY - (\Sigma f_X X)(\Sigma f_Y Y)}{\sqrt{[N\Sigma f_X X^2 - (\Sigma f_X X)^2][N\Sigma f_Y Y^2 - (\Sigma f_Y Y)^2]}} \qquad (١)$$

إذا اعتبرنا $Y = B + c_Y u_Y$ و $X = A + c_X u_X$ حيث c_X و c_Y هى طول الفئة (بفرض أنها ثابتة) A و B هى مراكز فئات اختيارية مقابلة للمتغيرات ، فإن الصيغة السابقة تصبح :

$$r = \frac{N\Sigma f u_X u_Y - (\Sigma f_X u_X)(\Sigma f_Y u_Y)}{\sqrt{[N\Sigma f_X u_X^2 - (\Sigma f_X u_X)^2][N\Sigma f_Y u_Y^2 - (\Sigma f_Y u_Y)^2]}} \qquad (٢)$$

وهذه هى طريقة الترميز المستخدمة فى الفصول السابقة كطريقة مختصرة لحساب المتوسطات ، الانحرافات المعيارية والعزوم الأعلى رتبة .

١٤–١٩ أوجد معامل الارتباط الخطى لدرجات الرياضة والطبيعة بالمسألة ١٤ – ١٧ .

الحــــل :

نستخدم الصيغة (٢) بالمسألة ١٤ – ١٨ . ويمكن ترتيب الحل كما فى الجدول ١٤ – ١١ والذى يسمى بجدول الارتباط . المجاميع $\Sigma f_X, \Sigma f_X u_X, \Sigma f_X u_X^2, \Sigma f_Y, \Sigma f_Y u_Y$ and $\Sigma f_Y u_Y^2$ نحصل عليها باستخدام طريقة الترميز كما فى الفصول السابقة .

جـــدول ١٤ – ١١

		درجات الرياضة									
	X	44·5	54·5	64·5	74·5	84·5	94·5	f_Y	$f_Y u_Y$	$f_Y u_Y^2$	مجموع الأرقام بالمربعات الجانبية فى كل عمود
Y	u_X / u_Y	−2	−1	0	1	2	3				
درجات الطبيعة Y 94·5	2				2 [4]	4 [16]	4 [24]	10	20	40	44
84·5	1			1 [0]	4 [4]	6 [12]	5 [15]	16	16	16	31
74·5	0			5 [0]	10 [0]	8 [0]	1 [0]	24	0	0	0
64·5	−1	1 [2]	4 [4]	9 [0]	5 [−5]	2 [−4]		21	−21	21	−3
54·5	−2	3 [12]	6 [12]	6 [0]	2 [−4]			17	−34	68	20
44·5	−3	3 [18]	5 [15]	4 [0]				12	−36	108	33
f_X		7	15	25	23	20	10	$\Sigma f_X = \Sigma f_Y = N = 100$	$\Sigma f_Y u_Y = -55$	$\Sigma f_Y u_Y^2 = 253$	$\Sigma f u_X u_Y = 125$
$f_X u_X$		−14	−15	0	23	40	30	$\Sigma f_X u_X = 64$			
$f_X u_X^2$		28	15	0	23	80	90	$\Sigma f_X u_X^2 = 236$			
مجموع الأرقام بالمربعات الجانبية فى كل عمود		32	31	0	−1	24	39	$\Sigma f u_X u_Y = 125$			

مراجعة

الرقم فى المربع الجانبى فى كل خلية يمثل حاصل ضرب $f u_X u_Y$ حيث f تعبر عن تكرار الخلية . مجموع هذه الأرقام الموجودة فى المربع الجانبى بكل خلية موضحة فى الصف المقابل بالعمود الأخير . مجموع هذه الأرقام الجانبية فى كل عمود موضح بالعمود المقابل بالصف الأخير . المجاميع الكلية فى الصف الأخير والعمود الأخير متساويان ويمثلان $\Sigma f u_X u_Y$.

من الجدول ١٤ – ١١ نحصل على

$$r = \frac{N \Sigma f u_X u_Y - (\Sigma f_X u_X)(\Sigma f_Y u_Y)}{\sqrt{[N \Sigma f_X u_X^2 - (\Sigma f_X u_X)^2][N \Sigma f_Y u_Y^2 - (\Sigma f_Y u_Y)^2]}}$$

$$= \frac{(100)(125) - (64)(-55)}{\sqrt{[(100)(236) - (64)^2][(100)(253) - (-55)^2]}} = \frac{16\,020}{\sqrt{(19\,504)(22\,275)}} = 0{\cdot}7686$$

١٤-٢٠ استخدم جدول الارتباط بالمسألة ١٤ - ١٩ لحساب (أ) s_X (ب) s_Y (جـ) s_{XY}
وأثبت الصيغة $r = s_{XY}/(s_X s_Y)$.

الحـــل :

(أ)
$$s_X = c_X\sqrt{\frac{\Sigma f_X u_X^2}{N} - \left(\frac{\Sigma f_X u_X}{N}\right)^2} = 10\sqrt{\frac{236}{100} - \left(\frac{64}{100}\right)^2} = 13{\cdot}966$$

(ب)
$$s_Y = c_Y\sqrt{\frac{\Sigma f_Y u_Y^2}{N} - \left(\frac{\Sigma f_Y u_Y}{N}\right)^2} = 10\sqrt{\frac{253}{100} - \left(\frac{-55}{100}\right)^2} = 14{\cdot}925$$

(جـ)
$$s_{XY} = c_X c_Y\left[\frac{\Sigma f u_X u_Y}{N} - \left(\frac{\Sigma f_X u_X}{N}\right)\left(\frac{\Sigma f_Y u_Y}{N}\right)\right] = (10)(10)\left[\frac{125}{100} - \left(\frac{64}{100}\right)\left(\frac{-55}{100}\right)\right] = 160{\cdot}20$$

أى أن الانحراف المعيارى لدرجات الرياضة هو 14.0 ولدرجات الطبيعة هو 14.9 . بينما تغايرهما هو 160.2 .

وبهذا يكون معامل الارتباط $r = \frac{s_{XY}}{s_X s_Y} = \frac{160{\cdot}20}{(13{\cdot}966)(14{\cdot}925)} = 0{\cdot}7686$ ، متفق مع المسألة ١٤ - ١٩ .

خطوط الانحدار ومعامل الارتباط :

١٤-٢١ أثبت أن خطوط انحدار Y على X و X على Y نحصل عليهما من المعادلات التالية على الترتيب

(أ)
$$Y - \bar{Y} = \frac{r s_Y}{s_X}(X - \bar{X})$$

(ب)
$$X - \bar{X} = \frac{r s_X}{s_Y}(Y - \bar{Y})$$

الحـــل :

(أ) من المسألة ١٥ (أ) بالفصل الثالث عشر ، معادلة خط انحدار Y على X هى

$$Y - \bar{Y} = \left(\frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2}\right)(X - \bar{X}) \quad \text{أو} \quad y = \left(\frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2}\right)x$$

بما أن $r = \frac{\Sigma xy}{\sqrt{(\Sigma x^2)(\Sigma y^2)}}$ (أنظر المسألة ١٤ - ١٠) ، فإن

$$\frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2} = \frac{r\sqrt{(\Sigma x^2)(\Sigma y^2)}}{\Sigma x^2} = \frac{r\sqrt{\Sigma y^2}}{\sqrt{\Sigma x^2}} = \frac{r s_Y}{s_X}$$

وبهذا نحصل على النتيجة المطلوبة .

(ب) نحصل على هذه النتيجة بتبديل X و Y فى الجزء (أ)

١٤-٢٢ إذا كانت خطوط الانحدار Y و X تعطى بالمعادلات $Y = a_0 + a_1 X$ و $X = b_0 + b_1 Y$ ، أثبت أن $a_1 b_1 = r^2$.

الحـــل :

من المسائل ٢١ (أ)، ٢١ (ب)، $a_1 = \frac{r s_Y}{s_X}$ و $b_1 = \frac{r s_X}{s_Y}$ إذن $a_1 b_1 = \left(\frac{r s_Y}{s_X}\right)\left(\frac{r s_X}{s_Y}\right) = r^2$

هذه النتيجة يمكن اعتبارها كنقطة بداية فى تعريف معامل الارتباط الخطى .

١٤-٢٣ استخدم نتائج المسألة ١٣ - ٢٢ لإيجاد معامل الارتباط الخطى لبيانات المسألة ١٤ - ١

الحـــل :

من المسألة ١٤-١ (ب) و ١٤-١ (جـ) على الترتيب، $a_1 = 484/1016 = 0{\cdot}476$ and $b_1 = 484/467 = 1{\cdot}036$

إذن $r^2 = a_1 b_1 = (484/1016)(484/467)$ and $r = 0{\cdot}7027$ بالاتفاق مع المسائل ١٤-٩ ، ١٤-١٤ ، ١٤-١٦

١٤-٢٤ أكتب معادلات خطوط الانحدار (أ) Y على X (ب) X على Y لبيانات المسألة ١٤ - ١٩

الحـــل :

من جدول الارتباطبا لمسألة ١٤ - ١٩ ، نحصل على

$$\bar{X} = A + c_X \frac{\Sigma f_X u_X}{N} = 64{\cdot}5 + \frac{(10)(64)}{100} = 70{\cdot}9$$

$$\bar{Y} = B + c_Y \frac{\Sigma f_Y u_Y}{N} = 75{\cdot}4 + \frac{(10)(-55)}{100} = 69{\cdot}0$$

من نتائج المسألة ١٤ - ٢٠ ، 14.20, $s_X = 13{\cdot}966$, $s_Y = 14{\cdot}925$ and $r = 0{\cdot}7686$

ومن ثم نستخدم المسائل ١٤ - ٢١ (أ) و ١٤ - ٢١ (ب) لحصول على معادلات خطوط الانحدار .

(أ) $Y - \bar{Y} = \frac{r s_Y}{s_X}(X - \bar{X})$, $Y - 69{\cdot}0 = \frac{(0{\cdot}7686)(14{\cdot}925)}{13{\cdot}966}(X - 70{\cdot}9)$, or $Y - 69{\cdot}0 = 0{\cdot}821(X - 70{\cdot}9)$

(ب) $X - \bar{X} = \frac{r s_X}{s_Y}(Y - \bar{Y})$, $X - 70{\cdot}9 = \frac{(0{\cdot}7686)(13{\cdot}966)}{14{\cdot}925}(Y - 69{\cdot}0)$, or $X - 70{\cdot}9 = 0{\cdot}719(Y - 69{\cdot}0)$

١٤-٢٥ احسب الخطأ المعيارى لتقدير (أ) $s_{Y.X}$ ، (ب) $s_{X.Y}$ لبيانات المسألة ١٤ - ١٩ . استخدم نتائج المسألة ١٤ - ٢٠ .

الحـــل :

(أ) $s_{Y.X} = s_Y\sqrt{1 - r^2} = 14{\cdot}925\sqrt{1 - (0{\cdot}7686)^2} = 9{\cdot}548$

(ب) $s_{X.Y} = s_X\sqrt{1 - r^2} = 13{\cdot}966\sqrt{1 - (0{\cdot}7686)^2} = 8{\cdot}934$

ارتباط الرتب

١٤-٢٦ الجدول التالى يوضح كيف أن 10 طلاب ، مرتبين ترتيباً أبجدياً ، رتبوا حسب مستوى أدائهم فى كل من جزء المعمل وجزء المحاضرات فى مادة البيولوجى . أوجد معامل ارتباط الرتب .

المعمل	8	3	9	2	7	10	4	6	1	5
المحاضرات	9	5	10	1	8	7	3	4	2	6

الحـــل :

يوضح الجدول التالى الفروق D بين رتب كل من المعمل والمحاضرات . كذلك يوضح الجدول ΣD^2 و D^2.

فروق الرتب D	−1	−2	−1	1	−1	3	1	2	−1	−1	
D^2	1	4	1	1	1	9	1	4	1	1	$\Sigma D^2 = 24$

إذن

$$r_{rank} = 1 - \frac{6\,\Sigma D^2}{N(N^2-1)} \quad 1 - \frac{6(24)}{10(10^2-1)} = 0{\cdot}8545$$

مما يشير إلى وجود علاقة ملحوظة بين أداء الطلبة فى المعمل والمحاضرات .

١٤-٢٧ احسب معامل ارتباط الرتب لبيانات المسألة ١٤ - ١ وقارن نتائجك بمعامل الارتباط الذى حصلت عليه بالطرق الأخرى

الحـــل :

رتب أوزان الآباء ترتيباً تصاعدياً كالآتى :

62, 63, 64, 65, 66, 67, 67, 68, 68, 69, 70, 71 (١)

وبما أن المكان السادس والسابع فى هذه المنظومة يمثل نفس الوزن 67(kg) فإننا نعطى هذه الأماكن متوسط الرتبتين أى 6.5 . كذلك فإن المكانين الثامن والتاسع تعطى لهما الرتبة 8.5. بهذا فإن أوزان الآباء تعطى لها الرتب .

1, 2, 3, 4, 5, 6·5, 6·5, 8·5, 8·5, 10, 11, 12 (٢)

بصورة مماثلة ، رتب أوزان الأبناء ترتيباً تصاعدياً كالآتى :

65, 65, 66, 66, 67, 68, 68, 68, 68, 69, 70, 71 (٣)

بما أن الأماكن السادس والسابع والثامن والتاسع تمثل نفس الوزن (68 kg) فإننا نعطى متوسط الرتب 7.5 إلى هذه الأماكن وتحسب [(6 + 7 + 8 + 9)/4] بهذا فإن أوزان الأبناء تعطى لها الرتب .

1·5, 1·5, 3·5, 3·5, 5, 7·5, 7·5, 7·5, 7·5, 10, 11, 12 (٤)

باستخدام التقابل بين (١) ، (٢) و (٣) ، (٤) ، فإن الجدول ١٤-١ للمسألة ١٤-١ يصبح .

رتبة الأب	4	2	6·5	3	8·5	1	11	5	8·5	6·5	10	12
رتبة الأبن	7·5	3·5	7·5	1·5	10	3·5	7·5	1·5	12	5	7·5	11

الاختلاف فى الرتب D، وحساب D^2 و ΣD^2 موضح بالجدول التالى .

D	-3.5	-1.5	-1.0	1.5	-1.5	-2.5	3.5	3.5	3.5	1.5	2.5	1.0	
D^2	12·25	2·25	1·00	2·25	2·25	6·25	12·25	12·25	12·25	2·25	6·25	1·00	$\Sigma D^2 = 72{\cdot}50$

إذن
$$r_{\text{rank}} = 1 - \frac{6\,\Sigma D^2}{N(N^2-1)} = 1 - \frac{6(72{\cdot}50)}{12(12^2-1)} = 0{\cdot}7465$$

والتى تتفق مع قيمة $r = 0.7027$ التى حصلنا عليها فى المسائل ١٤ – ٩ ، ١٤–١٤،١٤–١٦أو ١٤–٢٣ بالفصل الرابع عشر .

ارتباط السلاسل الزمنية :

١٤–٢٨ الجدول ١٤–١٢ يبين متوسط أسعار الأسهم والسندات ببورصة نيويورك للأوراق المالية خلال الأعوام 1950 — 1959
(١) أوجد معامل الارتباط . (ب) فسر النتائج

جـدول ١٤ – ١٢

السنة	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958	1959
متوسط أسعار الأسهم (بالدولار)	35·22	39·87	41·85	43·23	40·06	53·29	54·14	49·12	40·71	55·15
متوسط أسعار السندات (بالدولار)	102·43	100·93	97·43	97·81	98·32	100·07	97·08	91·59	94·85	94·65

المصدر : بورصة نيويورك للأوراق المالية

الحـل :

(١) اعتبر أن X تمثل متوسط أسعار الأسهم و Y متوسط أسعار السندات ، حساب معامل الارتباط يمكن إجراؤه كما فى الجدول ١٤ – ١٣. لاحظ أن السنة استخدمت فقط لبيان قيم Y و X المتقابلة .

جـدول ١٤ – ١٣

X	Y	$x = X - \bar{X}$	$y = Y - \bar{Y}$	x^2	xy	y^2
35·22	102·43	−10·04	4·91	100·80	−49·30	24·11
39·87	100·93	−5·39	3·41	29·05	−18·38	11·63
41·85	97·43	−3·41	−0·09	11·63	0·31	0·01
43·23	97·81	−2·03	0·29	4·12	−0·59	0·08
40·06	98·32	−5·20	0·80	27·04	−4·16	0·64
53·29	100·07	8·03	2·55	64·48	20·48	6·50
54·14	97·08	8·88	−0·44	78·85	−3·91	0·19
49·12	91·59	3·86	−5·93	14·90	−22·89	35·16
40·71	94·85	−4·55	−2·67	20·70	12·15	7·13
55·15	94·65	9·89	−2·87	97·81	−28·38	8·24
$\Sigma X = 452{\cdot}64$ $X = 45{\cdot}26$	$\Sigma Y = 975{\cdot}16$ $Y = 97{\cdot}52$			$\Sigma x^2 = 449{\cdot}38$	$\Sigma xy = 94{\cdot}67$	$\Sigma y^2 = 93{\cdot}69$

بهذا وباستخدام صيغة عزم حاصل الضرب $r = \frac{\Sigma xy}{\sqrt{(\Sigma x^2)(\Sigma y^2)}} = \frac{-94{\cdot}67}{\sqrt{(449{\cdot}38)(93{\cdot}69)}} = -0{\cdot}4614$

(ب) نستنتج مما سبق أن هناك ارتباطاً سالباً بين أسعار الأسهم والسندات (أى ، أن هناك اتجاها لانخفاض أسعار الأسهم كلما زادت أسعار السندات ، والعكس) على الرغم من أن هذه العلاقة ليست على قدر كبير من الوضوح.

طريقة أخرى : باستخدام ارتباط الرتب (كما فى المسائل ١٤ – ٢٦ و ١٤ – ٢٧) .
الجدول ١٤–١٤ يوضح رتب متوسط أسعار الأسهم والسندات للسنوات 1950–1959 بصورة تصاعدية .
كذلك يوضح فى الجدول فروق الرتب D ، ΣD^2

جدول ١٤–١٤

السنة	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958	1959	
أسعار الأسهم حسب الرتب	1	2	5	6	3	8	9	7	4	10	
أسعار السندات حسب الرتب	10	9	5	6	7	8	4	1	3	2	
الفروق بين الرتب D	−9	−7	0	0	−4	0	5	6	1	8	
D^2	81	49	0	0	16	0	25	36	1	64	$\Sigma D^2 =$ 272

إذن

$$r_{\text{rank}} = 1 - \frac{6\,\Sigma\,D^2}{N(N^2-1)} = 1 - \frac{6(272)}{10(10^2-1)} = -0{\cdot}6485$$

وهذه النتيجة تقارن بصورة مرضية مع نتيجة الطريقة الأولى . ويمكن أيضا طرح ثابت مناسب من المتغيرات ثم نستخدم الطريقة الثانية بالمسألة ١٤–١٦ .

الارتباط الغير خطى :

١٤–٢٩ وفق معادلة قطع مكافئ فى الصورة $Y = a_0 + a_1X + a_2X^2$ ، باستخدام طريقة المربعات الصغرى ، للبيانات التالية

جدول ١٤–١٥

X	1·2	1·8	3·1	4·9	5·7	7·1	8·6	9·8
Y	4·5	5·9	7·0	7·8	7·2	6·8	4·5	2·7

الحـل :

المعادلات الاعتدالية هى (أنظر الفصل الثالث عشر ، صفحة ٣٥٥) .

$$\left.\begin{aligned} \Sigma Y &= a_0N + a_1\Sigma X + a_2\Sigma X^2 \\ \Sigma XY &= a_0\Sigma X + a_1\Sigma X^2 + a_2\Sigma X^3 \\ \Sigma X^2Y &= a_0\Sigma X^2 + a_1\Sigma X^3 + a_2\Sigma X^4 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

العمل المتضمن فى حساب المجاميع يمكن ترتيبه كما فى الجدول ١٤–١٦ .

جدول ١٤ – ١٦

X	Y	X^2	X^3	X^4	XY	X^2Y
1·2	4·5	1·44	1·73	2·08	5·40	6·48
1·8	5·9	3·24	5·83	10·49	10·62	19·12
3·1	7·0	9·61	29·79	92·35	21·70	67·27
4·9	7·8	24·01	117·65	576·48	38·22	187·28
5·7	7·2	32·49	185·19	1055·58	41·04	233·93
7·1	6·8	50·41	357·91	2541·16	48·28	342·79
8·6	4·5	73·96	636·06	5470·12	38·70	332·82
9·8	2·7	96·04	941·19	9223·66	26·46	259·31
$\Sigma X = 42{\cdot}2$	$\Sigma Y = 46{\cdot}4$	$\Sigma X^2 = 291{\cdot}20$	$\Sigma X^3 = 2275{\cdot}35$	$\Sigma X^4 = 18\,971{\cdot}92$	$\Sigma XY = 230{\cdot}42$	ΣX^2Y 1449·00

بهذا فإن المعادلات الاعتدالية (١) تصبح ، حيث $N = 8$ ، كالآتى :

$$\left.\begin{aligned} 8a_0 + 42{\cdot}2a_1 - 291{\cdot}20a_2 &= 46{\cdot}4 \\ 42{\cdot}2a_0 + 291{\cdot}20a_1 - 2275{\cdot}35a_2 &= 230{\cdot}42 \\ 291{\cdot}20a_0 + 2275{\cdot}35a_1 - 18\,971{\cdot}92a_2 &= 1449{\cdot}00 \end{aligned}\right\}$$

بحل هذه المعادلات نحصل على $a_0 = 2{\cdot}588,\ a_1 = 2{\cdot}065,\ a_2 = -0{\cdot}2110$ بهذا ، فإن قطع مكافئ المربعات الصغرى له المعادلة .

$$Y = 2{\cdot}588 + 2{\cdot}065X - 0{\cdot}2110X^2$$

١٤–٣٠ استخدم قطع مكافئ المربعات الصغرى بالمسألة ١٤–٢٩ لتقدير قيم Y لقيم X المعطاة .

الحـل :

لقيمة $X = 1{\cdot}2$ فإن $X = 1{\cdot}2,\ Y_{est.} = 2{\cdot}588 + 2{\cdot}065(1{\cdot}2) - 0{\cdot}2110(1{\cdot}2)^2 = 4{\cdot}762.$ بصورة مماثلة نحصل على القيم المقدرة الأخرى . النتائج موضحة بالجدول ١٤–١٧ الذى يعطى أيضا قيم Y الفعلية .

جـــدول ١٤–١٧

$Y_{est.}$	4·762	5·621	6·962	7·640	7·503	6·613	4·741	2·561
Y	4·5	5·9	7·0	7·8	7·2	6·8	4·5	2·7

١٤–٣١ (أ) أوجد معامل الارتباط الخطى بين المتغيرات X و Y بالمسألة ١٤–٢٩ .

(ب) أوجد معامل الارتباط غير الخطى بين هذه المتغيرات ، مفترضا علاقة القطع المكافئ التى حصلت عليها بالمسألة ١٤–٢٩ .

(ج) أشرح الفرق بين معاملات الأرتباط التى حصلت عليها فى (أ) ، (ب) .

(د) ما هى النسبة المئوية للاختلاف الكلى الذى سيظل غير مفسر تحت فرض علاقة القطع المكافئ بين X ، Y ؟

الحـل :

(١) باستخدام الحسابات التى حصلنا عليها بالجدول ١٤-١٦ المسألة ١٤-٢٩ وبإضافة حقيقة أن $\Sigma Y^2 = 290.52$ نجـد

$$r = \frac{N\Sigma XY - (\Sigma X)(\Sigma Y)}{\sqrt{[N\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2][N\Sigma Y^2 - (\Sigma Y)^2]}} = \frac{(8)(230{\cdot}42) - (42{\cdot}2)(46{\cdot}4)}{\sqrt{[(8)(291{\cdot}20) - (42{\cdot}2)^2][(8)(290{\cdot}52) - (46{\cdot}4)^2]}} = -0{\cdot}3743$$

(ب) من الجدول ١٤-١٦ بالمسألة ١٤-٢٩ ، $14.29,\ \bar{Y} = (\Sigma Y)/N = (46{\cdot}4)/8 = 5{\cdot}80$

إذن ، الاختلاف الكلى $= \Sigma(Y - \bar{Y})^2 = 21.40$

من الجدول ١٤-١٧ بالمسألة ١٤-٣٠ ، الاختلاف المفسر $= \Sigma(Y_{est.} - \bar{Y})^2 = 21{\cdot}02$

بهـذا $r^2 = \frac{\text{الاختلاف المفسر}}{\text{الاختلاف الكلى}} = \frac{21{\cdot}02}{21{\cdot}40} = 0{\cdot}9822$

$r = 0.9911$ أو 0.99 .

(جـ) حقيقة أن الجزء (١) أظهر معامل ارتباط خطى يساوى 0.3743 — فقط يشير من الناحية العملية بعدم وجود علاقة خطية بين $X,\ Y$. على أية حال ، هناك علاقة غير خطية واضحة يمثلها القطع المكافئ بالمسألة ١٤-٢٩ وما يدل على ذلك حقيقة أن معامل الارتباط فى (ب) هـو 0.99 .

(د) $\frac{\text{الاختلاف الغير مفسر}}{\text{الاختلاف الكلى}} = 1 - r^2 = 1 - 0.9822 = 0.0178$

أى أن 1.78% من الاختلاف الكلى ما زال غير مفسر . وهذا قد يرجع إلى التقلبات العشوائية أو إلى متغير إضافى لم يؤخذ فى الاعتبار .

١٤-٣٢ أوجد (١) s_Y (ب) $s_{Y.X}$. لبيانات المسألة ١٤-٢٩

الحـل :

(١) من المسألة ١٤-٣١ (١) $\Sigma(Y - \bar{Y})^2 = 21.40$. إذن الانحراف المعيارى لـ Y هـو

$$s_Y = \sqrt{\frac{\Sigma(Y - \bar{Y})^2}{N}} = \sqrt{\frac{21{\cdot}40}{8}} = 1{\cdot}636 \text{ or } 1{\cdot}64$$

الطريقة الأولى :

باستخدام (١) والمسألة ١٤-٣١ (١) ، نحصل على الخطأ المعيارى لتقدير Y على X وهو

$$s_{Y.X} = s_Y\sqrt{1 - r^2} = 1{\cdot}636\sqrt{1 - (0{\cdot}9911)^2} = 0{\cdot}218 \text{ or } 0{\cdot}22$$

الطريقة الثانية :

باستخدام المسألة ١٤-٣١

$$s_{Y.X} = \sqrt{\frac{\Sigma(Y - Y_{est.})^2}{N}} = \sqrt{\frac{\text{الاختلاف الغير مفسر}}{N}} = \sqrt{\frac{21{\cdot}40 - 21{\cdot}02}{8}} = 0{\cdot}218 \text{ or } 0{\cdot}22$$

الطريقة الثالثة :

باستخدام المسألة ١٤-٢٩ وبمعرفة أن $\Sigma Y^2 = 290.52$ نحصل على

$$s_{Y.X} = \sqrt{\frac{\Sigma Y^2 - a_0 \Sigma Y - a_1 \Sigma XY - a_2 \Sigma X^2Y}{N}} = 0{\cdot}218 \text{ or } 0{\cdot}22.$$

نظرية المعاينة للارتباط :

١٤-٣٣ إذا كان معامل الارتباط المحسوب من عينة حجمها 18 هو 0.32 . هل يمكن أن نستنتج عند مستوى المعنوية (أ) 0.05 (ب) 0.01 أن معامل الارتباط المقابل للمجتمع يختلف عن الصفر ؟

الحل :

نريد الاختيار بين الفروض $H_0 : \rho = 0$ ، $H_1 : \rho > 0$.

$$t = \frac{r\sqrt{N-2}}{\sqrt{1-r^2}} = \frac{0{\cdot}32\sqrt{18-2}}{\sqrt{1-(0{\cdot}32)^2}} = 1{\cdot}35$$

(أ) باستخدام اختبار من طرف واحد لتوزيع أستوديفت عند مستوى 0.05 فيجب رفض H_0 إذا كانت $t > t_{0.95} = 1.75$ لدرجات حرية $16 = (18-2)$. بهذا لا نستطيع رفض H_0 عند المستوى 0.05 .

(ب) بما أنه لا يمكننا رفض H_0 عند المستوى 0.05 ، فإنه لا يمكن بالتأكيد رفضه عند المستوى 0.01 .

١٤-٣٤ ما هو الحد الأدنى لحجم العينة الضروري لاستنتاج أن معامل ارتباط قيمته 0.32 يختلف معنويا عن الصفر عند المستوى 0.05 ؟

الحل :

عند مستوى 0.05 وباستخدام اختبار من طرف واحد لتوزيع أستودينت .

فإن الحد الأدنى لقيمة N يجب أن يختار بحيث تكون

$$\frac{0{\cdot}32\sqrt{N-2}}{\sqrt{1-(0{\cdot}32)^2}} = t_{0.95} \qquad \text{لدرجات حرية } N-2$$

لعدد لانهائي لدرجات الحرية $t_{0.95} = 1.64$ بهذا فإن $N = 25.6$.

لقيمة $N = 26$ فإن $\nu = 24,\ t_{0.95} = 1{\cdot}71,\ t = 0{\cdot}32\sqrt{24}/\sqrt{1-(0{\cdot}32)^2} = 1{\cdot}65$

لقيمة $N = 27$ فإن $\nu = 25,\ t_{0.95} = 1{\cdot}71,\ t = 0{\cdot}32\sqrt{25}/\sqrt{1-(0{\cdot}32)^2} = 1{\cdot}69$

لقيمة $N = 28$ فإن $\nu = 26,\ t_{0.95} = 1{\cdot}71,\ t = 0{\cdot}32\sqrt{26}/\sqrt{1-(0{\cdot}32)^2} = 1{\cdot}72$

بهذا فإن الحد الأدنى لحجم العينة هو $N = 28$

١٤–٣٥ قيمة معامل ارتباط محسوب من عينة حجمها 24 هى $r = 0.75$ هل يمكن رفض الفرض بأن معامل ارتباط المجتمع فى مثل صغر القيم :

(١) $\rho = 0.60$ (ب) $\rho = 0.50$ ، عند مستوى المعنوية 0.05 ؟

الحـل :

(١) $\sigma_Z = \dfrac{1}{\sqrt{N-3}} = \dfrac{1}{\sqrt{21}} = 0.2182$ $\quad \mu_Z = 1.1513 \log \left(\dfrac{1+0.60}{1-0.60}\right) = 0.6932,$ $\quad Z = 1.1513 \log \left(\dfrac{1+0.75}{1-0.75}\right) = 0.9730,$

إذن $\quad z = (Z - \mu_Z)/\sigma_Z = (0.9730 - 0.6932)/0.2182 = 1.28$

عند مستوى المعنوية 0.05 وباستخدام اختبار من طرف واحد للتوزيع الطبيعى ، فإننا نرفض الفرض فى حالة وحيدة إذا كانت Z أكبر من 1.64 . بهذا لا يمكن رفض الفرض أن معامل ارتباط المجتمع فى مثل صغر 0.60.

(ب) إذا كانت $\rho = 0.50$ فإن $\mu_Z = 1.1513 \log 3 = 0.5493$ و $z = (0.9730 - 0.5493)/0.2182 = 1.94$

بهذا يمكن رفض الفرض بأن معامل ارتباط المجتمع فى مثل صغر $\rho = 0.50$ عند مستوى المعنوية 0.05 .

١٤–٣٦ كان معامل الارتباط بين درجات الامتحان النهائى فى الطبيعة والرياضة لمجموعة من 21 طالبا هو 0.80 . أوجد 95% حدود ثقة لهذا المعامل .

الحـل :

بما أن $r = 0.80$ و $N = 21$ فإن 95% حدود ثقة لـ μ_Z تعطى بما يلى :

$$Z \pm 1.96\sigma_Z = 1.1513 \log \left(\frac{1+r}{1-r}\right) \pm 1.96 \left(\frac{1}{\sqrt{N-3}}\right) = 1.0986 \pm 0.4620$$

إذن μ_Z لها 95% فترة ثقة من 0.5366 إلى 1.6606

إذا كانت $\mu_Z = 1.1513 \log \left(\dfrac{1+\rho}{1-\rho}\right) = 0.5366$ فإن $\rho = 0.4904$.

إذا كانت $\mu_Z = 1.1513 \log \left(\dfrac{1+\rho}{1-\rho}\right) = 1.5606$ فإن $\rho = 0.9155$

بهذا فإن 95% حدود ثقة لـ ρ هى من 0.49 إلى 0.92 .

١٤–٣٧ معاملان ارتباط حسب الأول من عينة حجمها $N_1 = 28$ فكان $r_1 = 0.50$ والثانى من عينة حجمها $N_2 = 35$ فكان $r_2 = 0.30$ على الترتيب . هل هناك فرق معنوى بين معامل الارتباط عند المستوى 0.05 ؟

الحـل :

$$Z_1 = 1.1513 \log \left(\frac{1+r_1}{1-r_1}\right) = 0.5493, \; Z_2 = 1.1513 \log \left(\frac{1+r_2}{1-r_2}\right) = 0.3095$$

و $\sigma_{z_1 - z_2} = \sqrt{\frac{1}{N_1 - 3} + \frac{1}{N_2 - 3}} = 0{\cdot}2669$

ونريد التقرير بين فرضين $H_0 : \mu_{z_1} = \mu_{z_2}$ و $H_1 : \mu_{z_1} \neq \mu_{z_2}$

تحت الفرض H_0

$$z = \frac{Z_1 - Z_2 - (\mu_{z_1} - \mu_{z_2})}{\sigma_{z_1 - z_2}} = \frac{0{\cdot}5493 - 0{\cdot}3095 - 0}{0{\cdot}2669} = 0{\cdot}8985$$

باستخدام اختبار من طرفين للتوزيع الطبيعي ، فيجب رفض H_0 فقط إذا كانت $z > 1.96$ أو $z < -1.96$. بهذا لا يمكن رفض H_0 ونستنتج من ذلك أن الفروق غير معنوية عند المستوى 0.05 .

نظرية المعاينة للانحدار :

١٤-٣٨ فى المسألة ١٤-١ نجد أن معادلة انحدار Y على X هى $Y = 35.82 + 0.476\,X$. اختبر صحة الفرض القائل أنه عند مستوى المعنوية 0.05 يكون معامل انحدار معادلة انحدار المجتمع فى مثل انخفاض 0.180 .

الحـل :

$$t = \frac{a_1 - A_1}{s_{Y.X}/s_X}\sqrt{N-2} = \frac{0{\cdot}476 - 0{\cdot}180}{1{\cdot}28/2{\cdot}66}\sqrt{12-2} = 1{\cdot}95$$

نظرا لأن $s_{Y.X} = 1{\cdot}28$ (محسوبة من المسألة ١٤-٥) و $s_X = \sqrt{(\Sigma x^2)/N} = \sqrt{84{\cdot}68/12} = 2{\cdot}66$ (من المسالة ١٤-٢) .

باستخدام اختبار من طرف واحد لتوزيع أستوديت عند مستوى 0.05 نجد أنه يجب رفض الفرض القائل أن معامل الانحدار فى مثل انخفاض 0.180 إذا كانت $t > t_{.95} = 1.81$ لدرجات حرية $10 = (2 - 12)$ · وبهذا لا يمكن رفض الفرض .

١٤-٣٩ أوجد 95% حدود ثقة لمعامل الانحدار فى المسألة السابقة .

الحـل :

95% حدود ثقة لـ A_1 (نحصل عليها بوضع $t = \pm t_{0.975} = \pm 2.23$ لدرجات حرية $10 = 2 - 12$) هى $A_1 = a_1 - \frac{t}{\sqrt{N-2}}\frac{s_{Y.X}}{s_X}$. إذن

$$a_1 \pm \frac{2{\cdot}23}{\sqrt{12-2}}\left(\frac{s_{Y.X}}{s_X}\right) = 0{\cdot}476 \pm \frac{2{\cdot}23}{\sqrt{10}}\left(\frac{1{\cdot}28}{2{\cdot}66}\right) = 0{\cdot}476 \pm 0{\cdot}340$$

أى أننا واثقين بنسبة 95% بأن A_1 تقع بين 0.136 و 0.816

١٤-٤٠ فى المسألة ١٤-١ ، أوجد 95 % حدود ثقة لأوزان الأبناء الذين تكون أوزان آبائهم .

(ا) 65.0 kg (ب) 70.0 kg

الحـــل :

بما أن $t_{0.975} = 2.23$ لدرجات حرية $10 = (2 - 12)$ ، فإن 59% حدود ثقة لـ Y_p (أنظر صفحة ٣٩٧) تعطى كالآتى :

$$Y_0 \pm \frac{2.23}{\sqrt{N-2}} s_{Y.X} \sqrt{N+1+\frac{(X_0-\bar{X})^2}{s_X^2}}.$$

حيث $Y_0 = 35.82 + 0.476\ X_0$ (المسألة ١٤-١) ، $s_{Y.X}$ 1.28, s_X = 2.26
(المسألة ١٤-٣٨) و $N = 12$

(ا) إذا كانت $X_0 = 65.0,\ Y_0 = 66.76$ kg. وكذلك ، فإن $(X_0 - \bar{X})^2 = (65.0 - 800/12)^2 = 2.78.$ ، فإن 95% حدود ثقة هى :

$$66.76 \pm \frac{2.23}{\sqrt{10}}(1.28)\sqrt{12+1+\frac{2.78}{(2.66)^2}} = 66.76 \pm 3.31 \text{ kg}$$

بمعنى أننا واثقون بنسبة 95% أن أوزان الأبناء تقع بين 63.4 و 70.1 kg

(ب) إذا كانت $X_0 = 70.0$ فإن $Y_0 = 69.14$ kg . كذلك $(X_0 - \bar{X})^2 = (70.0 - 800/12)^2 = 11.11.$
إذن 95% حدود ثقة حسبت كالآتى 69.14 ± 3.45 kg أى أننا تكون واثقين بنسبة حوالى 95% بأن أوزان الأبناء تقع بين65.7 و 72.6 kg .

لاحظ أنه لقيم N الكبيرة ، فإن 95% حدود ثقة تعطى تقريبا بالمعادلة $Y_0 \pm 1.96 s_{Y.X}$ أو $Y_0 \pm 2 s_{Y.X}$ على شرط أن $(X_0 - \bar{X})$ ليست كبيرة . هذا يتفق مع النتيجة التقريبية المشار إليها فى صفحة ٢٥١ .

طرق هذه المسألة تنطبق بصرف النظر عن حجم N أو $(X_0 - \bar{X})$ ، بمعنى أن طرق المعاينة مضبوطة .

١٤-٤١ فى المسألة ١٤-١ ، أوجد 95% حدود ثقة لمتوسط أوزان الأبناء الذين تكون أوزان آبائهم .

(ا) 65.0 kg (ب) 70.0 kg .

الحـــل :

بما أن $t_{0.975} = 2.23$ لدرجات حرية 10 ، فإن 95% حدود ثقة لـ $\bar{Y}_p$ (أنظر صفحة ٣٩٧) تعطى كما يلى .

$$Y_0 \pm \frac{2.23}{\sqrt{10}} s_{Y.X} \sqrt{1+\frac{(X_0-\bar{X})^2}{s_X^2}}$$

حيث $Y_0 = 35.82 + 0.476\ X_0$ (المسألة ١٤-١) ، $s_{Y.X} = 1.28,\ s_X = 2.66$
(المسألة 14.38) .

(ا) إذا كانت $X_0 = 65.0$ ، نجد (قارن بالمسألة ١٤ - ٤٠ (ا)) أن 95% حدود ثقة هى

(66.76 ± 1.07) kg ، أى أننا نكون واثقين بحوالى 95% أن متوسط الأوزان لجميع الأبناء الذين تكون أوزان آبائهم 65.0 kg سوف تقع بين 65.7 و 67.8 kg .

(ب) إذا كانت $X_0 = 70.0$ ، نجد (قارن بالمسألة ١٤ - ٤٠ (ب)) أن 95% حدود ثقة هى (69.14 ± 1.45) kg أى أننا نكون واثقين بحوالى 95% أن متوسط الأوزان لجميع الأبناء الذين تكون أوزان آبائهم 70.0 kg سوف تقع بين 67.7 و 70.6 kg .

مسائل اضافية

الانحدار الخطى والارتباط :

١٤-٤٢ الجدول التالى يوضح أول درجتين ، يرمز لهما بالرمزين Y و X على الترتيب ، لعشرة من الطلبة فى امتحانين مفاجئين قصيرين فى مادة البيولوجى .

(أ) كون شكل الانتشار .

(ب) أوجد خط انحدار المربعات الصغرى لـ Y على X .

ج : $Y = 4.000 + 0.500\, X$.

(ج) أوجد خط انحدار المربعات الصغرى لـ X على Y .

ج : $X = 2.408 + 6120.\, Y$

(د) ارسم خطا الانحدار فى (ب) ، (ج) على شكل الانتشار فى (أ) .

(X) درجات الامتحان المفاجىء الأول	6	5	8	8	7	6	10	4	9	7
(Y) درجات الامتحان المفاجىء الثانى	8	7	7	10	5	8	10	6	8	6

١٤-٤٣ أوجد (أ) $s_{Y \cdot X}$ (ب) $s_{X \cdot Y}$ ، للبيانات بالمسألة السابقة .

ج : (أ) 1.304 (ب) 1.443

١٤-٤٤ احسب (أ) الاختلاف الكلى فى Y ، (ب) الاختلاف الغير مفسر فى Y (ج) الاختلاف المفسر فى Y ، لبيانات المسألة ١٤-٤٢ .

ج : (أ) 24.50 ، (ب) 17.00 ، (ج) 7.50

١٤-٤٥ استخدم نتائج المسألة ١٤-٤٤ لايجاد معامل الارتباط بين مجموعتى درجات الامتحان فى المسألة ١٤-٤٢ .

ج : 0.5533

١٤-٤٦ (ا) أوجد معامل الارتباط بين درجات الامتحانين فى المسألة ١٤-٤٢ باستخدام صيغة عزم حاصل الضرب وقارن بنتيجة المسألة ١٤ - ٤٥ .

(ب) أوجد معامل الارتباط مباشرة من معاملات الانحدار لخطوط الانحدار بالمسائل ١٤ - ٤٢ (ب) ، (جـ) .

١٤-٤٧ أوجد تغاير البيانات لبيانات المسألة ١٤ - ٤٢ (ا) مباشرة (ب) باستخدام الصيغة $s_{XY} = r s_X s_Y$ ونتيجة المسائل ١٤ - ٤٥ أو ١٤ - ٤٦ .

ج : 1.5 .

١٤-٤٨ الجدول التالى يوضح السن X وضغط الدم Y لاثنتى عشرة امرأة .

(ا) أوجد معامل الارتباط بين Y و X .

(ب) أوجد معادلة انحدار Y على X باستخدام المربعات الصغرى.

(جـ) قدر ضغط الدم لامرأة عمرها 45 سنة .

السن (X)	60	68	42	38	49	55	47	63	36	72	42	56
ضغط الدم (Y)	155	152	140	115	145	150	128	149	118	160	125	147

ج : (ا) 0.8961 (ب) $Y = 80.78 + 1.138\,X$ (جـ) 132 .

١٤-٤٩ أوجد معاملات الارتباط لبيانات (ا) المسألة ١٣-٣٢ بالفصل الثالث عشر (ب) المسألة ١٣ - ٣٥ بالفصل الثالث عشر .

ج : (ا) 0.958 (ب) 0.872 .

١٤-٥٠ معامل الارتباط بين X و Y هو $r = 0.60$.

إذا كانت $\bar{Y} = 20$ و $\bar{X} = 10$, $s_Y = 2.00$ و $s_X = 1.50$.

أوجد معادلات خطوط انحدار (ا) Y على X (ب) X على Y .

ج : (ا) $Y = 0.8\,X + 12$ (ب) $X = 0.45\,Y + 1$

١٤-٥١ احسب (ا) $s_{Y.X}$ (ب) $s_{X.Y}$ لبيانات المسألة ١٤ - ٥٠ .

ج : (ا) 1.60 (ب) 1.20

١٤-٥٢ إذا كانت $s_{Y.X} = 3$ و $s_Y = 5$ أوجد r .

ج : $\pm\, 0.80$

١٤–٥٣ إذا كان معامل الارتباط بين Y و X هو 0.50 ، ما هي النسبة المئوية للاختلاف الكلى الذى يظل غير مفسر بمعادلة الانحدار ؟

ج : 75%

١٤–٥٤ أثبت أن معادلة خط انحدار Y على X يمكن أن تكتب على الصورة $Y - \bar{Y} = \frac{s_{XY}}{s_X^2}(X - \bar{X})$
اكتب المعادلة المناظرة لخط انحدار X على Y .

١٤–٥٥ (ا) احسب معامل الارتباط بين قيم X و Y المتقابلة والموضحة بالجدول المرافق .

X	2	4	5	6	8	11
Y	18	12	10	8	7	5

(ب) أضرب كل قيمة من قيم X بالجدول فى 2 وأضف لها 6
واضرب كل قيمة من قيم Y بالجدول فى 3 وأطرح 15 .
أوجد معامل الارتباط بين مجموعتى الأرقام الجديدة ، وضح السبب فى أنك ستحصل – أو لن تحصل – على نفس النتيجة التى حصلت عليها فى (ا) .

ج : (ا) -0.9203

١٤–٥٦ (ا) أوجد معادلات انحدار Y على X للبيان الموضح فى الأجزاء (ا) ، (ب) بالمسألة السابقة .
(ب) وضح العلاقة بين هذه المعادلات .

ج : (أ) $Y = 18.04 - 1.34\ X$
$Y = 51.18 - 2.01\ X$

١٤–٥٧ أثبت أن معامل الارتباط بين X و Y يمكن أن يكتب على الصورة .

$$r = \frac{\overline{XY} - \bar{X}\bar{Y}}{\sqrt{[\overline{X^2} - \bar{X}^2][\overline{Y^2} - \bar{Y}^2]}}$$

١٤–٥٨ أثبت أن معامل الارتباط لا يعتمد على اختيار نقطة الأصل للمتغيرات أو الوحدات المستخدمة فى التعبير عنها (إرشاد : افترض $X' = c_1X + A,\ Y' = c_2Y + B$ حيث B و A و c_2 و c_1 ثوابت ، وأثبت أن معامل الارتباط بين Y' و X' مثيل لمعامل الارتباط بين Y و X) .

١٤–٥٩ أثبت أنه فى الانحدار الخطى $\frac{s_{Y.X}^2}{s_Y^2} = \frac{s_{X.Y}^2}{s_X^2}$. هل النتيجة تنطبق فى حالة الانحدار غير الخطى ؟

معامل الارتباط للبيانات المجمعة :

١٤–٦٠ أوجد معامل الارتباط بين المتغيرات Y و X والمعطاة قيمها بالجدول التكراري التالي .

Y \ X	59 — 62	63 — 66	67 — 70	71 — 74	75 — 78
90 — 109	2	1			
110 — 129	7	8	4	2	
130 — 149	5	15	22	7	1
150 — 169	2	12	63	19	5
170 — 189		7	28	32	12
190 — 209		2	10	20	7
210 — 229			1	4	2

ج : 0.5402

١٤–٦١ (أ) أوجد معادلة خط انحدار Y على X باستخدام المربعات الصغرى لبيانات المسألة السابقة .

(ب) قدر Y عند $X = 72$ و $X = 64$

ج : (أ) $Y = 3.33\,X - 66.4$ (ب) 173.4 و 146.7

١٤–٦٢ أوجد (أ) $s_{Y.X}$ (ب) $s_{X.Y}$ لبيانات المسألة ١٤–٦٠ .

ج : (أ) 20.36 (ب) 3.30

١٤–٦٣ أثبت الصيغة (٢١) ، صفحة ٣٩٤ ، لمعامل الارتباط للبيانات المجمعة .

ارتباط السلاسل الزمنية :

١٤–٦٤ أوجد معامل الارتباط بين الأرقام القياسية لأسعار المستهلك والأرقام القياسية لأسعار الجملة لجميع السلع بالولايات المتحدة وذلك للسنوات 1949 — 1958 والموضحة بالجدول التالي . فترة الأساس 1947 — 1949 = 100 .
(أنظر المسألة ١٣–٣٧ ، الفصل الثالث عشر) .

السنة	1958	1957	1956	1955	1954	1953	1952	1951	1950	1949
الرقم القياسي لأسعار المستهلك	123·5	120·2	116·2	114·5	114·8	114·4	113·5	111·0	102·8	101·8
الرقم القياسي لأسعار الجملة	119·2	117·6	114·3	110·7	110·3	110·1	111·6	114·8	103·1	99·2

المصدر : مكتب احصاءات العمل

ج : 0.9254

١٤-٥٦ أوجد معامل الارتباط للبيانات بالمسألة ١-٦٦ ، الفصل الأول .

ج : 0.1608

ارتباط الرتب :

١٤-٦٦ حكمان فى مسابقة ، طلب منهما ترتيب 8 متسابقين A, B, C, D, E, F, G, H حسب تفضيلهم ، قدموا الأختبارات الموضحة بالجدول . أوجد معامل ارتباط الرتب وقرر مدى جودة اتفاق الحكمين فى اختيارهما .

	A	B	C	D	E	F	G	H
الحكم الأول	5	2	8	1	4	6	3	7
الحكم الثانى	4	5	7	3	2	8	1	6

ج : $r_{\text{rank}} = \frac{2}{3}$

١٤-٦٧ أوجد معامل ارتباط الرتب للبيانات فى (أ) المسألة ١٤ - ٤٢ (ب) المسألة ١٤-٤٨

ج : (أ) 0.5606 (ب) 0.9318

١٤-٦٨ (أ) أوجد معامل ارتباط الرتب لبيانات المسألة ١٤ - ٥٥ .

(ب) من الملاحظات فى (أ) ، ناقش المساوئ الممكنة لطريقة ارتباط الرتب .

ج : (أ) 1.0000 —

١٤-٦٩ (أ) أوجد معامل ارتباط الرتب لبيانات المسألة ١٤-٦٤ .

(ب) قارن بمعامل الارتباط الذى حصلت عليه فى هذه المسألة .

ج : (أ) 0.7333

نظرية المعاينة للارتباط :

١٤-٧٠ قيمة معامل ارتباط محسوب من عينة حجمها 27 هى 0.40 . هل يمكن أن نستنتج عند مستوى المعنوية (أ) 0.05 (ب) 0.01 أن معامل الارتباط المقابل للمجتمع يختلف عن الصفر ؟

ج : (أ) نعم (ب) لا

١٤-٧١ قيمة معامل ارتباط محسوب من عينة حجمها 35 هى 0.50 . هل يمكن رفض الفرض القائل أن معامل ارتباط المجتمع . (أ) فى مثل صغر $\rho = 0.30$ (ب) فى مثل كبر $\rho = 0.70$ ، مستخدما مستوى المعنوية 0.05 .

ج : (أ) لا (ب) نعم

١٤–٧٢ أوجد (ا) 95% (ب) 99% حدود ثقة لمعامل الارتباط التي قيمته 0.60 والمحسوب من عينة حجمها 28 .

ج : (ا) 0.7951 ,0.2923 (ب) 0.8361 ,0.1763

١٤–٧٣ حل المسألة ١٤–٧٢ إذا كان حجم العينة هـو 52 .

ج : (ا) 0.7500 ,0.3912 (ب) 0.7861 ,0.3146

١٤–٧٤ أوجـد 95% حدود ثقة لمعامل الارتباط المحسوب في

(ا) بالمسألة ١٤–٤٨ .

(ب) بالمسألة ١٤–٦٠ .

ج (ا) 0.7096, 0.9653 (ب) 0.4547, 0.6158

١٤–٧٥ معاملان ارتباط حسب الأول من عينة حجمها 23 فكان 0.80 والثاني من عينة حجمها 82 فكان 0.95 على الترتيب . هل يمكن أن نستنتج عند المستوى (ا) 0.05 (ب) 0.01 ، بأن هناك اختلافا معنويا بين المعاملين .

ج : (ا) نعم (ب) لا

نظرية المعاينة للانحدار :

١٤–٧٦ باستخدام عينة حجمها 27 وجد أن معادلة انحدار Y على X هي $Y = 25.0 + 2.00X$

فإذا كانت $s_{Y.X} = 1.50$ $s_X = 3.00$ $\bar{X} = 7.50$ ، أوجد

(ا) 95% (ب) 99% حدود ثقة لمعامل الانحدار .

ج : (ا) 2.00 ± 0.21

(ب) 2.00 ± 0.28

١٤–٧٧ في المسألة ١٤–٧٦ اختبر صحة الفرض القائل أن معامل انحدار المجتمع .

(ا) في مثل انخفاض 1.70 (ب) في مثل ارتفاع 2.20 ،

عنـد مستوى المعنوية 0.01 .

ج : (ا) باستخدام اختبار من طرف واحد يمكن رفض الفرض .

(ب) باستخدام اختبار من طرف واحد لا يمكن رفض الفرض .

١٤–٧٨ في المسألة ١٤ – ٧٦ أوجد

(ا) 95% (ب) 99% حدود ثقة لـ Y عنـد $X = 6.000$

ج : (ا) 37.0 ± 3.28 (ب) 37.0 ± 4.45

١٤-٧٩ فى المسألة ١٤-٧٦ أوجد

(أ) 95% (ب) 99% حدود ثقة لمتوسط جميع قيم Y المقابلة لقيمة $X = 6.00$.

ج : (أ) 37.0 ± 0.69

(ب) 37.0 ± 0.94

١٤-٨٠ بالرجوع إلى المسألة ١٤-٤٨ ، أوجد 95% حدود ثقة للآتى :

(أ) معامل انحدار Y على X (ب) ضغط الدم للنساء اللاتى أعمارهن 45 سنة

(ج) متوسط ضغط الدم لجميع النساء اللاتى أعمارهن 45 سنة .

(أ) 1.138 ± 0.398

(ب) 132.0 ± 16.6

(ج) 132.0 ± 5.4

الفصل الخامس عشر

معامل الارتباط الجزئى والمتعدد

الارتباط المتعدد :

درجة العلاقة الموجودة بين ثلاث متغيرات أو أكثر تسمى بالارتباط المتعدد . المبادىء الأساسية فى مشكلة الارتباط المتعدد مماثلة لتلك المبادىء فى الارتباط البسيط والذى سبق معالجته بالفصل الرابع عشر .

رمز الدليل :

لإتاحة الفرصة للتعميمات لعدد كبير من المتغيرات ، فن الأوفق استخدام رموز تتضمن الأدلة .

سوف نعتبر $X_1 , X_2 , X_3 , \ldots$ هى المتغيرات تحت الدراسة . ومن ثم نعتبر $X_{11} , X_{12} , X_{13} , \ldots$ القيم التى يمكن أن يأخذها المتغير X_1 و $X_{21} , X_{22} , X_{23} , \ldots$ تعبر عن القيم التى يمكن أن يأخذها المتغير X_2 ، وهكذا ، مستخدماً هذه الرموز نجد أن المجموع مثل $X_{21} + X_{22} + X_{23} + \ldots + X_{2N}$ ، على سبيل المثال ، يمكن أن يكتب على الصورة $\sum_{1}^{N} X_{2j}, \sum_{j} X_{2j}$ أو ببساطة ΣX_2 . وعندما لايكون هناك سبيل للخلط سوف نستخدم الرمز الأخير فى هذه الحالة فإن متوسط X_2 يكتب $\bar{X}_2 = \frac{\Sigma X_2}{N}$.

معادلة الانحدار . مستوى الانحدار :

معادلة الانحدار هى معادلة لتقدير متغير تابع ، وليكن X_1 ، من المتغيرات المستقلة ... ، X_3 ، X_2 وتسمى بمعادلة انحدار X_1 على .... , X_2 , X_3 وباستخدام صيغة الدالة تكتب العلاقة بصورة مختصرة $X_1 = F(X_2 , X_3 , \ldots)$ وتقرأ « X_1 دالة فى X_2 , X_3 ، وهكذا » .

فى حالة ثلاث متغيرات ، أبسط معادلة انحدار لـ X_1 على X_3 و X_2 لها الشكل

$$X_1 = b_{1\cdot 23} + b_{12\cdot 3}X_2 + b_{13\cdot 2}X_3 \qquad (1)$$

حيث $b_{13\cdot 2}$ ، $b_{12\cdot 3}$ ، $b_{1\cdot 23}$ ثوابت .

فى المعادلة (١) ، إذا اعتبرنا X_3 ثابت ، فإن الرسم البيانى لـ X_1 مقابل X_2 يعبر عن خط مستقيم ميله $b_{12\cdot 3}$ وإذا احتفظنا بـ X_2 ثابت فإن الرسم البيانى لـ X_1 مقابل X_3 يعبر عن خط مستقيم ميله $b_{13\cdot 2}$. ومن الواضح أن الرقم التالى للنقطة فى الدليل يوضح المتغيرات المعتبرة كثوابت فى كل حالة .

ونتيجة لحقيقة أن X_1 تتغير جزئياً بسبب التغير فى X_2 وجزئياً بسبب التغير فى X_3 ، فإننا نسمى $b_{12\cdot3}$. بمعامل الانحدار الجزئى لـ X_1 على X_2 مع اعتبار X_3 ثابت و $b_{13\cdot2}$ بمعامل الانحدار الجزئى لـ X_1 على X_3 مع اعتبار X_2 ثابت .

المعادلة (١) تسمى بمعادلة الانحدار الخطى لـ X_1 على X_2 و X_3 . وتمثل فى نظام للاحداثيات المتعامدة ذات الثلاثة أبعاد بمستوى يسمى مستوى الانحدار وهو يعد تعميماً لحالة الانحدار فى متغيرين الذى درس فى الفصل الثالث عشر .

المعادلات الاعتدالية لمستوى انحدار المربعات الصغرى :

كما أنه يوجد خطوط انحدار المربعات الصغرى التى تقرب مجموعة من N من نقط البيانات (X, Y) فى شكل انتشار ذى بعدين ، فإنه يوجد أيضاً مستوى انحدار المربعات الصغرى والذى يوفق مجموعة من N نقط من نقط البيانات (X_1, X_2, X_3) فى شكل انتشار ذى ثلاثة أبعاد .

مستوى انحدار المربعات الصغرى لـ X_1 على X_3 ، X_2 يعبر عنه بالمعادلة (١) حيث $b_{13\cdot2}$ ، $b_{12\cdot3}$ ، $b_{1\cdot23}$ تحدد بحل المعادلات الاعتدالية الآتية آنياً :

$$\left.\begin{aligned}\Sigma X_1 &= b_{1.23}N + b_{12.3}\Sigma X_2 + b_{13.2}\Sigma X_3\\ \Sigma X_1X_2 &= b_{1.23}\Sigma X_2 + b_{12.3}\Sigma X_2^2 + b_{13.2}\Sigma X_2X_3\\ \Sigma X_1X_3 &= b_{1.23}\Sigma X_3 + b_{12.3}\Sigma X_2X_3 + b_{13.2}\Sigma X_3^2\end{aligned}\right\} \quad (٢)$$

حيث نحصل عليها بصورة أساسية بضرب طرفى المعادلة (١) فى $1, X_2, X_3$ على التوالى ثم التجميع على الطرفين :

مالم يذكر خلاف ذلك ، فإنه عند الإشارة إلى معادلة الانحدار فإننا نفترض أننا نعنى معادلة انحدار المربعات الصغرى .

إذا كانت $x_1 = X_1 - \bar{X}_1$ ، $x_2 = X_2 - \bar{X}_2$ ، $x_3 = X_3 - \bar{X}_3$ ، فإنه يمكن كتابة معادلة انحدار X_1 على X_3 ، X_2 بصورة أكثر بساطة كالآتى :

$$x_1 = b_{12.3}x_2 + b_{13.2}x_3 \quad (٣)$$

حيث $b_{13\cdot2}$ ، $b_{12\cdot3}$ نحصل عليها بحل المعادلات الآتية آنياً

$$\left.\begin{aligned}\Sigma x_1x_2 &= b_{12.3}\Sigma x_2^2 + b_{13.2}\Sigma x_2x_3\\ \Sigma x_1x_3 &= b_{12.3}\Sigma x_2x_3 + b_{13.2}\Sigma x_3^2\end{aligned}\right\} \quad (٤)$$

هذه المعادلات ، وهى مكافأة للمعادلات الاعتدالية (٢) نحصل عليها بصورة أساسية بضرب طرفى المعادلة (٣) فى x_3 و x_2 على التوالى ثم التجميع على الطرفين . أنظر المسألة ١٥ — ٨ .

مستويات الانحدار ومعاملات الانحدار :

إذا رمزنا لمعامل الارتباط بين X_2 ، X_1 بالرمز r_{12} وبين X_3 ، X_1 بالرمز r_{13} وبين X_3 ، X_2 بالرمز r_{23} حيث يتم حسابها كما فى الفصل الرابع عشر (تسمى أحياناً بمعاملات الارتباط من الدرجة صفر) ، فإن معادلة انحدار مستوى المربعات الصغرى هى

$$\frac{x_1}{s_1} = \left(\frac{r_{12} - r_{13}r_{23}}{1 - r_{23}^2}\right)\frac{x_2}{s_2} + \left(\frac{r_{13} - r_{12}r_{23}}{1 - r_{23}^2}\right)\frac{x_3}{s_3} \tag{٥}$$

حيث $x_1 = X_1 - \bar{X}_1, x_2 = X_2 - \bar{X}_2, x_3 = X_3 - \bar{X}_3$ ؛ s_3 ، s_2 و s_1 هى الانحرافات المعيارية لكل من X_1 ، X_2 ، X_3 على الترتيب (أنظر المسألة ١٥ - ٩) .

لاحظ أنه إذا كان المتغير X_3 غير موجود و $X_1 = Y$ و $X_2 = X$ ، فإن المعادلة (٥) تختصر إلى المعادلة (٢٥) صفحة ٣٩٤ ، بالفصل الرابع عشر .

الخطأ المعيارى للتقدير :

بتعميم المعادلة (٨) صفحة ٣٩٠ ، بالفصل الرابع عشر ، يمكن أن نعرف الخطأ المعيارى للتقدير X_1 على X_3 و X_2 كالتالى :

$$s_{1.23} = \sqrt{\frac{\Sigma(X_1 - X_{1\,\text{est.}})^2}{N}} \tag{٦}$$

حيث $X_{1\,\text{est.}}$ تعبر عن قيم X_1 المقدرة كما هى محسوبة من معادلات انحدار (١) أو (٥)

وبدلالة معاملات الارتباط r_{23} ، r_{13} ، r_{12} ، فإن الخطأ المعيارى للتقدير يمكن حسابه أيضاً من النتيجة

$$s_{1.23} = s_1\sqrt{\frac{1 - r_{12}^2 - r_{13}^2 - r_{23}^2 + 2r_{12}r_{13}r_{23}}{1 - r_{23}^2}} \tag{٧}$$

التفسير المستند إلى نظرية المعاينة للخطأ المعيارى للتقدير فى حالة متغيرين كما هو معطى بالصفحة ٣٩٠ فى حالة ما إذا كانت N كبيرة يمكن تعميمه لحالة الأبعاد الثلاثة وذلك بإحلال الخطوط الموازية لخط الانحدار بمستويات موازية لمستوى الانحدار . و كتقدير أفضل للخطأ المعيارى للمجتمع للتقدير نستخدم

$$\hat{s}_{1.23} = \sqrt{N/(N-3)}\; s_{1.23}.$$

معامل الارتباط المتعدد :

يعرف معامل الارتباط المتعدد كامتداد للمعادلات (١٢) أو (١٤) صفحة ٣٩٢ بالفصل الرابع عشر . فعلى سبيل المثال ، فإنه فى حالة متغيرين مستقلين ، فإن معامل الارتباط المتعدد يعرف كما يلى :

$$R_{1.23} = \sqrt{1 - \frac{s^2_{1.23}}{s^2_1}} \qquad (٨)$$

حيث S_1 هو الانحراف المعيارى للمتغير X_1 و $S_{1.23}$ يعرف بالمعادلة (٦) أو (٧) . المقدار $R^2_{1.23}$ يسمى معامل التحديد المتعدد .

وعند استخدام معادلة الانحدار الخطى ، فإن معامل الارتباط المتعدد يسمى معامل الارتباط المتعدد الخطى . وما لم يذكر خلاف ذلك ، فإنه عند الإشارة إلى معامل الارتباط المتعدد فإن هذا يتضمن الارتباط المتعدد الخطى .

بدلالة r_{23} و r_{13} و r_{12} يمكن كتابة المعادلة (٨) كالآتى :

$$R_{1.23} = \sqrt{\frac{r^2_{12} + r^2_{13} - 2r_{12}r_{13}r_{23}}{1 - r^2_{23}}} \qquad (٩)$$

معامل الارتباط المتعدد ، مثل $R_{1.23}$ يقع بين صفر وواحد . وكلما اقترب من واحد كلما كان الارتباط الخطى بين المتغيرات أفضل . وكلما اقترب من الصفر كلما كان الارتباط الخطى أسوأ . فإذا كان معامل الارتباط المتعدد يساوى الواحد، فإن الارتباط يسمى تام ، وعلى الرغم من أن معامل الارتباط صفر يشير إلى عدم وجود علاقة خطية بين المتغيرات ، فإنه من الممكن وجود علاقة غير خطية .

تبديل المتغير التابع :

النتائج السابقة صحيحة فى حالة اعتبار X_1 هو المتغير التابع . وعلى أية حال ، فإذا أردنا اعتبار X_3 ، على سبيل المثال ، كمتغير تابع بدلا من X_1 ، فإنه يجب فقط إبدال الدليل 1 بدلا من 3 و 3 بدلا من 1 ، فى الصيغة التى حصلنا عليها .

على سبيل المثال ، معادلة انحدار X_3 على X_1 و X_2 ستصبح

$$\frac{x_3}{s_3} = \left(\frac{r_{23} - r_{13}r_{12}}{1 - r^2_{12}}\right)\frac{x_2}{s_2} + \left(\frac{r_{13} - r_{23}r_{12}}{1 - r^2_{12}}\right)\frac{x_1}{s_1} \qquad (١٠)$$

كما حصلنا عليها من المعادلة (٥) ، باستخدام $r_{32} = r_{23}, r_{31} = r_{13}, r_{21} = r_{12}$

التعميم فى حالة أكثر من ثلاث متغيرات :

هذه الحالة نحصل عليها بالمماثلة مع النتائج السابقة . على سبيل المثال ، فإن معادلة الانحدار الخطى لـ X_1 على X_2, X_3, X_4 يمكن كتابتها على الصورة

$$X_1 = b_{1.234} + b_{12.34}X_2 + b_{13.24}X_3 + b_{14.23}X_4 \qquad (١١)$$

ويمثل مستوى زائدى فى مجال ذى أربعة أبعاد . بضرب طرفى المعادلة (١١) فى $1 , X_2 , X_3 , X_4$ على التوالى ثم التجميع على الطرفين نحصل على المعادلات الاعتدالية اللازمة لتحديد قيمة $b_{1.234}, b_{12.34}, b_{13.24}$ and $b_{14.23}$. والتى بإحلالها فى (١١) نحصل على معادلة انحدار المربعات الصغرى ا X_1 على X_2 , X_3 , X_4 . وهذه يمكن كتابتها فى صورة مماثلة للمعادلة (٥) . (أنظر المسألة ١٤ – ٤١) .

الارتباط الجــزئى :

غالباً ما يكون من المهم قياس الارتباط بين المتغير التابع ، ومتغير مستقل معين عندما نعتبر جميع المتغيرات الأخرى ثابتة، أى عندما نزيل أثر جميع المتغيرات الأخرى (ويشار إليها بالعبارة « العوامل الأخرى تظل متساوية ») . وهذه يمكن الحصول عليها بتعريف معامل الارتباط الجزئى كما فى المعادلة (١٢) صفحة ٣٩٢ بالفصل الرابع عشر ، فيما عدا أننا يجب اعتبار الاختلافات المفسرة و الاختلافات الغير مفسرة والتى تنشأ مع وجود المتغير المستقل وكذلك التى تنشأ فى حالة عدم وجوده .

فإذا كان $r_{12.3}$ يعبر عن معامل الارتباط الجزئى بين X_1 و X_2 مع تثبيت X_3 ، فإننا نجد

$$r_{12.3} = \frac{r_{12} - r_{13}r_{23}}{\sqrt{(1 - r_{13}^2)(1 - r_{23}^2)}} \qquad (١٢)$$

وبصورة مماثلة إذا كانت $r_{12.34}$ هى معامل الارتباط الجزئى بين X_1 و X_2 مع تثبيت X_4 و X_3 ، فإن

$$r_{12.34} = \frac{r_{12.4} - r_{13.4}r_{23.4}}{\sqrt{(1 - r_{13.4}^2)(1 - r_{23.4}^2)}} = \frac{r_{12.3} - r_{14.3}r_{24.3}}{\sqrt{(1 - r_{14.3}^2)(1 - r_{24.3}^2)}} \qquad (١٣)$$

وهذه النتائج مفيدة نظراً لدلالتها فإن أى معامل ارتباط جزئى يمكن فى النهاية جعله يعتمد على معاملات الارتباط r_{12} , r_{23} وهكذا (أى على معاملات الارتباط ذات الرتبة صفر) .

فى حالة متغيرين Y و X ، فإنه إذا كان خطى الانحدار $Y = a_0 + a_1X$ و $X = b_0 + b_1 Y$ ، فإن $r^2 = a_1 b_1$ (أنظر المسألة ١٤ – ٢٢ ، الفصل الرابع عشر) . وهذه النتيجة يمكن تعميمها . فعلى سبيل المثال ، إذا كان

$$X_1 = b_{1.234} + b_{12.34}X_2 + b_{13.24}X_3 + b_{14.23}X_4 \qquad (١٤)$$

و

$$X_4 = b_{4.123} + b_{41.23}X_1 + b_{42.13}X_2 + b_{43.12}X_3 \qquad (١٥)$$

هى معادلات خطية فى X_1 على X_4 و X_3 و X_2 و X_4 على X_3 و X_2 و X_1 على الترتيب ، إذن

$$r_{14.23}^2 = b_{14.23}b_{41.23} \qquad (١٦)$$

(أنظر المسألة ١٥ – ١٨) وهذه يمكن اعتبارها نقطة بداية فى تعريف معامل الارتباط الجزئى الخطى .

العلاقة بين معاملات الارتباط المتعددة والجزئية :

يمكن الحصول على نتائج ذات أهمية تربط بين معاملات الارتباط المتعددة ومعاملات الارتباط الجزئية المختلفة . على سبيل المثال ، نجد

$$1 - R^2_{1.23} = (1 - r^2_{12})(1 - r^2_{13.2}) \qquad (١٧)$$

$$1 - R^2_{1.234} = (1 - r^2_{12})(1 - r^2_{13.2})(1 - r^2_{14.23}) \qquad (١٨)$$

ومن السهل تعميم هذه النتائج :

معامل الارتباط المتعدد غير الخطى :

النتائج السابقة للانحدار المتعدد الخطى يمكن امتدادها لتشمل الانحدار المتعدد غير الخطى . معاملات الارتباط المتعددة والجزئية يمكن كذلك تعريفها بطرق مماثلة كالتي شرحت أعلاه .

مسائل محلولة

معادلات انحدار تتضمن أكثر من ثلاث متغيرات :

١٥ - ١ باستخدام رموز الدليل الملائمة ، اكتب معادلات الانحدار

(أ) X_2 على X_1 و X_3 (ب) X_3 على X_1 و X_2 و X_4

(جـ) X_5 على X_1 و X_2 و X_3 و X_4

الحـل :

(أ) $X_2 = b_{2.13} + b_{21.3}X_1 + b_{23.1}X_3$

(ب) $X_3 = b_{3.124} + b_{31.24}X_1 + b_{32.14}X_2 + b_{34.12}X_4$

(جـ) $X_5 = b_{5.1234} + b_{51.234}X_1 + b_{52.134}X_2 + b_{53.124}X_3 + b_{54.123}X_4$

١٥ - ٢ اكتب المعادلات الاعتدالية المقابلة لمعادلات الانحدار

(أ) $X_3 = b_{3.12} + b_{31.2}X_1 + b_{32.1}X_2$

(ب) $X_1 = b_{1.234} + b_{12.34}X_2 + b_{13.24}X_3 + b_{14.23}X_4$

الحـــل :

(أ) بضرب المعادلة على الترتيب فى 1 ، X_1 ، X_2 والتجميع على الطرفين . نجد أن المعادلات الاعتدالية هى

$$\left.\begin{aligned}
\Sigma X_3 &= b_{3.12} N + b_{31.2} \Sigma X_1 + b_{32.1} \Sigma X_2 \\
\Sigma X_1 X_3 &= b_{3.12} \Sigma X_1 + b_{31.2} \Sigma X_1^2 + b_{32.1} \Sigma X_1 X_2 \\
\Sigma X_2 X_3 &= b_{3.12} \Sigma X_2 + b_{31.2} \Sigma X_1 X_2 + b_{32.1} \Sigma X_2^2
\end{aligned}\right\}$$

(ب) بضرب المعادلة على الترتيب فى 1 ، X_2 ، X_3 ، X_4 ، والتجميع على الطرفين نجد أن المعادلات الاعتدالية هى

$$\left.\begin{aligned}
\Sigma X_1 &= b_{1.234} N + b_{12.34} \Sigma X_2 + b_{13.24} \Sigma X_3 + b_{14.23} \Sigma X_4 \\
\Sigma X_1 X_2 &= b_{1.234} \Sigma X_2 + b_{12.34} \Sigma X_2^2 + b_{13.24} \Sigma X_2 X_3 + b_{14.23} \Sigma X_2 X_4 \\
\Sigma X_1 X_3 &= b_{1.234} \Sigma X_3 + b_{12.34} \Sigma X_2 X_3 + b_{13.24} \Sigma X_3^2 + b_{14.23} \Sigma X_3 X_4 \\
\Sigma X_1 X_4 &= b_{1.234} \Sigma X_4 + b_{12.34} \Sigma X_2 X_4 + b_{13.24} \Sigma X_3 X_4 + b_{14.23} \Sigma X_4^2
\end{aligned}\right\}$$

لاحظ أن هذه ليست طريقة لاستنتاج المعادلات الاعتدالية ولكنها فقط طريقة أساسية لتذكرها . . . استنتاج هذه المعادلات نحصل عليه ببساطة باستخدام التفاضل كما فى الملحق VIII ، صفحة ٥٤٠

عدد المعادلات الاعتدالية يساوى عدد الثوابت المجهولة .

١٥ – ٣ يعتقد أن المتغير X_1 دالة خطية فى X_2 و X_3 . عينة من 12 من أزواج القراءات (X_2 و X_3) نتج عنها قيم X_1 الموضحة بالجدول ١٥ – ١

(أ) أوجد معادلة انحدار المربعات الصغرى لـ X_1 على X_2 و X_3 .

(ب) أوجد قيمة X_1 المقدرة من قيم X_2 و X_3 المعطاة

(جـ) قدر X_1 عند $X_2 = 54$ و $X_3 = 9$.

جـــدول ١٥ – ١

X_1	64	71	53	67	55	58	77	57	56	51	76	68
X_2	57	59	49	62	51	50	55	48	52	42	61	57
X_3	8	10	6	11	8	7	10	9	10	6	12	9

الحـــل :

(أ) معادلة الانحدار الخطى لـ X_1 على X_2 و X_3 يمكن كتابتها كالآتى :

$$X_1 = b_{1.23} + b_{12.3} X_2 + b_{13.2} X_3$$

فإن المعادلات الاعتدالية لانحدار المربعات الصغرى هى

$$\left.\begin{aligned} \Sigma X_1 &= b_{1.23} N + b_{12.3}\Sigma X_2 + b_{13.2}\Sigma X_3 \\ \Sigma X_1 X_2 &= b_{1.23}\Sigma X_2 + b_{12.3}\Sigma X_2^2 + b_{13.2}\Sigma X_2 X_3 \\ \Sigma X_1 X_3 &= b_{1.23}\Sigma X_3 + b_{12.3}\Sigma X_2 X_3 + b_{13.2}\Sigma X_3^2 \end{aligned}\right\} \qquad (١)$$

العمل المتضمن فى حساب المجاميع يمكن ترتيبه كما فى الجدول ١٥ – ٢ . على الرغم من أننا لسنا الآن فى حاجة إلى العمود المعنون X_1^2 ، إلا أننا أضفناه لاستخدامه فيما بعد .

جــدول ١٥ – ٢

X_1	X_2	X_3	X_1^2	X_2^2	X_3^2	X_1X_2	X_1X_3	X_2X_3
64	57	8	4096	3249	64	3648	512	456
71	59	10	5041	3481	100	4189	710	590
53	49	6	2809	2401	36	2597	318	294
67	62	11	4489	3844	121	4154	737	682
55	51	8	3025	2601	64	2805	440	408
58	50	7	3364	2500	49	2900	406	350
77	55	10	5929	3025	100	4235	770	550
57	48	9	3249	2304	81	2736	513	432
56	52	10	3136	2704	100	2912	560	520
51	42	6	2601	1764	36	2142	306	252
76	61	12	5776	3721	144	4636	912	732
68	57	9	4624	3249	81	3876	612	513
ΣX_1 753	$\Sigma X_2 =$ 643	$\Sigma X_3 =$ 106	$\Sigma X_1^2 =$ 48 139	$\Sigma X_2^2 =$ 34 843	$\Sigma X_3^2 =$ 976	$\Sigma X_1X_2 =$ 40 830	$\Sigma X_1X_3 =$ 6796	$\Sigma X_2X_3 =$ 5779

باستخدام الجدول ١٥ – ٢ ، فإن المعادلات الاعتدالية (١) تصبح

$$\left.\begin{aligned} 12b_{1.23} + 643b_{12.3} + 106b_{13.2} &= 753 \\ 643b_{1.23} - 34\,843b_{12.3} + 5\,779b_{13.2} &= 40\,830 \\ 106b_{1.23} - 5\,779b_{12.3} - 976b_{13.2} &= 6\,796 \end{aligned}\right| \qquad (٢)$$

بالحل نجد $b_{1.23} = 3{\cdot}6512, b_{12.3} = 0{\cdot}8546, b_{13.2} = 1{\cdot}5063$ ومعادلة الانحدار المطلوبة هى

$$X_1 = 3{\cdot}6512 + 0{\cdot}8546X_2 + 1{\cdot}5063X_3 \quad \text{أو} \quad X_1 = 3{\cdot}65 + 0{\cdot}855X_2 + 1{\cdot}506X_3 \qquad (٣)$$

لطريقة أخرى نتلافى فيها حل المعادلات آنياً ، (أنظر المسألة ١٥ – ٦)

(ب) باستخدام معادلة الانحدار (٣) نحصل على قيم X_1 المقدرة ، ويرمز لها بالرمز $X_{1\,est}$ ، وذلك بالتعويض عن قيم X_2 و X_3 المقابلة . على سبيل المثال ، بالتعويض عن $X_2 = 57$ و $X_3 = 8$ فى (٣) نجد أن $X_{1\,est} = 64.414$.

وبطريقة مماثلة نحصل على القيم الأخرى المقدرة لـ X_1 وهى موضحة بالجدول ١٥ – ٣ مع قيم العينة لـ X_1

جدول ١٥ – ٣

$X_{1\ est.}$	64·414	69·136	54·564	73·206	59·286	56·925	65·717	58·229	63·153	48·582	73·857	65·920
X_1	64	71	53	67	55	58	77	57	56	51	76	68

(جـ) بوضع $X_2 = 54$ و $X_3 = 9$ في المعادلة (٣) ، فإن التقدير هو $X_{1\ est} = 63.356$ أو حوالى 63 .

١٥ – ٤ احسب الانحرافات المعيارية (أ) s_1 (ب) s_2 (جـ) s_3 لبيانات المسألة ١٥ – ٣ .

الحـل :

(أ) المقدار s_1 هو الانحراف المعيارى للمتغير X_1 . إذن باستخدام الجدول ١٥ – ٢ بالمسألة ١٥ – ٣ (أ) نجد ، باستخدام طرق الفصل الرابع

$$s_1 = \sqrt{\frac{\Sigma X_1^2}{N} - \left(\frac{\Sigma X_1}{N}\right)^2} = \sqrt{\frac{48\,139}{12} - \left(\frac{753}{12}\right)^2} = 8{\cdot}6035 \text{ or } 8{\cdot}6$$

(ب)

$$s_2 = \sqrt{\frac{\Sigma X_2^2}{N} - \left(\frac{\Sigma X_2}{N}\right)^2} = \sqrt{\frac{34\,843}{12} - \left(\frac{643}{12}\right)^2} = 5{\cdot}6930 \text{ or } 5{\cdot}7$$

(جـ)

$$s_3 = \sqrt{\frac{\Sigma X_3^2}{N} - \left(\frac{\Sigma X_3}{N}\right)^2} = \sqrt{\frac{976}{12} - \left(\frac{106}{12}\right)^2} = 1{\cdot}8181 \text{ or } 1{\cdot}8$$

١٥ – ٥ احسب (أ) r_{12} (ب) r_{13} (جـ) r_{23} لبيانات المسألة ١٥ – ٣

الحـل :

(أ) المقدار r_{12} هومعامل الارتباط الخطى بين المتغيرين X_1 و X_2 ، بإهمال المتغير X_3

إذن وباستخدام طرق الفصل الرابع عشر ، نحصل على

$$r_{12} = \frac{N\,\Sigma X_1X_2 - (\Sigma X_1)(\Sigma X_2)}{\sqrt{[N\,\Sigma X_1^2 - (\Sigma X_1)^2][N\,\Sigma X_2^2 - (\Sigma X_2)^2]}}$$

$$= \frac{(12)(40\,830) - (753)(643)}{\sqrt{[(12)(48\,139) - (753)^2][(12)(34\,843) - (643)^2]}} = 0{\cdot}8196 \text{ or } 0{\cdot}82$$

(ب) ، (جـ) باستخدام الصيغ المقابلة ، نحصل على $r_{13} = 0{\cdot}7698$ or $0{\cdot}77$, و $r_{23} = 0{\cdot}7984$ or $0{\cdot}80$.

١٥-٦ حل المسألة ١٥ – ٣ (أ) باستخدام المعادلة (٥) فى صفحة ٤٣٢ ونتائج المسائل ١٥ – ٤ و ١٥ – ٥ .

الحـــل :

معادلة انحدار X_1 على X_2 و X_3 هى ، بضرب طرفى المعادلة (٥) ، صفحة ٤٣٢ ، فى s_1 ،

$$x_1 = \left(\frac{r_{12} - r_{13}r_{23}}{1 - r_{23}^2}\right)\left(\frac{s_1}{s_2}\right)x_2 + \left(\frac{r_{13} - r_{12}r_{23}}{1 - r_{23}^2}\right)\left(\frac{s_1}{s_3}\right)x_3 \qquad (١)$$

حيث $x_1 = X_1 - \bar{X}_1, x_2 = X_2 - \bar{X}_2, x_3 = X_3 - \bar{X}_3$. باستخدام نتائج المسائل ١٥ – ٤ ، ١٥ – ٥ ، تصبح المعادلة (١) كالآتى

$$x_1 = 0{\cdot}8546x_2 + 1{\cdot}5063x_3$$

ونظراً لأن $\bar{X}_1 = \frac{\Sigma X_1}{N} = \frac{753}{12} = 62{\cdot}750, \bar{X}_2 = \frac{\Sigma X_2}{N} = 53{\cdot}583, \bar{X}_3 = 8{\cdot}833$ من الجدول ١٥ – ٢ بالمسألة ١٥ – ٣) ، المعادلة المطلوبة يمكن كتابتها كالآتى :

$$X_1 - 62{\cdot}750 = 0{\cdot}8546(X_2 - 53{\cdot}583) + 1{\cdot}506(X_3 - 8{\cdot}833)$$

وهذه تتفق مع نتائج المسألة ١٥ – ٣ (أ) .

١٥-٧ لبيانات المسألة ١٥ – ٣ حدد (أ) متوسط الزيادة فى X_1 المقابلة لوحدة زيادة فى X_2 باعتبار X_3 ثابت (ب) متوسط الزيادة فى X_1 المقابلة لوحدة زيادة فى X_3 باعتبار X_2 ثابت .

الحـــل :

من معادلة الانحدار التى حصلنا عليها فى ١٥ – ٣ (أ) أو ١٥ – ٦ نجد أن إجابة (أ) هى 0.8546 أو حوالى 0.9 وإجابة (ب) هى 1.5063 أو حوالى 1.5 .

١٥-٨ وضح أن المعادلات (٣) و (٤) ، صفحة ٤٣١ ، مترتبة على (١) ، (٢) صفحات ٤٣٠ ، ٤٣١ .

الحـــل :

من المعادلة الأولى فى المعادلات (٢) ، صفحة ٤٣١ ، نجد بقسمة الطرفين على N أن

$$\bar{X}_1 = b_{1.23} + b_{12.3}\bar{X}_2 + b_{13.2}X_3 \qquad (١)$$

بطرح المعادلة من المعادلة (١) ، صفحة ٤٣٠ ، يعطى

$$X_1 - \bar{X}_1 = b_{12.3}(X_2 - \bar{X}_2) + b_{13.2}(X_3 - \bar{X}_3) \qquad (٢)$$

أو

$$x_1 = b_{12.3}x_2 + b_{13.2}x_3$$

وهى المعادلة (٣) ، صفحة ٤٣١ .

اعتبر أن $X_1 = x_1 + \bar{X}_1, X_2 = x_2 + \bar{X}_2, X_3 = x_3 + \bar{X}_3$ فى المعادلات الثانية والثالثة من مجموعة المعادلات (٢) ، صفحة ٤٣١ . إذن بعد عمليات تبسيط جبرية ، وباستخدام النتائج $\Sigma x_1 = \Sigma x_2 = \Sigma x_3 = 0$ ، تصبح هذه المعادلات

$$(٣) \quad \Sigma x_1 x_2 = b_{12.3}\Sigma x_2^2 + b_{13.2}\Sigma x_2 x_3 + N\bar{X}_2[b_{1.23} + b_{12.3}\bar{X}_2 + b_{13.2}\bar{X}_3 - \bar{X}_1]$$

$$(٤) \quad \Sigma x_1 x_3 = b_{12.3}\Sigma x_2 x_3 + b_{13.2}\Sigma x_3^2 + N\bar{X}_3[b_{1.23} + b_{12.3}\bar{X}_2 + b_{13.2}\bar{X}_3 - \bar{X}_1]$$

والتى تختصر إلى المعادلات (٤) ، صفحة ٤٣١ ، نظراً لأن الكميات داخل الأقواس فى الجانب الأيمن فى (٣) و (٤) تصبح صفر من المعادلة (١) .

طريقـة أخرى : أنظر المسألة ١٥ – ٣٠ .

١٥ – ٩ استنتج المعادلة (٥) ، صفحة ٤٣٢ :

$$\frac{x_1}{s_1} = \left(\frac{r_{12} - r_{13}r_{23}}{1 - r_{23}^2}\right)\frac{x_2}{s_2} + \left(\frac{r_{13} - r_{12}r_{23}}{1 - r_{23}^2}\right)\frac{x_3}{s_3}$$

من المعادلات (٣) و (٤) بالمسألة ١٥ – ٨

$$(١) \quad \begin{cases} b_{12.3}\Sigma x_2^2 + b_{13.2}\Sigma x_2 x_3 = \Sigma x_1 x_2 \\ b_{12.3}\Sigma x_2 x_3 + b_{13.2}\Sigma x_3^2 = \Sigma x_1 x_3 \end{cases}$$

بما أن $s_2^2 = \frac{\Sigma x_2^2}{N}$ and $s_3^2 = \frac{\Sigma x_3^2}{N}$ فإن $\Sigma x_2^2 = Ns_2^2$ and $\Sigma x_3^2 = Ns_3^2$

وبما أن $r_{23} = \frac{\Sigma x_2 x_3}{\sqrt{(\Sigma x_2^2)(\Sigma x_3^2)}} = \frac{\Sigma x_2 x_3}{Ns_2 s_3}$ فإن $\Sigma x_2 x_3 = Ns_2 s_3 r_{23}$

وبالمثل $\Sigma x_1 x_2 = Ns_1 s_2 r_{12}$ and $\Sigma x_1 x_3 = Ns_1 s_3 r_{13}$

بالتعويض بهذه القيم فى (١) والتبسيط ، نجد

$$(٢) \quad \begin{cases} b_{12.3}s_2 + b_{13.2}s_3 r_{23} = s_1 r_{12} \\ b_{12.3}s_2 r_{23} + b_{13.2}s_3 = s_1 r_{13} \end{cases}$$

بحل المعادلات (٢) آنياً ، $b_{12.3} = \left(\frac{r_{12} - r_{13}r_{23}}{1 - r_{23}^2}\right)\left(\frac{s_1}{s_2}\right)$ and $b_{13.2} = \left(\frac{r_{13} - r_{12}r_{23}}{1 - r_{23}^2}\right)\left(\frac{s_1}{s_3}\right)$

بالتعويض عن هذه القيم فى المعادلة $x_1 = b_{12.3}x_2 + b_{13.2}x_3$ (المعادلة (٢) ، المسألة ١٥ – ٨) وبالقسمة على s_1 نحصل على النتيجة المطلوبة .

الخطأ المعيارى للتقـــدير :

١٥ - ١٠ احسب الخطأ المعيارى لتقدير X_1 على X_2 و X_3 لبيانات المسألة ١٥ – ٣ .

الحـــل :

من الجدول ١٥ – ٣ بالمسألة ١٥ – ٣ (ب) ، نحصل على

$$s_{1.23} = \sqrt{\frac{\Sigma(X_1 - X_{1\,\text{est.}})^2}{N}}$$

$$= \sqrt{\frac{(64 - 64{\cdot}414)^2 + (71 - 69{\cdot}136)^2 + \cdots - (68 - 65{\cdot}920)^2}{12}} = 4{\cdot}6447 \text{ or } 4{\cdot}6$$

وتقدر الخطأ المعيارى للتقدير المجتمع ؛ $\hat{s}_{1.23} = \sqrt{N/(N-3)}\, s_{1.23} = 5{\cdot}3$ فى هذه الحالة

١٥ - ١١ استخدم $s_{1.23} = s_1\sqrt{\dfrac{1 - r_{12}^2 - r_{13}^2 - r_{23}^2 + 2r_{12}r_{13}r_{23}}{1 - r_{23}^2}}$ للحصول على نتائج المسألة ١٥ – ١٠

الحـــل :

من المسائل ١٥ – ٤ (أ) و ١٥ – ٥ ، نحصل على

$$s_{1.23} = 8{\cdot}6035\sqrt{\frac{1 - (0{\cdot}8196)^2 - (0{\cdot}7698)^2 - (0{\cdot}7984)^2 + 2(0{\cdot}8196)(0{\cdot}7698)(0{\cdot}7984)}{1 - (0{\cdot}7984)^2}} = 4{\cdot}6$$

لاحظ أنه بالطريقة التى استخدمت فى هذه المسألة فإننا نحصل على الخط المعيارى للتقدير بدون استخدام معادلة الانحدار .

معامل الارتباط المتعدد :

١٥ - ١٢ احسب معامل الارتباط المتعدد الخطى ! X_1 على X_2 و X_3 من بيانات المسألة ١٥ – ٣ .

الحـــل :

الطريقة الأولى : من نتائج المسائل ١٥ – ٤ (أ) و ١٥ – ١٠ ، نحصل على

$$R_{1.23} = \sqrt{1 - \frac{s_{1.23}^2}{s_1^2}} = \sqrt{1 - \frac{(4{\cdot}6447)^2}{(8{\cdot}6035)^2}} = 0{\cdot}8418$$

الطريقة الثانية : من نتائج المسألة ١٥ – ٥

$$R_{1.23} = \sqrt{\frac{r_{12}^2 + r_{13}^2 - 2r_{12}r_{13}r_{23}}{1 - r_{23}^2}} = \sqrt{\frac{(0{\cdot}8196)^2 + (0{\cdot}7698)^2 - 2(0{\cdot}8196)(0{\cdot}7698)(0{\cdot}7984)}{1 - (0{\cdot}7984)^2}} = 0{\cdot}8418$$

لاحظ أن معامل الارتباط المتعدد $R_{1.23}$ أكبر من كل من المعاملات r_{12} أو r_{13} (أنظر المسألة ١٥ – ٥) . وهذا صحيح وفى نفس الوقت متوقع ، نظراً لأنه بالأخذ فى الاعتبار إضافة متغيرات مستقلة أكثر لها صلة فيجب أن نصل إلى علاقة أفضل بين المتغيرات .

١٥ – ١٣ احسب معامل التحديد المتعدد ل X_1 على X_2 و X_3 لبيانات المسألة ١٥ – ٣ .

الحـــل :

معامل التحديد المتعدد ل X_1 على X_2 و X_3 هو

$$R_{1.23}^2 = (0{\cdot}8418)^2 = 0{\cdot}7086$$

باستخدام المسألة ١٥ – ١٢ . إذن هناك حوالى 71 % من الاختلاف الكلى فى X_1 المفسر باستخدام معادلة الانحدار

١٥ – ١٤ احسب (أ) $R_{2.13}$ (ب) $R_{3.12}$ لبيانات المسألة ١٥ – ٣ وقارن بقيمة $R_{1.23}$.

الحـــل :

(أ)
$$R_{2.13} = \sqrt{\frac{r_{12}^2 + r_{23}^2 - 2r_{12}r_{13}r_{23}}{1 - r_{13}^2}} = \sqrt{\frac{(0{\cdot}8196)^2 + (0{\cdot}7984)^2 - 2(0{\cdot}8196)(0{\cdot}7698)(0{\cdot}7984)}{1 - (0{\cdot}7698)^2}} = 0{\cdot}8606$$

(ب)
$$R_{3.12} = \sqrt{\frac{r_{13}^2 + r_{23}^2 - 2r_{12}r_{13}r_{23}}{1 - r_{12}^2}} = \sqrt{\frac{(0{\cdot}7698)^2 + (0{\cdot}7984)^2 - 2(0{\cdot}8196)(0{\cdot}7698)(0{\cdot}7984)}{1 - (0{\cdot}8196)^2}} = 0{\cdot}8234$$

هذه المسألة توضح حقيقة أنه ، بشكل عام ، $R_{1.23}$ ، $R_{3.12}$ ، $R_{2.13}$ غير متساوين ، كما هو مشاهد بالمقارنة بالمسألة ١٥ – ١٢ .

١٥ – ١٥ إذا كانت $R_{1.23} = 1$ فاثبت أن (أ) $R_{2.13} = 1$ (ب) $R_{3.12} = 1$.

الحـــل :

$$R_{1.23} = \sqrt{\frac{r_{12}^2 + r_{13}^2 - 2r_{12}r_{13}r_{23}}{1 - r_{23}^2}} \qquad (1)$$

$$R_{2.13} = \sqrt{\frac{r_{12}^2 + r_{23}^2 - 2r_{12}r_{13}r_{23}}{1 - r_{13}^2}} \qquad (٢)$$

(أ) فى (١) بوضع $R_{1.23} = 1$ وتربيع الطرفين ، نجد $r_{12}^2 + r_{13}^2 - 2r_{12}r_{13}r_{23} = 1 - r_{23}^2$ إذن

$$\frac{r_{12}^2 + r_{23}^2 - 2r_{12}r_{13}r_{23}}{1 - r_{13}^2} = 1 \quad \text{أو} \quad r_{12}^2 + r_{23}^2 - 2r_{12}r_{13}r_{23} = 1 - r_{13}^2$$

أى $R_{2.13}^2 = 1$ أو $R_{2.13} = 1$ ، نظراً لأن معامل الارتباط المتعدد يعتبر غير سالب .

(ب) $R_{3.12} = 1$ نستنتج من الجزء (أ) بإبدال الأدلة 2 ، 3 فى النتيجة $R_{2.13} = 1$.

١٥ – ١٦ إذا كانت $R_{1.23} = 0$ ، هل يترتب على ذلك بالضرورة أن تكون $R_{2.13} = 0$ ؟

الحـــل :

من المعادلة (١) بالمسألة ١٥ – ١٥ ، $R_{1.23} = 0$ فى حالة وحيدة فقط ، وهى إذا كانت

$$r_{12}^2 + r_{13}^2 - 2r_{12}r_{13}r_{23} = 0 \quad \text{or} \quad 2r_{12}r_{13}r_{23} = r_{12}^2 + r_{13}^2$$

من المعادلة (٢) بالمسألة ١٥ – ١٥ ،

$$R_{2.13} = \sqrt{\frac{r_{12}^2 + r_{23}^2 - (r_{12}^2 + r_{13}^2)}{1 - r_{13}^2}} = \sqrt{\frac{r_{23}^2 - r_{13}^2}{1 - r_{13}^2}}$$

وهى لاتساوى بالضرورة صفر .

الارتباط الجـــزئى :

١٥ – ١٧ احسب معاملات الارتباط الجزئى الخطى (أ) $r_{12.3}$ (ب) $r_{13.2}$ (جـ) $r_{23.1}$. لبيانات المسألة ١٥ – ٢ .

الحـــل :

$$r_{12.3} = \frac{r_{12} - r_{13}r_{23}}{\sqrt{(1 - r_{13}^2)(1 - r_{23}^2)}} , \quad r_{13.2} = \frac{r_{13} - r_{12}r_{23}}{\sqrt{(1 - r_{12}^2)(1 - r_{23}^2)}} , \quad r_{23.1} = \frac{r_{23} - r_{12}r_{13}}{\sqrt{(1 - r_{12}^2)(1 - r_{13}^2)}}$$

باستخدام نتائج المسألة ١٥ – ٥ ، نجد $r_{12.3} = 0{\cdot}5334, r_{13.2} = 0{\cdot}3346, r_{23.1} = 0{\cdot}4580$

ومنها نجد أنه إذا اعتبرنا X_3 ثابتاً فإن معامل الارتباط بين X_1 و X_2 هو 0.53 . ولقيمة ثابتة لـ X_2 فإن معامل الارتباط بين X_1 و X_3 هو 0.33 . وبما أن هذه النتائج تعتمد على عينة صغيرة حجمها 12 مجموعة من القيم ، فإن الاعتماد عليها ليس فى نفس درجة مأمونية الاعتماد على النتائج التى تحصل عليها من عينة ذات حجم أكبر .

١٥ – ١٨ إذا كانت $X_3 = b_{3.12} + b_{32.1}X_2 + b_{31.2}X_1$ و $X_1 = b_{1.23} + b_{12.3}X_2 + b_{13.2}X_3$ هى معادلات انحدار X_1 على X_2 و X_3 ، X_3 على X_2 و X_1 ، على الترتيب ، أثبت $r^2_{13.2} = b_{13.2}b_{31.2}$

الحـل :

معادلة انحدار X_1 على X_2 و X_3 يمكن كتابتها كالآتى (أنظر المعادلة (٥) صفحة ٤٣٢)

$$X_1 - \bar{X}_1 = \left(\frac{r_{12} - r_{13}r_{23}}{1 - r_{23}^2}\right)\left(\frac{s_1}{s_2}\right)(X_2 - \bar{X}_2) + \left(\frac{r_{13} - r_{12}r_{23}}{1 - r_{23}^2}\right)\left(\frac{s_1}{s_3}\right)(X_3 - \bar{X}_3) \qquad (١)$$

معادلة انحدار X_3 على X_2 و X_1 يمكن كتابتها كالآتى (أنظر المعادلة (١٠) صفحة ٤٣٣)

$$X_3 - \bar{X}_3 = \left(\frac{r_{23} - r_{13}r_{12}}{1 - r_{12}^2}\right)\left(\frac{s_3}{s_2}\right)(X_2 - \bar{X}_2) + \left(\frac{r_{13} - r_{23}r_{12}}{1 - r_{12}^2}\right)\left(\frac{s_3}{s_1}\right)(X_1 - \bar{X}_1) \qquad (٢)$$

من (١) ، (٢) ، نجد أن معامل X_3 هو

$$b_{13.2} = \left(\frac{r_{13} - r_{12}r_{23}}{1 - r_{23}^2}\right)\left(\frac{s_1}{s_3}\right)$$ ومعامل X_1 هو $$b_{31.2} = \left(\frac{r_{13} - r_{23}r_{12}}{1 - r_{12}^2}\right)\left(\frac{s_3}{s_1}\right)$$

إذن

$$b_{13.2}b_{31.2} = \frac{(r_{13} - r_{12}r_{23})^2}{(1 - r_{23}^2)(1 - r_{12}^2)} = r_{13.2}^2$$

١٥ – ١٩ إذا كانت $r_{12.3} = 0$ ، أثبت أن (أ) $r_{13.2} = r_{13}\sqrt{\dfrac{1 - r_{23}^2}{1 - r_{12}^2}}$

(ب) $r_{23.1} = r_{23}\sqrt{\dfrac{1 - r_{13}^2}{1 - r_{12}^2}}$

الحـل :

إذا كانت 0 $r_{12.3} = \dfrac{r_{12} - r_{13}r_{23}}{\sqrt{(1 - r_{13}^2)(1 - r_{23}^2)}}$ فإن $r_{12} = r_{13}r_{23}$

(أ) $$r_{13.2} = \frac{r_{13} - r_{12}r_{23}}{\sqrt{(1 - r_{12}^2)(1 - r_{23}^2)}} = \frac{r_{13} - (r_{13}r_{23})r_{23}}{\sqrt{(1 - r_{12}^2)(1 - r_{23}^2)}} = \frac{r_{13}(1 - r_{23}^2)}{\sqrt{(1 - r_{12}^2)(1 - r_{23}^2)}} = r_{13}\sqrt{\frac{1 - r_{23}^2}{1 - r_{12}^2}}$$

(ب) بدل رموز الدليل 1 و 2 فى نتيجة الجزء (أ)

والحل الدقيق للمعادلة (٢) ينتج $b_{14\cdot23} = {}^5/_9$ ، $b_{13\cdot24} = 0$ ، $b_{12\cdot34} = {}^4/_3$ ، بحيث يمكن أيضاً كتابة معادلة الانحدار كالآتى :

$$X_1 = 23 + \tfrac{4}{3}X_2 + \tfrac{5}{9}X_4 \qquad (٥)$$

ومن المهم ملاحظة أن معادلة الانحدار لاتتضمن درجات اللغة الإنجليزية ، بالتحديد X_3 . وهذا لايعنى أن معرفة الشخص باللغة الإنجليزية ، ليس لها أى صلة بأدائه فى الإحصاء . ولكن تعنى أن الحاجة إلى اللغة الإنجليزية ، فيما يختص بالتنبؤ بدرجات الإحصاء ، تحجبها الدرجات التى تتحقق فى الامتحانات الأخرى .

١٥ – ٢١ طالبان أديا امتحان الالتحاق بالكلية الموضحة فى المسألة ١٥ – ٢٠ ، وقد سجلا الدرجات التالية :

(أ) 30 رياضة ، 18 لغة انجليزية ، 32 معلومات عامة

(ب) 18 رياضة ، 30 لغة انجليزية ، 36 معلومات عامة . ماهى درجاتهم المتوقعة فى الإحصاء ؟

الحـــل :

(أ) بالتعويض $X_4 = 32$ ، $X_3 = 18$ ، $X_2 = 30$ فى المعادلة (٥) بالمسألة ١٥ – ١٩ ، فإن الدرجة المتوقعة فى الإحصاء هى $X_1 = 81$.

(ب) كما فى الجزء (أ) حيث $X_4 = 36$ ، $X_3 = 20$ ، $X_2 = 18$ ، نجد أن $X_1 = 37$.

١٥ – ٢٢ أوجد معاملات الارتباط الجزئية (أ) $r_{12\cdot34}$ (ب) $r_{13\cdot24}$ (جـ) $r_{14\cdot23}$. لبيانات المسألة ١٥–٢٠ .

الحـــل :

(أ) ، (ب)

$$r_{12.4} = \frac{r_{12} - r_{14}r_{24}}{\sqrt{(1 - r_{14}^2)(1 - r_{24}^2)}}, \quad r_{13.4} = \frac{r_{13} - r_{14}r_{34}}{\sqrt{(1 - r_{14}^2)(1 - r_{34}^2)}}, \quad r_{23.4} = \frac{r_{23} - r_{24}r_{34}}{\sqrt{(1 - r_{24}^2)(1 - r_{34}^2)}}$$

باستخدام القيم الموضحة بالمسألة ١٥ – ٢٠ ، نحصل على $r_{12.4} = 0{\cdot}7935,\ r_{13.4} = 0{\cdot}2215,\ r_{23.4} = 0{\cdot}2791.$ إذن

$$r_{12.34} = \frac{r_{12.4} - r_{13.4}r_{23.4}}{\sqrt{(1 - r_{13.4}^2)(1 - r_{23.4}^2)}} = 0{\cdot}7814 \quad \text{و} \quad r_{13.24} = \frac{r_{13.4} - r_{12.4}r_{23.4}}{\sqrt{(1 - r_{12.4}^2)(1 - r_{23.4}^2)}} = 0{\cdot}0000$$

(جـ)

$$r_{14.3} = \frac{r_{14} - r_{13}r_{34}}{\sqrt{(1 - r_{13}^2)(1 - r_{34}^2)}}, \quad r_{12.3} = \frac{r_{12} - r_{13}r_{23}}{\sqrt{(1 - r_{13}^2)(1 - r_{23}^2)}}, \quad r_{24.3} = \frac{r_{24} - r_{23}r_{34}}{\sqrt{(1 - r_{23}^2)(1 - r_{34}^2)}}$$

باستخدام القيم الموضحة بالمسألة ١٥ – ٢٠ ، نحصل على $r_{14.3} = 0{\cdot}4664,\ r_{12.3} = 0{\cdot}7939,\ r_{24.3} = 0{\cdot}2791$ إذن

$$r_{14.23} = \frac{r_{14.3} - r_{12.3}r_{24.3}}{\sqrt{(1 - r_{12.3}^2)(1 - r_{24.3}^2)}} = 0{\cdot}4193$$

١٥ - ٢٣ فسر معاملات الارتباط الجزئية (أ) $r_{12\cdot4}$ (ب) $r_{13\cdot4}$ (ت) $r_{12\cdot34}$ (ث) $r_{14\cdot3}$ (ج) $r_{14\cdot23}$ التى حصلت عليها فى المسألة ١٥ – ٢٢ .

الحــل :

(أ) $r_{12\cdot4} = 0.7935$. تمثل معامل الارتباط (الخطى) بين درجات الإحصاء وماسجله الطلبة فى الرياضيات وذلك لجميع الطلبة الذين لهم نفس درجات المعلومات العامة . والحصول على هذا المعامل ، فإن درجات اللغة الإنجليزية (وكذلك العوامل الأخرى التى لم تأخذ فى الحسبان) لم تأخذ فى الاعتبار ، وهذا واضح من حقيقة أن الدليل 3 قد حذف .

(ب) $r_{13\cdot4} = 0.2215$ تمثل معامل الارتباط بين درجات الإحصاء وماسجله الطلبة فى اللغة الإنجليزية وذلك للذين سجلوا نفس الدرجة فى المعلومات العامة . هنا درجة الطلبة فى الرياضيات لم تأخذ فى الإعتبار

(ج) $r_{12\cdot34} = 0.7814$ تمثل معامل الارتباط بين درجات الإحصاء وماسجله الطلبة فى الرياضيات وذلك للطلبة المتساوين فيما سجلوه فى اللغة الإنجليزية وما سجلوه فى المعلومات العامة .

(د) $r_{14\cdot23} = 0.4664$ تمثل معامل الارتباط بين درجات الإحصاء وماسجله الطلبة فى المعلومات العامة وذلك للطلبة المتساوين فيما سجلوه فى اللغة الإنجليزية .

(هـ) $r_{14\cdot23} = 0.4193$ تمثل معامل الارتباط بين درجات الإحصاء وماسجله الطلبة فى المعلومات العامة للطلبة المتساوين فيما سجلوه فى الرياضيات وماسجلوه ،فى اللغة الإنجليزية .

١٥ - ٢٤ (أ) لبيانات المسألة ١٥ – ٢٠ ، بين أن

$$\frac{r_{12.4} - r_{13.4}r_{23.4}}{\sqrt{(1-r^2_{13.4})(1-r^2_{23.4})}} = \frac{r_{12.3} - r_{14.3}r_{24.3}}{\sqrt{(1-r^2_{14.3})(1-r^2_{24.3})}} \qquad (١)$$

(ب) اشرح دلالة التساوى فى الجزء (أ)

الحــل :

(أ) الجانب الأيسر من (١) حسب فى المسألة ١٥ – ٢٢ (أ) ، ويعطى النتيجة 0.7814 . لحساب الجانب الأيمن من (١) ، نستخدم نتائج المسألة ١٥ – ٢٢ (ج) والتى تعطى 0.7814 . أى أن الجانبين متساويان فى هذه الحالة الخاصة .

بالعمليات الجبرية المباشرة من الممكن إثبات أن الطرفين متساويان بشكل عام .

(ب) الجانب الأيسر من (١) هو $r_{12\cdot34}$. الجانب الأيمن هو $r_{12\cdot43}$. بما أن $r_{12\cdot34}$ هو معامل الارتباط بين المتغيرات X_1 و X_2 مع الاحتفاظ بـ X_3 و X_4 كثوابت ، بينما $r_{12\cdot43}$ هو معامل الارتباط بين X_1 و X_2 مع الاحتفاظ بـ X_4 و X_3 كثوابت فإن ذلك يوضح السبب فى حدوث التساوى .

١٥ – ٢٥ أوجد (أ) معامل الارتباط المتعدد $R_{1.234}$

(ب) الخطأ المعيارى للتقدير $s_{1.234}$ وذلك لبيانات المسألة ١٥ – ٢٠ .

الحل :

(أ) $1 - R^2_{1.234} = (1 - r^2_{12})(1 - r^2_{13.2})(1 - r^2_{14.23})$ or $R_{1.234} = 0.9310$

وبما أن $r_{12} = 0.90$ من المسألة ١٥ – ٢٠ ، $r_{14.23} = 0.4193$ من المسألة ١٥ – ٢٢ (ت) ، و

$$r_{13.2} = \frac{r_{13} - r_{12}r_{23}}{\sqrt{(1 - r^2_{12})(1 - r^2_{23})}} = \frac{0.75 - (0.90)(0.70)}{\sqrt{[1 - (0.90)^2][1 - (0.70)^2]}} = 0.3855$$

طريقة اخرى :

بإبدال الأدلة 2 و 4 فى المعادلة الأولى نحصل على

$$1 - R^2_{1.234} = (1 - r^2_{14})(1 - r^2_{13.4})(1 - r^2_{12.34}) \quad \text{أو} \quad R_{1.234} = 0.9310$$

حيث استخدمت نتائج المسألة ١٥ – ٢٢ (أ) مباشرة

(ب) $R_{1.234} = \sqrt{1 - s^2_{1.234}/s^2_1}$ أو $s_{1.234} = s_1\sqrt{1 - R^2_{1.234}} = 10\sqrt{1 - (0.9310)^2} = 3.650$

قارن بالمعادلة (٨) ، صفحة ٤٣٣

مسائل اضافية

معادلات انحدار تتضمن ثلاث متغيرات :

١٥ – ٢٦ باستخدام رموز الدليل الملائمة ، اكتب معادلات الانحدار

(أ) X_3 على X_1 و X_2 . (ب) X_4 على X_1 و X_2 و X_3 و X_5

ج : (أ) $X_3 = b_{3.12} + b_{31.2}X_1 + b_{32.1}X_2$

(ب) $X_4 = b_{4.1235} + b_{41.235}X_1 + b_{42.135}X_2 + b_{43.125}X_3$

١٥ – ٢٧ اكتب المعادلات الاعتدالية المقابلة لمعادلات الانحدار

(أ) X_2 على X_1 و X_3 . (ب) X_5 على X_1 و X_2 و X_3 و X_4 .

١٥ - ٢٨ الجدول يوضح القيم المتقابلة لثلاث متغيرات X_1 و X_2 و X_3 . (أ) أوجد معادلة انحدار مربعات الصغرى لـ X_3 على X_1 و X_2 .

X_1	3	5	6	8	12	14
X_2	16	10	7	4	3	2
X_3	90	72	54	42	30	12

(ب) قدر x_3 عند $x_1 = 10$ و $x_2 = 6$.

ج : (أ) $X_3 = 61{\cdot}40 - 3{\cdot}65X_1 + 2{\cdot}54X_2$

(ب) 40

١٥ - ٢٩ محاضر في الرياضيات يريد تحديد العلاقة بين درجات الامتحان النهائي ودرجات امتحانين مفاجئين خلال الفصل الدراسي. اعتبر أن X_1 هو درجات الطالب في الامتحان المفاجىء الأول و X_2 درجاته في الامتحان المفاجىء الثاني و X_3 هي درجته في الامتحان النهائي ، وقد أعطى الحسابات التالية لمجموع 120 طالباً .

$$\bar{X}_1 = 6{\cdot}8 \quad \bar{X}_2 = 7{\cdot}0 \quad \bar{X}_3 = 74$$
$$s_1 = 1{\cdot}0 \quad s_2 = 0{\cdot}80 \quad s_3 = 9{\cdot}0$$
$$r_{12} = 0{\cdot}60 \quad r_{13} = 0{\cdot}70 \quad r_{23} = 0{\cdot}65$$

(أ) أوجد معادلة انحدار المربعات الصغرى لـ X_3 على X_1 و X_2 .

(ب) قدر درجات الامتحان النهائي لطالبين سجلا 8 و 4 ، 7 و 9 على الترتيب في الامتحانين المفاجئين

ج : (أ) $X_3 - 74 = 4{\cdot}36(X_1 - 6{\cdot}8) - 4{\cdot}04(X_2 - 7{\cdot}0)$ or $X_3 = 16{\cdot}07 + 4{\cdot}36X_1 + 4{\cdot}04X_2$

(ب) 66 و 84

١٥ - ٣٠ حل المسألة ١٥ - ٨ باختيار المتغيرات X_2 و X_3 بحيث تكون $\Sigma X_2 = \Sigma X_3 = 0$

الخطأ المعياري للتقـــدير :

١٥ - ٣١ أوجد الخطأ المعياري لتقدير X_3 على X_1 و X_2 للبيانات بالمسألة ١٥ - ٢٨ .

ج : 3.12

١٥ - ٣٢ أوجد الخطأ المعياري لتقدير (أ) X_3 على X_1 و X_2

(ب) X_1 على X_2 و X_3 . لبيانات المسألة ١٥ - ٢٩

ج : (أ) 5.883 (ب) 0.6882

معامل الارتباط المتعدد

١٥ - ٣٣ احسب معامل الارتباط المتعدد الخطي لـ X_3 على X_1 و X_2 لبيانات المسألة ١٥ - ٢٨ .

١٥ – ٣٤ احسب (أ) $R_{3\cdot12}$ (ب) $R_{1\cdot23}$ (جـ) $R_{2\cdot13}$ لبيانات المسألة ١٥ – ٢٩ .

ج : (أ) 0.7567 (ب) 0.7255 (جـ) 0.6810

١٥ – ٣٥ إذا كانت $r_{12} = r_{13} = r_{23} = r \neq 1$ ، بين أن $R_{1.23} = R_{2.31} = R_{3.12} = \frac{r\sqrt{2}}{\sqrt{1+r}}$. ناقش الحالة $r = 1$.

١٥ – ٣٦ إذا كانت $R_{1\cdot23} = 0$ ، أثبت أن $|r_{12}| \geqq |r_{23}|$ و $|r_{13}| \geqq |r_{23}|$ وفسر ذلك .

الارتباط الجزئى :

١٥ – ٣٧ احسب معامل الارتباط الجزئى الخطى (أ) $r_{12\cdot3}$ (ب) $r_{13\cdot2}$ (جـ) $r_{23\cdot1}$ لبيانات المسألة ١٥ – ٢٨ وفسر إجابتك

ج : (أ) 0.5950 (ب) 0.8995 — (جـ) 0.8727

١٥ – ٣٨ حل المسألة ١٥ – ٣٧ باستخدام بيانات المسألة ١٥ – ٢٩

ج : (أ) 0.2672 (ب) 0.5099 (جـ) 0.4026 .

١٥ – ٣٩ إذا كانت $r_{12} = r_{13} = r_{23} = r \neq 1$ ، بين أن $r_{12.3} = r_{13.2} = r_{23.1} = r/(1+r)$. ناقش الحالة $r = 1$

١٥ – ٤٠ إذا كانت $r_{12\cdot3} = 1$ ، بين أن (أ) $|r_{13\cdot2}| = 1$ ، (ب) $|r_{23\cdot1}| = 1$ ، (جـ) $R_{1\cdot23} = 1$ ، (د) $s_{1\cdot23} = 0$

الانحراف المتعدد والجزئى فى حالة وجود اربع متغيرات او اكثر :

١٥ – ٤١ وضح أن معادلة انحدار X_4 على X_1 و X_2 و X_3 . يمكن كتابتها

$$\frac{x_4}{s_4} = a_1\left(\frac{x_1}{s_1}\right) + a_2\left(\frac{x_2}{s_2}\right) + a_3\left(\frac{x_3}{s_3}\right)$$

حيث a_3 و a_2 و a_1 تحدد بحل المعادلات الآتية آنياً

$$\left.\begin{aligned} a_1 r_{11} + a_2 r_{12} + a_3 r_{13} &= r_{14} \\ a_1 r_{21} - a_2 r_{22} + a_3 r_{23} &= r_{24} \\ a_1 r_{31} + a_2 r_{32} + a_3 r_{33} &= r_{34} \end{aligned}\right\}$$

وحيث $x_j = X_j - \bar{X}_j, r_{jj} = 1, j = 1, 2, 3, 4$ عمم النتيجة فى حالة وجود أكثر من أربع متغيرات .

١٥ – ٤٢ إذا كانت

$$\bar{X}_1 = 20,\ \bar{X}_2 = 36,\ \bar{X}_3 = 12,\ \bar{X}_4 = 80,\ s_1 = 1{\cdot}0,\ s_2 = 2{\cdot}0,\ s_3 = 1{\cdot}5,\ s_4 = 6{\cdot}0,\ r_{12} = -0{\cdot}20,\ r_{13} = 0{\cdot}40$$

$$r_{23} = 0{\cdot}50 \text{ و } r_{14} = 0{\cdot}40,\ r_{24} = 0{\cdot}30,\ r_{34} = -0{\cdot}10.$$

(أ) أوجد معادلة انحدار X_4 على X_1 و X_2 و X_3 .

(ب) قدر X_4 عند $X_1 = 15$ و $X_2 = 40$ و $X_3 = 14$.

ج : (أ) $X_4 = 6X_1 + 3X_2 - 4X_3 - 100$ (ب) 54

١٥ – ٤٣ أوجد (أ) $r_{41\cdot23}$ (ب) $r_{42\cdot13}$ (ج) $r_{43\cdot12}$. لبيانات المسألة ١٥ – ٤٢ وفسر نتائجك .

ج : (أ) 0.8710 (ب) 0.8587 (د) 0.8426 —

١٥ – ٤٤ (أ) $R_{4\cdot123}$ (ب) $s_{4\cdot123}$ لبيانات المسألة ١٥ – ٤٢ .

ج : (أ) 0.8947 (ب) 2.680

١٥ – ٤٥ جمع عالم بيانات خاصة بأربع متغيرات W و V و U و T . ويعتقد أن معادلة على الصورة $W = aT^bU^cV^d$ حيث a, b, c, d ثوابت غير معروفة ، يمكن الحصول عليها ومنها يمكن تحديد قيمة W بمعرفة T, U, V . حدد بصورة واضحة أسلوباً يمكن به تحقيق هذا الهدف .

(إرشاد : احصل على لوغاريتم طرفى المعادلة) .

الفصل السادس عشر

تحليل السلاسل الزمنية

السلاسل الزمنية :

السلسلة الزمنية هى مجموعة من المشاهدات أخذت فى فترات زمنية محددة ، عادة على فترات متساوية .

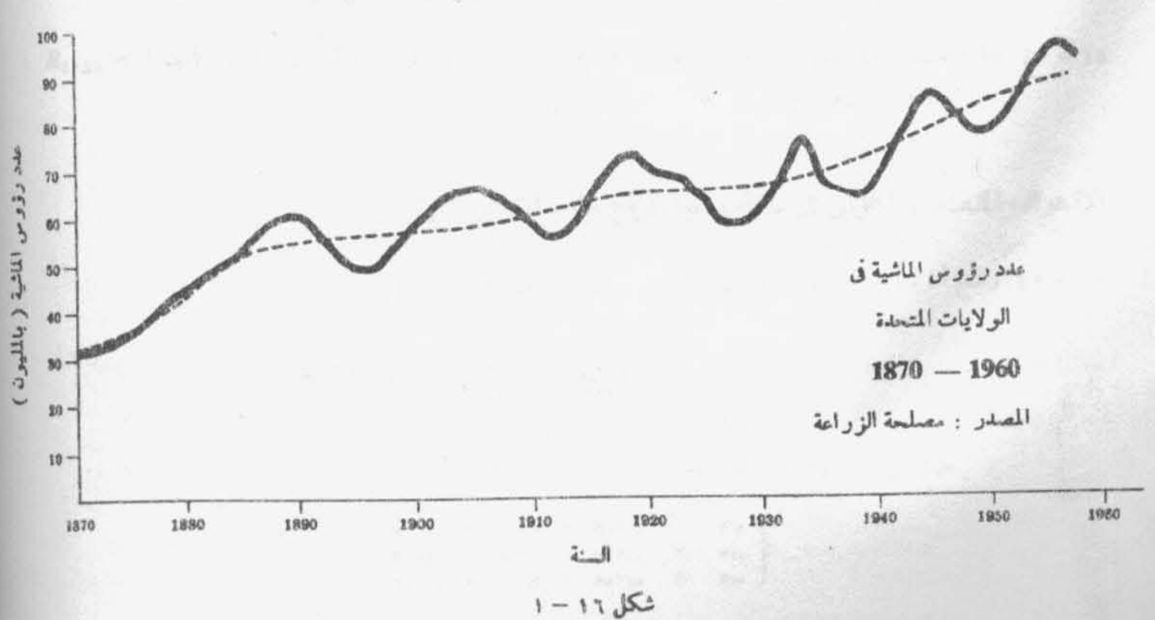
من أمثلة السلاسل الزمنية الانتاج الكلى فى السنة من الصلب فى الولايات المتحدة على مدار عدد من السنوات ، سعر الأقفال اليومى للأسهم فى سوق الأوراق المالية ، درجات الحرارة كل ساعة والمعلن عنها بواسطة مكتب التنبؤات الجوية فى مدينة ، المجموع الشهرى لإيصالات المبيعات فى أحد المتاجر .

وتعرف السلسلة الزمنية رياضياً بالقيم $Y_1 , Y_2, \ldots$ والتى يأخذها المتغير Y (درجات الحرارة ، سعر الاقفال للأسهم ، وغيرها) عند الزمن $t_1 , t_2, \ldots$ أى أن Y دالة فى t ، ونرمز لذلك بالرمز $Y = F(t)$.

الرسم البيانى للسلاسل الزمنية :

تمثل السلسلة الزمنية المتضمنة المتغير Y تصويرياً بتكوين الشكل البيانى Y مقابل t ، كما فعلنا ذلك عديداً من المرات ، فى فصول سابقة .

الشكل ١٦ — ١ يوضح الرسم البيانى لسلسلة زمنية توضح عدد رؤوس الماشية فى الولايات المتحدة خلال السنوات 1870–1960.



شكل ١٦ — ١

التحركات المميزة فى السلاسل الزمنية :

من المفيد التفكير فى الرسم البيانى للسلسلة الزمنية ، كما هو موضح بالشكل ١٦ - ١ ، كنقطة تتحرك مع مرور الزمن . وذلك فيما يشبه التحرك المادى للذرة تحت تأثير قوى مادية . وعلى أية حال ، فبدلا من القوى المادية فإن الحركة قد تكون ناتجة عن قوى اقتصادية ، اجتماعية ، نفسية أو قوى أخرى .

ملاحظة كثير من السلاسل الزمنية تكشف عن وجود تحركات مميزة أو اختلافات مميزة .

بعضها أو كلها توجد بدرجات مختلفة . وتحليل مثل هذ التحركات له أهمية كبرى فى كثير من الاستخدامات ، منها مشكلة التنبؤ بالتحركات المستقبلة . وهذا يوضح بصورة لاتدع مجالا للدهشة الأسباب التى تجعل كثيراً من الصناعات والوكالات الحكومية تهتم بصورة حيوية بهذا الموضوع الهام .

تصنيف التحركات فى السلاسل الزمنية :

يمكن تصنيف التحركات فى السلاسل الزمنية إلى أربعة أنماط ، تسمى غالباً مكونات السلسلة الزمنية .

١ - **التحركات طويلة المدى (الاتجاه العام)** وتشير إلى الاتجاه العام الذى يظهر به الشكل البيانى للسلسلة الزمنية على مدى فترة طويلة من الزمن. فى الشكل أعلا هذه الحركة العامة أو الاتجاه العام يرمز لها بمنحنى الاتجاه العام والمعبر عنه بخطوط متقطعة . لبعض السلاسل الزمنية قد يكون خط الاتجاه العام أكثر ملاءمة . وقد سبق دراسة تحديد مثل هذه الخطوط والمنحنيات بطريقة المربعات الصغرى فى الفصل الثالث عشر . وسوف نناقش طرق أخرى فيما بعد .

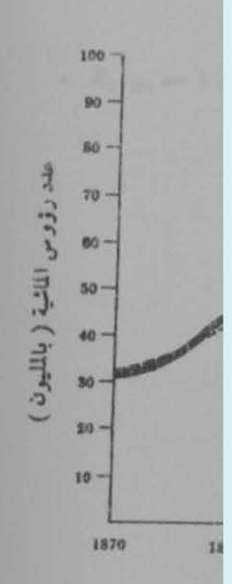
٢ - **تحركات دورية أو تغيرات دورية** وهى تشير إلى الذبذبات طويلة المدى حول خط الاتجاه العام أو منحنى الاتجاه العام . هذه الدورات، كما تسمى أحياناً ، قد تكون أو قد لاتكون على فترات ، بمعنى أنها قد تتبع وقد لاتتبع نفس النمط بعد كل فترة زمنية متساوية . فى مجال الأعمال والنشاط الاقتصادى ، تعد التحركات دورية إذا تكررت بعد فترات زمنية تزيد عن السنة .

من الأمثلة الهامة للتحركات الدورية مايسمى بدورات الأعمال والتى تمثل فترات ، الرخاء ، الركود ، الكساد ثم الإنتهاء من الأزمة .

٣ - **التحركات الموسمية أو التغيرات الموسمية** وهى تشير إلى النمط المماثل لحركة السلسلة الزمنية فى الأشهر المتقابلة خلال السنوات المتتالية . مثل هذه التحركات ترجع إلى أحداث تقع سنوياً ، مثل الزيادة المفاجئة فى مبيعات المحلات فى الفترة السابقة لأعياد الميلاد .

فى الشكل ١٦ - ١ لاتظهر أى تغيرات موسمية ، نظراً لأن الشكل يوضح الأرقام السنوية فقط .

وعلى الرغم من أن التحركات الموسمية بشكل عام تشير إلى الدورية السنوية فى الأعمال والاقتصاد ، فإن الفكرة يمكن أن تمتد لتشمل الدورية لأية فترة من الزمن مثل اليوم ، الساعة ، الأسبوع ، ... وهكذا بالاعتماد على نوع البيانات المتاحة .



التحركات المميزة فى السلاسل الزمنية :

من المفيد التفكير فى الرسم البيانى للسلسلة الزمنية ، كما هو موضح بالشكل ١٦ – ١ ، كنقطة تتحرك مع مرور الزمن . وذلك فيما يشبه التحرك المادى للذرة تحت تأثير قوى مادية . وعلى أية حال ، فبدلا من القوى المادية فإن الحركة قد تكون ناتجة عن قوى اقتصادية ، اجتماعية ، نفسية أو قوى أخرى .

ملاحظة كثير من السلاسل الزمنية تكشف عن وجود تحركات مميزة أو اختلافات مميزة .

بعضها أو كلها توجد بدرجات مختلفة . وتحليل مثل هذ التحركات له أهمية كبرى فى كثير من الاستخدامات ، منها مشكلة التنبؤ بالتحركات المستقبلة . وهذا يوضح بصورة لاتدع مجالا للدهشة الأسباب التى تجعل كثيراً من الصناعات والوكالات الحكومية تهتم بصورة حيوية بهذا الموضوع الهام .

تصنيف التحركات فى السلاسل الزمنية :

يمكن تصنيف التحركات فى السلاسل الزمنية إلى أربعة أنماط ، تسمى غالباً مكونات السلسلة الزمنية .

١ ــ **التحركات طويلة المدى (الاتجاه العام)** وتشير إلى الاتجاه العام الذى يظهر به الشكل البيانى للسلسلة الزمنية على مدى فترة طويلة من الزمن. فى الشكل أعلاه هذه الحركة العامة أو الاتجاه العام يرمز لها بمنحنى الاتجاه العام والمعبر عنه بخطوط متقطعة . لبعض السلاسل الزمنية قد يكون خط الاتجاه العام أكثر ملاءمة . وقد سبق دراسة تحديد مثل هذه الخطوط والمنحنيات بطريقة المربعات الصغرى فى الفصل الثالث عشر . وسوف تناقش طرق أخرى فيما بعد .

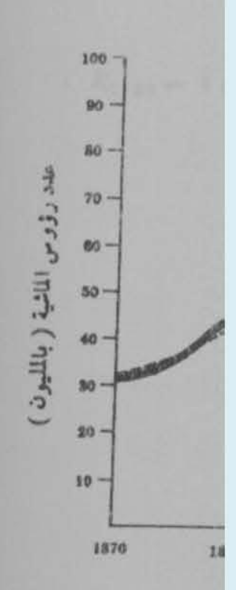
٢ ــ **تحركات دورية أو تغيرات دورية** وهى تشير إلى الذبذبات طويلة المدى حول خط الاتجاه العام أو منحنى الاتجاه العام . هذه الدورات، كما تسمى أحياناً ، قد تكون أو قد لاتكون على فترات ، بمعنى أنها قد تتبع وقد لاتتبع نفس النمط بعد كل فترة زمنية متساوية . فى مجال الأعمال والنشاط الاقتصادى ، تعد التحركات دورية إذا تكررت بعد فترات زمنية تزيد عن السنة .

من الأمثلة الهامة للتحركات الدورية مايسمى بدورات الأعمال والتى تمثل فترات ، الرخاء ، الركود ، الكساد ثم الإنتهاء من الأزمة .

٣ ــ **التحركات الموسمية أو التغيرات الموسمية** وهى تشير إلى النمط المتماثل لحركة السلسلة الزمنية فى الأشهر المتقابلة خلال السنوات المتتالية . مثل هذه التحركات ترجع إلى أحداث تقع سنوياً ، مثل الزيادة المفاجئة فى مبيعات المحلات فى الفترة السابقة لأعياد الميلاد .

فى الشكل ١٦ – ١ لاتظهر أى تغيرات موسمية ، نظراً لأن الشكل يوضح الأرقام السنوية فقط .

وعلى الرغم من أن التحركات الموسمية بشكل عام تشير إلى الدورية السنوية فى الأعمال والاقتصاد ، فإن الفكرة يمكن أن تمتد لتشمل الدورية لأية فترة من الزمن مثل اليوم ، الساعة ، الأسبوع ، ... وهكذا بالاعتماد على نوع البيانات المتاحة .

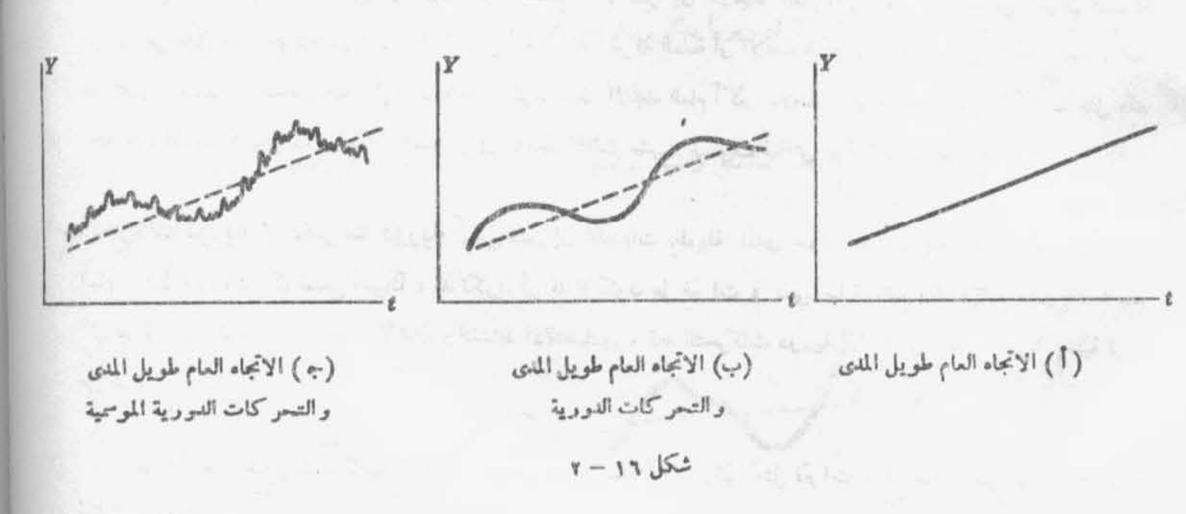


٤ ــ تحركات منتظمة أو عشوائية : وتشير إلى الحركة المنتظمة فى السلسلة الزمنية مثل الفيضانات ، الإضرابات ، الانتخابات ، وغيرها . على الرغم أنه من المعتاد افتراض أن مثل هذه الأحداث تنتج تغيرات تستمر لفترة قصيرة من الزمن ، فمن المعقول أن تكون على درجة من الكثافة نتيجة لوجود دورات جديدة أو غيرها من التحركات .

تحليل السلاسل الزمنية :

تحليل السلاسل الزمنية تتكون من وصف (بصورة عامة رياضية) مكونات التحركات الموجودة . لتوضيح الطرق التى تستخدم فى هذا الوصف ، اعتبر الشكل ١٦ – ٢ والتى يشار إليها بالسلسلة الزمنية المثالية .

الشكل (أ) يوضح شكل خط الاتجاه العام طويل المدى (من الممكن أن نستخدم كذلك منحنى الاتجاه العام . الشكل (ب) يوضح خط الاتجاه العام طويل المدى موضحاً فوقه تحركات دورية (نفترض أنها على فترات متساوية) . اذا أردنا أن نوضح على الشكل (جـ) بعض التحركات غير المنتظمة أو العشوائية ، وتظهر النتيجة أكثر شبها بالسلاسل الزمنية التى تحدث فى النواحى العملية



(أ) الاتجاه العام طويل المدى

(ب) الاتجاه العام طويل المدى والتحركات الدورية

(جـ) الاتجاه العام طويل المدى والتحركات الدورية الموسمية

شكل ١٦ – ٢

المناقشة السابقة تعطينا أسلوباً ممكناً لتحليل السلاسل الزمنية . نفترض أن المتغير Y الذى يعبر عن السلسلة الزمنية هو حاصل ضرب المتغيرات T, C, S, I والتى تنتج الاتجاه العام (T) والتحركات الدورية (C) والتحركات الموسمية (S) والتحركات غير المنتظمة (I) . باستخدام الرموز

$$Y = T \times C \times S \times I = TCSI \qquad (1)$$

تحليل السلاسل الزمنية يتضمن فحص العوامل T, C, S, I والتى يشار إليها بتفكيك السلسلة الزمنية إلى المكونات الأساسية لتحركاتها .

ويجب أن نشير إلى أن بعض الاحصائيين يفضلون اعتبار Y كمجموع $T+C+S+I$ للمتغيرات الأساسية المعتبرة في السلسلة. وعلى الرغم من أننا سنفترض التفكيك (١) في طرق هذا الفصل ، فإن هناك طرق مشابهة في حالة افتراض صيغة الجمع . ومن الناحية العملية ، فإن قرار اتخاذ أي من طرق التفكيك التي يجب افتراضها تعتمد على درجة النجاح المتحقق في تطبيق هذا الفرض .

المتوسطات المتحركة . تمهيد السلاسل الزمنية :

إذا كان لدينا مجموعة من الأرقام

$$Y_1, Y_2, Y_3, \ldots \qquad (٢)$$

فإننا نعرف الوسط المتحرك من الدرجة N بأنه يعطى بمتتابعة من الأوساط الحسابية

$$\frac{Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_N}{N}, \quad \frac{Y_2 + Y_3 + \ldots + Y_{N+1}}{N}, \quad \frac{Y_3 + Y_4 + \ldots + Y_{N+2}}{N}, \ldots \qquad (٣)$$

المجاميع في البسط بالمعادلة (٣) تسمى المجاميع المتحركة من الدرجة N .

مثـال ١ : إذا كان لدينا الأرقام 2, 6, 1, 5, 3, 7, 2 فإن الوسط المتحرك من الدرجة 3 ، يعطى بالمتتابعة

$$\frac{2+6+1}{3}, \frac{6+1+5}{3}, \frac{1+5+3}{3}, \frac{5+3+7}{3}, \frac{3+7+2}{3} \text{ i.e. } 3, 4, 3, 5, 4$$

ومن المعتاد أن نضع كل رقم في الوسط المتحرك في مكانه الملائم بالنسبة للبيانات الأصلية . في هذا المثال يجب أن نكتب

البيانات الأصليـــة 2, 6, 1, 5, 3, 7, 2

الوسط المتحرك من الدرجة 3 3, 4, 3, 5, 4

كل رقم في الوسط المتحرك عبارة عن متوسط الأرقام الثلاثة الواقعة فوقه .

إذا كانت البيانات معطاة سنوياً أو شهرياً ، فإن المتوسط المتحرك من الدرجة N يسمى على الترتيب N سنة متوسط متحرك أو N شهر متوسط متحرك . بهذا نتحدث عن 5 سنوات متوسطات متحركة ، 12 شهرا متوسطات متحركة ، .. وغيرها ومن الواضح أنه يمكن استخدام وحدات أخرى للزمن .

المتوسطات المتحركة لها خاصية أنها تتجه إلى التقليل من كية الاختلاف الموجودة في مجموعة من البيانات . في حالة السلاسل الزمنية تستخدم هذه الخاصية لاستبعاد التقلبات غير المرغوب فيها وتسمى العملية بتمهيد السلاسل الزمنية .

إذا استخدمنا فى (٣) ، الوسط الحسابى المرجح ، وكانت الترجيحات محددة مقدماً ، فإن المتتابعة الناتجة تسمى الأوساط المتحركة المرجحة من الدرجة N .

مثـال ٢ : إذا استخدمت الأوزان 1 ,4 ,1 فى المثال 1 ، فإن المتوسط المتحرك المرجح من الدرجة 3 يعطى بالمتتالية :

$$\frac{1(2)+4(6)+1(1)}{1+4+1},\ \frac{1(6)+4(1)+1(5)}{1+4+1},\ \frac{1(1)+4(5)+1(3)}{1+4+1},$$
$$\frac{1(5)+4(3)+1(7)}{1+4+1},\ \frac{1(3)+4(7)+1(2)}{1+4+1}$$

أو $4{\cdot}5,\ 2{\cdot}5,\ 4{\cdot}0,\ 4{\cdot}0,\ 5{\cdot}5$

تقدير الاتجـاه العـام :

يمكن تقدير الاتجاه العام بعدة طرق :

١ ــ **طريقة المربعات الصغرى** المعطاة بالفصل الثالث عشر يمكن استخدامها للحصول على معادلة خط الاتجاه العام الملائم أو لمنحنى الاتجاه العام . من هذه المعادلة يمكن أن نحسب القيمة الاتجاهية T .

٢ ــ **طريقة التمهيد باليد** والتى تتكون من توفيق خط الاتجاه العام أو منحنى الاتجاه العام الذى يمكن استخدامه لتقدير T بالنظر إلى الشكل البيانى . وعلى أية حال ، فهذه لها مضار حيث أنها تعتمد كثيراً على التقدير الشخصى .

٣ ــ **طريقة المتوسط المتحرك** باستخدام المتوسطات المتحركة من درجات ملائمة ، فإن الأنماط الدائرية ، الموسمية وغير المنتظمة يمكن حذفها ، تاركة فقط حركة الاتجاه العام .

أحد مساوىء هذه الطريقة هو أن البيانات فى بداية ونهاية السلسلة تفقد . فى المثال 1 أعلاه نبدأ بسبعة أرقام وباستخدام متوسط متحرك من الدرجة 3 فننتهى بخمسة أرقام . أحد المساوىء الأخرى هو أن المتوسطات المتحركة قد تولد تحركات دائرية أوغيرها ليست موجودة فى البيانات الأصلية . صعوبة ثالثة هو أن المتوسطات المتحركة تتأثر بشدة بالقيم المتطرفة وللتغلب على هذه الصعوبة ، فإننا نستخدم أحياناً متوسطاً متحركاً مرجحاً بأوزان ملائمة . فى هذه الحالة فإن القيمة المركزية (أو القيم) تعطى الوزن الأكبر وتعطى القيم المتطرفة أوزاناً أقل .

٤ ــ **طريقة أشباه المتوسطات** تتكون من تقسيم البيانات إلى مجموعتين (يفضل أن يكون متساويين) ثم نحصل على متوسط كل جزء ، وهذا يعطينا نقطتين على خط السلسلة الزمنية . ويرسم خط الاتجاه العام بين هذين النقطتين ويمكن بذلك تحديد القيم الاتجاهية . ويمكن كذلك تحديد القيم الاتجاهية بدون الرسم البيانى (المسألة ١٦ – ٥) .

وعلى الرغم من أن هذه الطريقة بسيطة فى تطبيقها ، إلا أنها قد تؤدى إلى نتائج غير جيدة إذا استخدمت بدون تمييز . كذلك فإنها قابلة للتطبيق فقط فى حالة ما إذا كان الاتجاه العام خطاً أو يقرب إلى خطين ، على الرغم من أنه يمكن مد صلاحيتها فى الحالات التى يمكن تجزئة البيانات فيها إلى عدد من الأجزاء فى كل جزء يكون الاتجاه العام فيه خطياً .

تقدير التغيرات الموسمية ، الدليل الموسمى :

لتحديد المعامل الموسمى S فى المعادلة (١) ، فيجب أن نقدر كيف تتغير البيانات فى السلاسل الزمنية من شهر إلى شهر خلال سنة نموذجية . مجموعة الأرقام التى توضح القيم النسبية لمتغير خلال أشهر السنة تسمى الدليل الموسمى للمتغير . فإذا كنا نعلم على سبيل المثال أن أرقام المبيعات خلال يناير ، فبراير ، مارس ، . . . . هى 50 ، 120 ، 90 ، . . . فى المائة من متوسط المبيعات الشهرية خلال العام كله ، فإن الأرقام 50 ، 120 ، 90 ، . . . . تعطى الدليل الموسمى ويشار إليها أحياناً بالأرقام القياسية الموسمية . وسط (المتوسط) الدليل الموسمى للسنة كلها يجب أن يكون 100% ، أى أن مجموع الأرقام القياسية يجب أن يكون 1200% .

وهناك عدة طرق متاحة لحساب الدليل الموسمى :

١ ـ طريقة متوسط النسب المئوية : فى هذه الطريقة يعبر عن بيانات كل شهر كنسبة مئوية من المتوسط فى السنة . ثم نحصل على وسط النسبة المئوية للأشهر المتقابلة فى مختلف السنوات وذلك أما باستخدام الوسط الحسابى أو الوسيط . فإذا استخدمنا الوسط الحسابى فمن الأفضل تجنب القيم المتطرفة والتى يمكن أن تحدث . والـ 12 نسبة مئوية الناتجة تعطى الدليل الموسمى . فإذا كان متوسطها ليس 100% (أى إذا كان المجموع لايساوى 1200%) فيجب تعديله بالضرب فى معامل ملائم .

٢ ـ طريقة النسبة المئوية للاتجاه العام او النسبة للاتجاه العام : فى هذه الطريقة فإن بيانات كل شهر يعبر عنها كنسبة مئوية من القيم الاتجاهية فى الشهر . وباستخدام وسط ملائم لهذه النسب للأشهر المتقابلة نحصل على الدليل المطلوب . وكما فى الطريقة الأولى نعدل هذه القيم إذا لم يكن متوسطها 100% .

لاحظ أن قسمة كل من القيم الشهرية Y على القيمة الاتجاهية T ينتج $Y/T = CSI$ من المعادلة (١) . وينتج عن عمليات الحصول على متوسط Y/T الأدلة الموسمية والتى قد تحتوى على التغيرات الدورية وغير المنتظمة وعلى وجه الخصوص إذا كانت كبيرة . وهذه قد تكون من المساوىء المهمة لهذه الطريقة .

٣ ـ طريقة النسبة المئوية للمتوسط المتحرك او النسبة للمتوسط المتحرك :

فى هذه الطريقة نحسب 12 شهراً متوسطاً متحركاً . وبما أن النتائج التى حصلنا عليها تقع بين الأشهر المتتالية بدلا من وقوعها فى منتصف الشهر كما هى الحال فى البيانات الأصلية ، فإننا نحسب 2 شهر متوسط متحرك لهذا الـ 12 شهرياً متوسطاً متحركاً . وتسمى النتيجة 12 شهراً متوسطاً متحركاً مركزياً . بعد ذلك ، نعبر ، عن البيانات الأصلية لكل شهر كنسبة مئوية من الـ 12 شهراً متوسطاً متحركاً مركزياً المقابل له . ويحسب الدليل المطلوب بأخذ متوسط النسب للأشهر المتقابلة . وكما سبق ، فإننا نعدل هذه النسب إذا لم يكن متوسطها 100% .

لاحظ أن السبب المنطقي وراء استخدام هذه الطريقة يجيء من المعادلة (١) . الـ12 شهراً متوسطاً متحركاً مركزياً لـY يعمل على استبعاد التحركات الموسمية وغير المنتظمة I و S ، وهذا مكافىء للقيم المعطاة بـTC . بهذا فإن قسمة البيانات الأصلية على TC تنتج SI . والعملية التالية فى الحصول على أوساط الأشهر المتقابلة تعمل على حذف المتغيرات العرضية I وهذاينتج دليلا ملائماً S .

٤ ـــ **طريقة الوصلات النسبية :** فى هذه الطريقة يعبر عن بيانات كل شهر كنسبة مئوية من بيانات الشهر السابق ، وتسمى هذه النسب بالنسب الموصولة ، حيث أنها تربط كل شهر بالشهر السابق عليه . ثم نحصل على متوسط ملائم للنسب الموصولة للأشهر المتقابلة .

ومن هذه الإثنى عشر متوسط النسب الموصولة يمكن أن نحصل على النسبة المئوية لكل شهر بالنسبة لشهر يناير والذى يعتبر مثل 100% . وبعد أن نفعل ذلك فإنه من المعتاد أن نجد أن شهر يناير التالى تقابله نسبة مئوية قد تكون أما على أو أقل من 100% وهذا يعتمد على ما إذا كان الاتجاه العام فى زيادة أو فى نقصان . باستخدام ذلك ، نقوم بتعديل النسب المئوية المختلفة التى حصلنا عليها بالأخذ فى الاعتبار هذا الاتجاه العام . وهذه النسب المئوية النهائية ، والمعدلة بحيث يكون متوسطها 100% ، تعطى الدليل الموسمى المطلوب .

تحليل البيانات عن اثر الموسمية :

إذا قسمنا البيانات الشهرية الأصلية على الأرقام القياسية الموسمية المقابلة ، فإن البيانات التى نحصل عليها تسمى ببيانات لا موسمية أو بيانات معدلة لاستبعاد التغيرات الموسمية . مثل هذه البيانات تتضمن الاتجاه العام ، التغيرات الدورية والتغيرات غير المنتظمة .

تقدير التغيرات الدورية :

بعد تخليص البيانات من أثر الموسم ، فإنه يمكن تعديلها أيضاً للتخلص من أثر الاتجاه العام وذلك بقسمة البيانات ببساطة على القيم الاتجاهية المقابلة . وطبقاً للمعادلة (١) فإن عملية التعديل للتخلص من التغيرات الموسمية والقيم الاتجاهية تقابل قسمة Y على ST ، بحيث ينتج CI ، أى التغيرات الدورية وغير المنتظمة . وباستخدام متوسط متحرك لعدد بسيط من الأشهر (3 ، 5 أو 7 أشهر على سبيل المثال ، بحيث لانحتاج إلى الحصول على قيم مركزية بعد ذلك) نستطيع استبعاد المتغيرات غير المنتظمة I حيث يبقى فقط التغيرات الدورية . وطالما أمكن عزل هذه التغيرات فإنه يمكن دراستها بالتفصيل . فإذا كانت الدورات متكررة فإنه يمكن تكوين دليل الدورية بطريقة مشابهة لتكوين الدليل الموسمى .

تقدير التغيرات العشوائية او غير المنتظمة :

يمكن تقدير التغيرات العشوائية أو غير المنتظمة وذلك باستبعاد أثر الاتجاه العام والتغيرات الموسمية والتغيرات الدورية . ويمكن تحقيق ذلك بقسمة البيانات الأصلية Y على T, S, C ، وينتج عن ذلك I من المعادلة (١) . ومن الناحية العملية وجد أن التحركات غير المنتظمة تتجه إلى أن تكون ذات حجم صغير وأنها غالباً تتجه إلى أن تتبع نمط التوزيع الطبيعى ، أى انحرافات صغيرة تحدث بتكرارات كبيرة أما الانحرافات الكبيرة فتحدث بتكرارات صغيرة .

قابلية البيانات للمقارنة :

يجب إلتزام الحذر عند مقارنة البيانات حيث يجب أن تكون مثل هذ المقارنة ممكنة . على سبيل المثال ، فعند مقارنة بيانات عن شهر فبراير ، يجب أن نلاحظ أن شهر مارس 31 يوماً بينما شهر فبراير قد يكون أما 28 أو 29 يوماً . كذلك ، عند مقارنة أشهر فبراير لسنوات مختلفة يجب أن نتذكر أنه خلال السنوات الكبيسة يكون شهر فبراير 29 وليس 28 . كذلك فإن عدد أيام العمل خلال الأشهر المختلفة لنفس السنة أو لسنوات مختلفة قد تختلف نتيجة لأيام الأجازات ، الإضرابات أو الأعطال ، وغيرها .

ومن الناحية العملية ، لاتوجد قاعدة محددة لإجراء التعديلات اللازمة لهذ التغيرات . ويترك تقدير الحاجة لهذ التعديلات لتوجيهات الباحث .

التنبــوء :

الدراسة السابقة يمكن استخدامها فى المشكلة الهامة الخاصة بالتنبؤ بالسلاسل الزمنية . وعلى أية حالة ، فيجب أن نتأكد من أن المعالجة الرياضية للبيانات لاتحل فى حد ذاتها المشكلة . ولكن بالجمع بين الإحساس العام ، والخبرة والقدرة على الحكم السليم للباحث وبين التحليل الرياضى يمكن أن يكون له قيمة فى كل من التنبؤ طويل المدى والتنبؤ قصير المدى .

تلخيص الخطوات اساسية فى تحليل السلاسل الزمنية :

١ - اجمع البيانات الخاصة بالسلسلة الزمنية ، وأبذل كل مجهود للتأكد من أن البيانات يمكن الاعتماد عليها . فى جمع البيانات يجب أن نضع نصب أعيننا الهدف من تحليل السلسلة الزمنية . على سبيل المثال ، فإذا أراد شخص التنبؤ بسلسلة زمنية معينة ، قد يساعد على ذلك الحصول على سلسلة زمنية على علاقة بها وكذلك معلومات أخرى . وقد يكون من الضرورى تعديل البيانات لجعلها قابلة للمقارنة مثل التعديل للسنوات الكبيسة ، وغيرها .

٢ - ارسم السلسلة الزمنية ، لاحظ من الناحية الوصفية وجود الاتجاه العام طويل المدى ، التغيرات الدورية والتغيرات الموسمية .

٣ - أوجد منحنى الاتجاه العام أو خط الاتجاه العام واحصل على القيم الاتجاهية باستخدام أما طريقة المربعات الصغرى ، طريقة التمهيد باليد ، طريقة المتوسطات المتحركة أو طريقة شبه المتوسطات .

٤ - إذا كانت هناك تغيرات موسمية ، احصل على الدليل الموسمى ثم عدل البيانات وذلك للتخلص من أثر الموسم أى ، جعل البيانات لاموسمية .

٥ - خلص البيانات اللاموسمية من أثر الاتجاه العام . بهذا تحتوى البيانات الناتجة (نظرياً) على التغيرات الدورية أو غير المنتظمة. متوسط متحرك نستخدم فيه 3 ، 5 أو 7 أشهر يفيد فى حذف التغيرات غير المنتظمة وإظهار التغيرات الدورية .

٦ - ارسم التغيرات الدورية التى حصلت عليها فى الخطوة الخامسة ، لاحظ أى تكرارية (أو شبه تكرارية) التى يمكن أن تحدث .

٧ - بتجميع نتائج الخطوات من ١ - ٦ مع أية معلومات أخرى متاحة ، أجرى التنبؤ (إذا كان ذلك مرغوباً فيه) وإذا كان ممكناً ناقش مصادر الخطأ وحجمه .

مســـائل محلولة

التحركات المميزة فى السلاسل الزمنية :

١٦ – ١ إلى أى من التحركات المميزة فى السلاسل الزمنية تنتمى أساساً مايلى :

(أ) اشتعال النار فى مصنع أدى إلى تأخير الإنتاج ثلاثة أسابيع

ج : غير منتظمة

(ب) عهد من الرفاهية

ج : دورية

(ج) مبيعات فترة ما بعد عيد الفصح فى أحد المتاجر

ج : موسمية .

(د) الحاجة إلى زيادة إنتاج القمح نتيجة الزيادة المستمرة فى السكان

ج : طويلة المدى

(هـ) عدد مليمترات الأمطار التى تهبط فى الشهر على مدينة معينة خلال فترة 5 سنوات .

ج : موسمية .

المتوسطات المتحركة :

١٦ – ٢ الجدول ١٦ – ١ يوضح متوسط الإنتاج الشهرى ، فى بلد معين ، من فحم البيتومينس بمليون الكيلوجرامات لسنوات من 1948 – 1958 . احسب (أ) 5 سنوات متوسط متحرك (ب) 4سنوات متوسط متحرك (ج) 4 سنوات متوسط متحرك مركزى .

جـدول ١٦ – ١

السـنة

السنة	1958	1957	1956	1955	1954	1953	1952	1951	1950	1949	1948
متوسط الإنتاج الشهرى من فحم البيتومينس (ملايين الكيلوجرامات)	33·8	41·1	41·7	38·7	32·6	38·1	38·9	44·5	43·0	36·5	50·0

الحــل :

(أ) بالرجوع إلى الجدول ١٦–٢ المجموع المتحرك الأول 212.9 بالعمود الثالث (من اليسار) هو المجموع من العنصر الأول إلى العنصر الخامس فى العمود الثانى (من اليسار) . المجموع المتحرك الثانى 201.0 هو المجموع من العنصر الثانى إلى العنصر السادس فى العمود الثانى وهكذا . من الناحية العملية فإنه بعد الحصول على المجموع المتحرك الأول 212.9 ، فمن السهل الحصول على المجموع المتحرك الثانى وذلك بطرح 50.0 (العنصر الأول فى العمود 2) وإضافة 38.1 (العنصر السادس فى العمود 2) فتكون النتيجة 201.0 . المجاميع المتحركة التالية نحصل عليها بطريقة مشابهة وبقسمة كل مجموع متحرك على 5 ينتج المتوسط المتحرك المطلوب .

جـــدول ١٦ – ٢

السنة	البيانات	5 سنوات مجموع متحرك	5 سنوات متوسط متحرك
1948	50.0		
1949	36.5		
1950	43.0	212.9	42.6
1951	44.5	201.0	40.2
1952	38.9	197.1	39.4
1953	38.1	192.8	39.6
1954	32.6	190.0	38.0
1955	38.7	192.2	38.4
1956	41.7	187.9	37.6
1957	41.1		
1958	33.8		

(ب) بالرجوع إلى الجدول ١٦ – ٣ نحصل على الـ 4 سنوات مجموع متحرك كما حصلنا عليه فى الجزء (أ) ، فيما عدا أننا نجمع العناصر الأربعة الأولى فى العمود الثانى (من اليسار) بدلا من خمسة عناصر . لاحظ أن المجاميع المتحركة تتمركز بين السنوات المتتالية ، وذلك بخلاف الجزء (أ) . وهذه دائما الحالة فيما إذا أخذنا عدداً زوجياً من السنوات عند حساب المتوسط المتحرك . فإذا اعتبرنا أن سنة 1949 على سبيل المثال ، تعبر عن أول يوليو 1949 فإن السنوات الأربع مجاميع متحركة تتمركز عند 1 يناير 1950 أو 31 ديسمبر 1949 .

جـــدول ١٦ – ٣

السنة	البيانات	4 سنوات مجموع متحرك	4 سنوات متوسط متحرك
1948	50.0		
1949	36.5		
1950	43.0	174.0	43.5
1951	44.5	162.9	40.7
1952	38.9	164.5	41.1
1953	38.1	154.1	38.5
1954	32.6	148.3	37.1
1955	38.7	151.1	37.8
1956	41.7	154.1	38.5
1957	41.1	155.3	38.8
1958	33.8		

ونحصل على الـ 4 سنوات متوسط متحرك بقسمة الـ 4 سنوات مجموع متحرك على 4 .

(ج) الطريقة الأولى : أنظر الجدول ١٦ – ٤

نحسب أولا 4 سنوات متوسطات متحركة كما فى الجزء (أ) . هذه القيم تتمركز بين السنوات المتتالية كما هو موضح .

إذا حسبنا الآن 2 سنة مجموعاً متحركاً من الـ 4 سنوات متوسطات متحركة ، فإن النتيجة تتمركز عند السنة المطلوبة .

بقسمة النتائج بالعمود 4 (من اليسار) ينتج الـ 4 سنوات متوسطات متحركة مركزية المطلوبة .

الجدول ١٦ – ٤

السنة	البيانات	4 سنوات متوسط متحرك	2 سنة مجموع متحرك للعمود السابق	4 سنوات متوسط متحرك مركزى (العمود 2 ÷ 4)
1948	50·0			
1949	36·5			
1950	43·0	43·5	84·2	42·1
1951	44·5	40·7	81·8	40·9
1952	38·9	41·1	79·6	39·8
1953	38·1	38·5	75·6	37·8
1954	32·6	37·1	74·9	37·5
1955	38·7	37·8	76·3	38·2
1956	41·7	38·5	77·3	38·7
1957	41·1	38·8		
1958	33·8			

الطريقة الثانية : أنظر الجدول ١٦ – ٥

نحسب أولا 4 سنوات مجموع متحرك كما فى الجزء (ب) . هذه القيم تتمركز بين السنوات المتتالية كما هو موضح .

فإذا حسبنا الآن 2 سنة مجموع متحرك لهذه الـ 4 سنوات مجموع متحرك ، فإن النتائج سوف تتمركز عند السنة المطلوبة .

بقسمة النتائج فى العمود 4 على 8 (4 × 2) ينتج المتوسط المتحرك المطلوب

جدول ١٦ – ٥

السنة	البيانات	4 سنوات مجموع متحرك	2 سنة مجموع متحرك للعمود الثالث	4 سنوات متوسط متحرك مركزى (العمود الرابع مقسوماً على 8)
1948	50·0			
1949	36·5			
1950	43·0	174·0	336·9	42·1
1951	44·5	162·9	327·4	40·9
1952	38·9	164·5	318·6	39·8
1953	38·1	154·1	302·4	37·8
1954	32·6	148·3	299·4	37·4
1955	38·7	151·1	305·2	38·2
1956	41·7	154·1	309·4	38·7
1957	41·1	155·3		
1958	33·8			

١٦ – ٣ وضح أن الـ 4 سنوات متوسط متحرك مركزى بالمسألة ١٦ – ٢ (جـ) يكافىء 5 سنوات متوسط متحرك مرجح باستخدام الأوزان 1, 2, 2, 2, 1 على الترتيب

الحـل :

اعتبر أن $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{11}$ تعبر عن القيم المقابلة للسنوات 1948، 1949، . . . ، 1958 على الترتيب . وباتباع خطوات الطريقة الثانية للمسألة ١٦ – ٢ (جـ) ، نحصل على الجدول ١٦ – ٦

جـدول ١٦ – ٦

السنة	Y	4 سنوات مجموع متحرك	2 سنة مجموع متحرك للعمود الثالث	4 سنوات متوسط متحرك مركزى (العمود الرابع مقسوماً على 8)
1948	Y_1			
1949	Y_2			
1950	Y_3	$Y_1+Y_2+Y_3+Y_4$		
1951	Y_4	$Y_2+Y_3+Y_4+Y_5$	$Y_1+2Y_2+2Y_3+2Y_4+Y_5$	$\frac{1}{8}(Y_1+2Y_2+2Y_3+2Y_4+Y_5)$
1952	Y_5	$Y_3+Y_4+Y_5+Y_6$	$Y_2+2Y_3+2Y_4+2Y_5+Y_6$	$\frac{1}{8}(Y_2+2Y_3+2Y_4+2Y_5+Y_6)$
1953	Y_6	$Y_4+Y_5+Y_6+Y_7$	$Y_3+2Y_4+2Y_5+2Y_6+Y_7$	$\frac{1}{8}(Y_3+2Y_4+2Y_5+2Y_6+Y_7)$
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
1958	Y_{11}			

من العمود الأخير ينتج عن ذلك أن 4 سنوات متوسط متحرك مركزى هى 5 سنوات متوسط متحرك مرجح بأوزان 1, 2, 2, 2, 1 على الترتيب . لاحظ أن 8 هو مجموع هذه الأوزان ، أى ، $8 = 1 + 2 + 2 + 2 + 1$

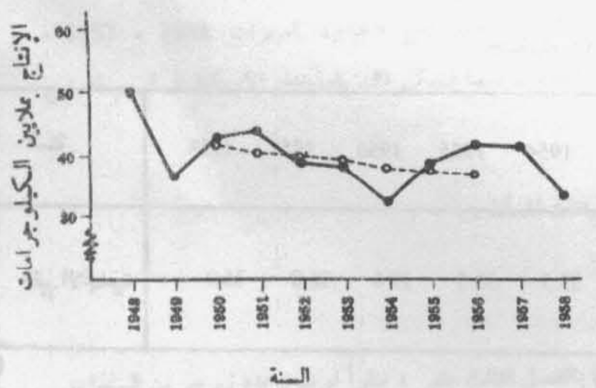
هذه الطريقة يمكن استخدامها للحصول على نتائج المسألة ١٦ – ٢ (جـ) . على سبيل المثال ، فإن القيمة الأولى (المقابلة لسنة 1950) هى :

$$\frac{(1)(50\cdot0) + (2)(36\cdot5) + (2)(43\cdot0) + (2)(44\cdot5) + (1)(38\cdot9)}{8} = 42\cdot1$$

١٦ – ٤ ارسم المتوسط المتحرك للمسألة ١٦ – ٢ (أ) مع توضيح البيانات الأصلية .

الحـل :

الرسم البيانى للبيانات الأصلية موضح بالشكل ١٦ – ٣ بالخط المتصل . الرسم البيانى للمتوسط المتحرك موضح بخطوط متقطعة .



شكل ١٦ – ٣

لاحظ كيف أن المتوسط المتحرك قد مهد الخط البيانى للبيانات الأصلية ، مبيناً بشكل واضح خط الاتجاه العـــام .

أحد عيوب المتوسط المتحرك هو أننا نفقد البيانات عند بداية ونهاية السلسلة الزمنية . وقد يكون ذلك خطيراً إذا كانت كمية البيانات ليست كبيرة .

تقدير الاتجاه العام :

١٦ – ٥ أوجد القيم الاتجاهية لبيانات المسألة ١٦ – ٢ باستخدام طريقة أشباه المتوسطات ، حيث نأخذ كتوسط (أ) الوسط الحسابى (ب) الوسيط

الحـــل :

(أ) تقسم البيانات إلى جزءين متساويين (مع حذف السنة المتوسطة 1953) كما هو موضح . احسب متوسط البيانات فى كل جزء . من النتائج التى حصلنا عليها ينتج أنه فى 6 سنوات (من 1950 إلى 1956) حدث انخفاض يساوى (42.6–37.6) 5.0 مليون كيلوجرام ، أو انخفاض 0.83 = 5.0/6 مليون كيلوجرام فى السنة .

1948	50·2
1949	36·5
1950	43·0
1951	44·5
1952	38·9
	Total 212·9

المجموع
الوسط = 212.9/5
= 42.5
(تقابل سنة 1950)

1954	32·6
1955	38·7
1956	41·7
1957	41·1
1958	33·8
	Total 187·9

المجموع
الوسط = 187.9/5
= 37.6
(تقابل سنة 1956)

بمعرفة ذلك، فإنه يمكن حساب القيم الاتجاهية فالقيم الاتجاهيه لسنة 1951 تساوى 42.6 – 0.83 = 4.8 والقيم الاتجاهية لسنة 1952 هى 40.9 = (0.83) 2 – 42.6 وهكذا ، كما هو موضح بالجدول ١٦ – ٨

جـــدول ١٦ – ٨

السنة	1958	1957	1956	1955	1954	1953	1952	1951	1950	1949	1948
القيم الاتجاهية	36·0	36·8	37·6	38·5	39·3	40·1	40·9	41·8	42·6	43·4	44·3

ويمكن الحصول على النتيجة أيضاً برسم خط يصل بين النقط (42.6 و 1950) و (37.6 ، 1956) ثم بقراءة القيم الاتجاهية من الرسم .

(ب) الوسيطان لكل من الجزءين فى (أ) هما 43.0 و 38.7 على الترتيب . أن هناك نقصاً يساوى 0.72 = 6 / (38.7 — 43.0) فى السنة ، ويوضح الجدول ١٦ – ٩ القيم الاتجاهية فى هذه الحالة .

جدول ١٦ – ٩

السنة	1948	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958
القيم الاتجاهية	44·4	43·7	43·0	42·3	41·6	40·8	40·1	39·4	38·7	38·0	37·2

وعندما نستخدم الوسيطان فإن الطريقة تسمى بأشباه الوسيطات . وإذا لم يذكر نوع الوسط المستخدم فإن هذا يتضمن استخدام الوسط الحسابى .

١٦ – ٩ صف كيف يمكن استخدام (أ) طريقة التوفيق باليد (ب) طريقة المتوسطات المتحركة لحساب القيم الاتجاهية لبيانات المسألة ١٦ – ٢ .

الحــل :

(أ) فى هذه الطريقة فإننا ببساطة نرسم خطاً أو منحنى يكون أفضل تقريب للبيانات المعطاة بالرسم فى المسألة ١٦ – ٤ . من هذا الخط يمكن أن نقرأ القيم الاتجاهية .

(ب) باستخدام 5 سنوات متوسطاً متحركاً ، فإننا نجد (المسألة ١٦ – ٤) أن بيانات السلسلة الزمنية قد مهدت بصورة كبيرة . ومن الممكن استخدام المتوسطات التى حصلنا عليها كقيم اتجاهية للسنوات 1956 – 1950 . بهاذ فإنه من المسألة ١٦ – ٢ (أ) نجد أن القيم الاتجاهية المقابلة للسنوات ... ، 1952 ، 1951 ، 1950 هى ... 39.4 ، 40.2 ، 42.6 . بهذه الطريقة فإن القيم الاتجاهية للسنوات 1958 ، 1957 ، 1949 ، 1948 ليست متاحة . وإذا أردنا الحصول عليها فيمكن ذلك باستخدام الاستكمال فى الرسم الموضح بالمسألة ١٦ – ٤ .

١٦ – ٧ (أ) استخدام طريقة المربعات الصغرى لتوفيق خط لبيانات المسألة ١٦ – ٢

(ب) من النتيجة فى (أ) أوجد القيم الاتجاهية .

الحــل :

(أ) نستخدم الطريقة الثانية بالمسألة ١٣ – ١٩ (أ) بالفصل الثالث عشر ، نظراً لوجود عدد زوجى من السنوات .

الجـدول ١٦ – ١٠

السنة	X	Y	X^2	XY
1948	−5	50·0	25	−250·0
1949	−4	36·5	16	−146·0
1950	−3	43·0	9	−129·0
1951	−2	44·5	4	−89·0
1952	−1	38·9	1	−38·9
1953	0	38·1	0	0
1954	1	32·6	1	32·6
1955	2	38·7	4	77·4
1956	3	41·7	9	125·1
1957	4	41·1	16	164·4
1958	5	33·8	25	169·0
		$\Sigma Y = 438·9$	$\Sigma X^2 = 110$	$\Sigma XY = -84·4$

بهذا فإن خط المربعات الصغرى المطلوب هو :

$$Y = \bar{Y} + \left(\frac{\Sigma XY}{\Sigma X^2}\right)X = \frac{438·9}{11} + \left(\frac{-84·4}{110}\right)X \text{ or } Y = 39·9 - 0·767X$$

حيث نقطة الأصل $X = 0$ هى السنة 1953 ووحدة X هى السنة

(ب) بوضع $X = -5, -4, -3, . . . 5$ فى معادلة المربعات الصغرى التى حصلنا عليها فى الجزء (أ) ، فإننا نحصل على القيم الاتجاهية كما هى معطاة فى الجدول ١٦ – ١١ .

جـدول ١٦ – ١١

السنة	1948	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958
القيم الاتجاهية	43·7	43·0	42·2	41·4	40·7	39·9	39·1	38·4	37·6	36·8	36·1

وهذه النتائج تتفق بصورة جيدة مع نتائج المسألة ١٦ – ٥ .

تقدير التغيرات الموسمية والدليل الموسمى :

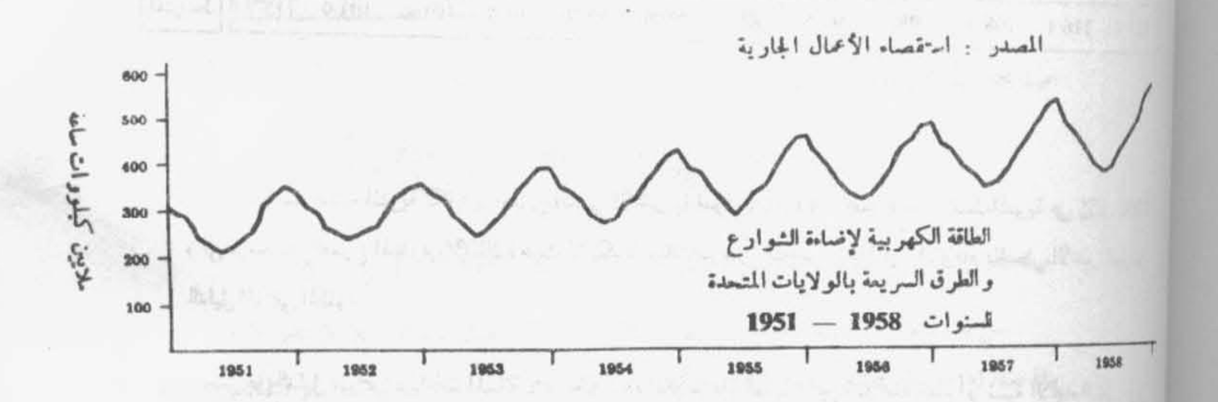
١٦ – ٨ الجدول ١٦ – ١٢ يوضح الطاقة الكهربائية الشهرية معبراً عنها بملايين الكيلووات ساعة والمستخدمة فى إضاءة الشـ والطرق السريعة بالولايات المتحدة الأمريكية فى السنوات 1958 — 1952 .

(أ) كون الشكل البيانى لهذه البيانات (ب) أحصل على الدليل الموسمى مستخدماً طريقة متوسط النسب المئوية

جـدول ١٦ – ١٢

	يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونيو	يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفبر	ديسمبر
1951	318	281	278	250	231	216	223	245	269	302	325	347
1952	342	309	299	268	249	236	242	262	288	321	342	364
1953	367	328	320	287	269	251	259	284	309	345	367	394
1954	392	349	342	311	290	273	282	305	328	364	389	417
1955	420	378	370	334	314	296	305	330	356	396	422	452
1956	453	412	398	362	341	322	335	359	392	427	454	483
1957	487	440	429	393	370	347	357	388	415	457	491	516
1958	529	477	463	423	398	380	389	419	448	493	526	560

المصدر : استقصاء الأعمال الجارية



السنـــة

(المصدر : استقصاء الأعمال الجارية)

(ب) المجاميع والمتوسطات الشهرية (الأوساط الحسابية) للسنوات 1958 — 1951 هي كما يلي

شكل ١٦ – ١٣

	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958
المجاميع	3285	3522	3780	4042	4373	4738	5090	5505
المتوسطات الشهرية	273·7	293·5	315·0	336·8	364·4	394·8	424·2	458·7

بقسمة البيانات الشهرية المعطاة بالمتوسطات الشهرية المقابلة لكل سنة مع التعبير عن النتيجة كنسبة مئوية تنتج القيم الموضحة بالجدول ١٦ – ١٤ على سبيل المثال ، القيمة الأولى في الجدول تحسب كما يلي :

$$318/273.7 = 116.2\%$$

جدول ١٦ – ١٤

	يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونيو	يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفبر	ديسمبر
1951	116·2	102·7	101·6	91·3	84·4	78·9	81·5	89·5	98·3	110·3	118·7	126·8
1952	116·5	105·3	101·9	91·3	84·8	80·4	82·5	89·3	98·1	109·4	116·5	124·0
1953	116·5	104·1	101·6	91·1	85·4	79·7	82·2	90·2	98·1	109·5	116·5	125·1
1954	116·4	103·6	101·5	92·3	86·1	81·1	83·7	90·6	97·4	108·1	115·5	123·8
1955	115·3	103·7	101·5	91·7	86·2	81·2	83·7	90·6	97·7	108·7	115·8	124·0
1956	114·7	104·4	100·8	91·7	86·4	81·6	84·9	90·9	99·3	108·2	115·0	122·3
1957	114·8	103·7	101·1	92·6	87·2	81·8	84·2	91·5	97·8	107·7	115·7	121·6
1958	115·3	104·0	100·9	92·2	86·8	82·8	84·8	91·3	97·7	107·5	114·7	122·1
المجموع	925·7	831·5	810·9	734·2	687·3	647·5	667·5	723·9	784·4	869·4	928·4	989·7
المتوسط	115·7	103·9	101·4	91·8	85·9	80·9	83·4	90·5	98·1	108·7	116·1	123·7

متوسط النسبة المئوية لكل شهر معطى بالسطر الأخير بالجدول ١٦–١٤ . مجموع هذه النسب المئوية هى %1200.1 وهى قريبة من المجموع المطلوب %1200 بحيث لا يكون هناك ضرورة للتعديل . بهذا فإن الارقام بالسطر الأخير تعبر عن الدليل الموسمى المطلوب .

١٦ – ٩ احصل على الدليل الموسمى لبيانات المسألة ١٦ – ٨ باستخدام طريقة النسبة المئوية للاتجاه العام أو نسبة الاتجاه العام . وفى تطبيق هذه الطريقة استخدم طريقة المربعات الصغرى لحصول على القيم الاتجاهية الشهرية .

الحـــل :

من الرسم البيانى للبيانات الفعلية ، بالمسألة ١٦–٨ (أ) يتضح أن الاتجاه العام طويل المدى يمكن تقريبه بصورة مناسبة بخط مستقيم . وبدلاً من الحصول على هذا الخط من البيانات الشهرية المعطاة فإننا نحصل عليها من المتوسطات الشهرية للسنوات 1958 — 1951 المعطاة بالجدول ١٦ – ١٥ ، المستخرج من الجدول ١٦ – ١٣ للمسألة ١٦ – ٨ (أ) .

جدول ١٦ – ١٥

السنة	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958
المتوسط الشهرى	273·7	293·5	315·0	336·8	364·4	394·8	424·2	458·7

بافتراض أن الأرقام الشهرية المعطاة تقابل منتصف الشهر ، فإن المتوسطات فى هذا الجدول تقابل 30 يونيو أو 1 يوليو للسنة المقابلة لكل متوسط .

نستخدم الطريقة الثانية للمسألة ١٣ – ٢٠ (ب) ، الفصل الثالث عشر

الجدول ١٦ – ١٦

السنة	X	Y	X^2	XY
1951	−7	273·7	49	−1915·9
1952	−5	293·5	25	−1467·5
1953	−3	315·0	9	−945·0
1954	−1	336·8	1	−336·8
1955	1	364·4	1	364·4
1956	3	394·8	9	1184·4
1957	5	424·2	25	2121·0
1958	7	458·7	49	3210·9
		$\Sigma Y = 2861{\cdot}1$	$\Sigma X^2 = 168$	$\Sigma XY = 2215{\cdot}5$

حيث نجد خط المربعات الصغرى وهو

$$Y = \bar{Y} + \left(\frac{\Sigma XY}{\Sigma X^2}\right)X = \frac{2861{\cdot}1}{8} - \left(\frac{2215{\cdot}5}{168}\right)X = 357{\cdot}6 - 13{\cdot}188X$$

حيث تقاس X بنصف السنة ونقطة الأصل هى 31 ديسمبر 1954 أو 1 يناير 1955 .

من هذه المعادلة نستنتج أن قيم Y تزيد 13.188 كل نصف سنة أو $13.188/6 = 2.20$ كل شهر . بهذا فعند $X = 0$ (1 يناير 1955) فإن $Y = 357.6$. وبعد نصف شهر (15 يناير 1955) فإن قيمة Y تصبح $357.6 + ½ (2.20) = 358.7$ وهى القيمة الاتجاهية المقابلة لشهر يناير 1955 . وبالإضافة المتتالية لـ 2.20 إلى 358.7 نحصل على القيمة الاتجاهية لشهر فبراير 1955 ، وهى $358.7 + 2.20 = 360.9$ ولشهر مارس 1955 وهى $360.9 + 2.20 = 363.1$ .. وهكذا . وبصورة مشابهة فإنه بالطرح المتتالى لـ 2.20 من 358.7 نحصل على القيم الاتجاهية لشهر ديسمبر 1954 ونوفمبر 1954 وهى على الترتيب $358.7 - 2.20 = 356.5$ لشهر ديسمبر و $356.5 - 2.20 = 354.3$ لشهر نوفمبر وبهذه الطريقة نحصل على القيم الاتجاهية الشهرية الموضحة بالجدول ١٦ – ١٧

الجدول ١٦ – ١٧

السنة	يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونيو	يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفمبر	ديسمبر
1951	253·1	255·3	257·5	259·7	261·9	264·1	266·3	268·5	270·7	272·9	275·1	277·3
1952	279·5	281·7	283·9	286·1	288·3	290·5	292·7	294·9	297·1	299·3	301·5	303·7
1953	305·9	308·1	310·3	312·5	314·7	316·9	319·1	321·3	323·5	325·7	327·9	330·1
1954	332·3	334·7	336·7	338·9	341·1	343·3	345·5	347·7	349·9	352·1	354·3	356·5
1955	358·7	360·9	363·1	365·3	367·5	369·7	371·9	374·1	376·3	378·5	380·7	382·9
1956	385·1	387·3	389·5	391·7	393·9	396·1	398·3	400·5	402·7	404·9	407·1	409·3
1957	411·5	413·7	415·9	418·1	420·3	422·5	424·7	426·9	429·1	431·3	433·5	435·7
1958	437·9	440·1	442·3	444·5	446·7	448·9	451·1	453·3	455·5	457·5	459·9	462·1

ثم نقسم كل قيمة من القيم الشهرية المعطاة بالجدول ١٦ – ١٢ بالمسألة ١٦ – ٨ بالقيم الاتجاهية المقابلة بالجدول ١٦ – ١٧ . ويوضح الجدول ١٦ – ١٨ النتيجة كنسبة مئوية ، على سبيل المثال ، فإن القيمة الأولى بالجدول تحسب كالآتى $318 / 253.1 = 125.6\%$

جـــدول ١٦ – ١٨

	يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونيو	يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفبر	ديسمبر
1951	125·6	110·1	108·0	96·3	88·2	81·8	83·7	91·2	99·4	110·7	118·1	125·1
1952	122·4	110·0	105·3	93·7	86·4	81·2	82·7	88·8	96·9	107·3	113·4	119·9
1953	120·0	106·5	103·1	91·8	85·5	79·2	81·2	88·4	95·5	105·9	111·9	119·4
1954	118·0	104·3	101·6	91·8	85·0	79·5	81·6	87·7	93·7	103·4	109·8	117·0
1955	117·1	104·7	101·9	91·4	85·4	80·1	82·0	88·2	94·6	104·6	110·8	118·0
1956	117·6	106·4	102·2	92·4	86·6	81·3	84·1	89·6	97·3	105·5	111·5	118·0
1957	118·3	106·4	103·1	94·0	88·0	82·1	84·1	90·9	96·7	106·0	113·3	118·4
1958	120·8	108·4	104·7	95·2	89·1	84·7	86·2	92·4	98·4	107·7	114·4	121·2
الوسيط	119·2	106·4	103·1	93·0	86·5	81·2	83·2	89·2	96·8	106·0	112·6	118·9

للحصول على متوسط النسب المئوية لكل شهر للسنوات المختلفة ، فقد استخدم الوسيط ، كما هو موضح بالصف الأخير بالجدول ، وذلك نظراً لوجود قيم متطرفة . ونظراً لأن مجموع هذه الوسيطات هو 1196.1 ، فإننا نعدل هذه الأرقام بضربها فى 1200/1196.1 بحيث يكون مجموعها 1200 . وبهذه الطريقة نحصل على الدليل الموسمى المطلوب كما هو موضح بالجدول ١٦ – ١٩ .

جدول ١٦ – ١٩

	يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونيو	يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفبر	ديسمبر
الدليل الموسمى	119·6	106·7	103·4	93·3	86·8	81·5	83·5	89·5	97·1	106·3	113·0	119·3

ومما يستحق الانتباه ملاحظة أنه فى الأشهر السبعة الأولى فإن أرقام الدليل الموسمى أعلاه أكبر من تلك التى حصلنا عليها بالمسألة ١٦ – ٨ ، بينما فى الأشهر الخمسة الأخيرة فإنها تكون أقل .

ويمكن الحصول على الدليل الموسمى باستخدام الوسط الحسابى بدلا من الوسيط المذكور بالصف الأخير من الجدول ١٦ – ١٨ . فى هذه الحالة فإنه يجب استبعاد القيم المتطرفة من أى عمود قبل الحساب الوسط .

١٦–١٠ أوجد الدليل الموسمى لبيانات المسألة ١٦ – ٨ باستخدام طريقة النسب المئوية للمتوسط المتحرك أو النسبة للمتوسط المتحرك .

الحـل :

نبدأ أولا الحصول على 12 شهر متوسط متحرك مركزى باستخدام الطريقة الثانية للمسألة ١٦ – ٢ (ج) كما هو موضح بالجدول ١٦ – ٢٠

جـدول ١٦ – ٢٠

السنة و الشهر	البيانات	12 شهر مجموع متحرك	2 شهر مجموع متحرك للعمود 3	12 شهر متوسط متحرك مركزى (العمود 4 مقسوماً على 24)
1951				
يناير	318			
فبراير	281			
مارس	278			
ابريل	250			
مايو	231			
يونيه	216	3285		
يوليه	223	3309	6594	274·7
اغسطس	245	3337	6646	276·9
سبتمبر	269	3358	6695	279·0
اكتوبر	302	3376	6734	280·6
نوفمبر	325	3394	6770	282·1
ديسمبر	347	3414	6808	283·7
1952				
يناير	342	3433	6847	285·3
فبراير	309	3450	6883	286·8
مارس	299	3469	6919	288·3
ابريل	268	3488	6957	289·9
مايو	249	3505	6993	291·4
يونيه	236	3522	7027	292·9
يوليه	242	3547	7069	294·5
اغسطس	262	3566	7113	296·4
سبتمبر	288	3587	7153	298·0
اكتوبر	321	3606	7193	299·7
نوفمبر	342	3626	7232	301·3
ديسمبر	364		7267	302·8
1953		3641		
يناير	367	3658	7299	304·1
فبراير	328	3680	7338	305·7
مارس	320	3701	7381	307·5
ابريل	287	3725	7426	309·4
مايو	269	3750	7475	311·5
يونيه	251	3780	7530	313·7
يوليه	259	3805	7585	316·0
اغسطس	284	3826	7631	318·0
سبتمبر	309	3848	7674	319·7
اكتوبر	345	3872	7720	321·7
نوفمبر	367	3893	7765	323·5
ديسمبر	394	3915	7808	325·3
1954				
يناير	392	3938	7853	327·2
فبراير	345	3959	7897	329·0
مارس	342	3978	7937	330·7
ابريل	311	3997	7975	332·3
مايو	290	4019	8016	334·0
يونيه	273	4042	8061	335·9
يوليه	282	4070	8112	338·0
اغسطس	305	4099	8169	340·4
سبتمبر	328	4127	8226	342·7
اكتوبر	364	4150	8277	344·9
نوفمبر	389	4174	8324	346·8
ديسمبر	417		8371	348·8

تابع جدول ٢٠١٦

السنة و الشهر	البيانات	12 شهر مجموع متحرك	2 شهر مجموع متحرك العمود 3	12 شهر متوسط متحرك مركزي (العمود 4 مقسوما على 24)
1955		4197		
يناير	420	4220	8417	350·7
فبراير	378	4245	8465	352·7
مارس	370	4273	8518	354·9
ابريل	334	4305	8578	375·4
مايو	314	4338	8643	360·1
يونيه	296	4373	8711	363·0
يوليه	305	4406	8779	365·8
اغسطس	330	4440	8846	368·6
سبتمبر	356	4468	8908	371·2
اكتوبر	396	4496	8964	373·5
نوفمبر	422	4523	9019	375·8
ديسمبر	452	4549	9072	378·0
1956				
يناير	453	4579	9128	380·3
فبراير	412	4608	9187	382·8
مارس	398	4644	9252	385·5
ابريل	362	4675	9319	388·3
مايو	341	4707	9382	390·9
يونيه	322	4738	9445	393·5
يوليه	335	4772	9510	396·2
اغسطس	359	4800	9572	398·8
سبتمبر	392	4831	9631	401·3
اكتوبر	427	4862	9693	403·9
نوفمبر	454	4891	9753	406·4
ديسمبر	483		9807	408·6
1957		4916		
يناير	487	4938	9854	410·6
فبراير	440	4967	9905	412·7
مارس	429	4990	9957	414·9
ابريل	393	5020	10010	417·1
مايو	370	5057	10077	419·9
يونيه	347	5090	10147	422·8
يوليه	357	5132	10222	425·9
اغسطس	388	5169	10301	429·2
سبتمبر	415	5203	10372	432·2
اكتوبر	457	5233	10436	434·8
نوفمبر	491	5261	10494	437·2
ديسمبر	516	5294	10555	439·8
1958				
يناير	529	5326	10620	442·5
فبراير	477	5357	10683	445·1
مارس	463	5390	10747	447·8
ابريل	423	5426	10816	450·7
مايو	398	5461	10887	453·6
يونيه	380	5505	10966	456·9
يوليه	389			
اغسطس	419			
سبتمبر	448			
اكتوبر	493			
نوفمبر	526			
ديسمبر	560			

نقوم الآن بقسمة كل من القيم الفعلية الشهرية على 12 شهراً متوسطاً متحركاً مركزياً المقابل والتعبير عن كل نتيجة كنسبة مئوية ، على سبيل المثال ، مقابل شهر يوليو 1951 نحصل على (%)81.2 = 223/274.7 . ويوضح الجدول ١٦ – ٢١ هذه النتائج . لاحظ أن القيم للأشهر الستة من 1951 وكذلك للأشهر الستة الأخيرة من 1958 غير متاحة باستخدام هذه الطريقة .

الاختبارات النظرية للأرقام القياسية :

من المستحب من الناحية النظرية أن تحقق الأرقام القياسية لمجموعات من السلع الخواص التى تحققها المناسيب (أى الأرقام القياسية لسلعة واحدة) . وأى رقم قياسى له خاصية معينة يذكر عنه أنه يحقق الاختبار المرتبط بهذه الخاصية . بهذا ، فعلى سبيل المثال ، الأرقام القياسية التى لها خاصية الانعكاس فى الزمن يقال عنها أنها تحقق اختبار الانعكاس فى الزمن ، وهكذا .

ولم يكتشف رقم قياسى للآن يحقق كل الاختبارات ، على الرغم من أنه فى كثير من الحالات تتحقق هذه الاختبارات تقريبا . يحقق رقم فيشر المثالى (صفحة ٥٠٢) على وجه الخصوص اختبار الانعكاس فى الزمن واختبار الانعكاس فى المعامل ، وبهذا يقترب من أى رقم قياسى نافع آخر من تحقيق الخصائص التى تعتبر مهمة ، ومنها جاءت تسمية «المثالى» .

ومن وجهة النظر العملية ، يمكن استخدام أرقام قياسية أخرى كذلك وسوف نقوم باختبار بعضها .

رمـــوز :

من المعتاد استخدام الرمز $p_n^{(1)}, p_n^{(2)}, p_n^{(3)}, \ldots$ للتعبير عن أسعار السلعة الأولى ، الثانية والثالثة ، . . . . . خلال الفترة المعينة n . الأسعار المقابلة خلال فترة الأساس يرمز لها بالرمز $p_0^{(1)}, p_0^{(2)}, p_0^{(3)}$ وهلم جرا . الأرقام $1, 2, 3, \ldots$ هى أدلة ويجب ألا تثير اللبس مع الأسس . بهذه الرموز فإن سعر السلعة فى خلال الفترة n يمكن الإشارة إليها بالصورة $p_n^{(j)}$

وكما فى الفصول السابقة ، نستخدم رمز التجميع على الدليل j . على سبيل المثال ، بافترض أن هناك مجموعة N من السلع ، فإن مجموع أسعارها خلال الفترة n يمكن كتابته على الشكل $\Sigma p_n^{(j)}$ أو $\sum_{j=1}^{N} p_n^{(j)}$ ومن الأسهل حذف الأدلة معا وكتابة Σp_n ، وهو ما سوف نتبعه إذا لم يؤد هـــذا إلى أى التباس . ويجب أن نحتفظ نصب أعيننا بحقيقة أننا نستخدم مجموعة متكاملة من الرموز ، فبهذه الرموز ، فإن Σp_0 تعبر عن الأسعار لجميع السلع خلال فترة الأساس . ونستخدم رموزا مماثلة للكميات والقيم .

الطريقة التجميعية البسيطة :

فى هذه الطريقة لحساب الرقم القياسى للأسعار ، فإننا نعبر عن مجموع أسعار السلع فى سنة المقارنة كنسبة مئوية من مجموع أسعارها فى سنة الأساس .

$$\text{الرقم القياسى التجميعى البسيط} = \frac{\Sigma p_n}{\Sigma p_0} \qquad (٤)$$

حيث $\Sigma p_0 =$ مجموع أسعار السلع فى سنة الأساس

$\Sigma p_n =$ المجموع المقابل لأسعار السلع فى سنة المقارنة .

حيث يعبر عن النتيجة كنسبة مئوية كما هو بالنسبة للأرقام القياسية بشكل عام .

وعلى الرغم من أن هذه الطريقة لها الميزة بأنها سهلة التطبيق ، إلا أن لها عيبين كبيرين يجعل استخدامها غير مستحب .

١ – لا تؤخذ فى الحسبان الأهمية النسبية للسلع المختلفة . فمثلا طبقا لهذه الطريقة ، فإن أوزانا متساوية تعنى أن نفس الأهمية سوف تعطى للألبان ولمعجون الحلاقة عند حساب الرقم القياسى لتكلفة المعيشة .

٢ – الوحدات المستخدمة فى تسعير السعر ، مثل ، الجزام . وغيرها . تؤثر على قيمة الرقم القياسى . أنظر المسألة ١٧–١٢ .

الوسط البسيط لمناسيب :

فى الطريقة هناك عديد من الصيغ تعتمد على الطريقة المستخدمة فى الحصول على أوساط مناسيب الأسعار ، مثل الوسط الحسابى ، الوسط الهندسى ، الوسط التوافقى ، الوسيط ، وما إلى ذلك . فإذا استخدمنا الوسط الحسابى ، على سبيل المثال فإننا نحصل على .

$$\text{الوسط الحسابى البسيطللرقم القياسى لمناسيب الأسعار} = \frac{\Sigma p_n/p_o}{N} \qquad (٥)$$

حيث $\Sigma p_n / p_o$ = مجموع مناسيب أسعار جميع السلع .

N = عدد مناسيب أسعار السلع المستخدمة

للأرقام القياسية باستخدام أنواع أخرى من الأوساط ، أنظر المسائل ١٧-١٤ ؛ ١٧-١٥

وعلى الرغم من أن هذه الطريقة تتخلص من العيب الثانى الموجود فى الطريقة التجميعية البسيطة ولكن يظل العيب الأول موجوداً بها .

الطريقة التجميعية المرجحة :

للتغلب على عيوب الطريقة التجميعية البسيطة ، فإننا ترجح أسعار كل سلعة باستخدام معامل ملائم ويستخدم غالبا كية أو حجم السلعة المباعة خلال فترة الأساس ، أو سنة المقارنة أو سنة نموذجية (والتى قد تتضمن متوسط عدد من السنوات) هذه الأوزان تشير إلى أهمية السلعة المعنية . وهناك ثلاث صيغ ممكنة تعتمد على ما إذا كنا سنستخدم كيات سنة الأساس أو سنة المقارنة أو سنة نموذجية ونعبر عنها بالرموز q_o و p_n و q_t على الترتيب .

١ ــ رقم لاسبيرز القياسى او طريقة سنة الأساس :

$$\text{الرقم القياسى التجميعى المرجح باستخدام كيات سنة الأساس} = \frac{\Sigma p_n q_o}{\Sigma p_o q_o} \qquad (٦)$$

٢ ــ رقم باش القياسى او طريقة سنة المقارنة :

$$\text{الرقم القياسى التجميعى المرجح باستخدام كيات سنة المقارنة} = \frac{\Sigma p_n q_n}{\Sigma p_o q_n} \qquad (٧)$$

٣ ــ طريقة السنة النموذجية :

إذا اعتبرنا أن q_t تعبر عن وزن الكية خلال فترة نموذجية ، فإننا نعرف .

$$\text{الرقم القياسى التجميعى المرجح باستخدام كيات السنة النموذجية} = \frac{\Sigma p_n q_t}{\Sigma p_o q_t} \qquad (٨)$$

عندما تكون $t = o$ و $t = n$ فإن هذه الصيغة تؤول إلى الصيغة (٦) والصيغة (٧) على الترتيب .

رقم فيشر المثالى :

نعـرف

$$\text{الرقم القياسى المثالى لفيشر} \sqrt{\left(\frac{\Sigma p_n q_o}{\Sigma p_o q_o}\right)\left(\frac{\Sigma p_n q_n}{\Sigma p_o q_n}\right)} \qquad (٩)$$

وهذا الرقم القياسى هو الوسط الهندسى للرقين القياسيين لكل من لاسبيرز وباش الموضحين بالمعادلتين (٦) و (٧) وكما سبق أن أوضحنا فإن رقم فيشر المثالى يحقق كلا من اختبارى الانعكاس فى الزمن والانعكاس فى المعامل ، وهذا ما يعطيه بعض المزايا النظرية عن الأرقام القياسية الأخرى .

رقم مارشال — ادجورث القياسى :

يستخدم رقم مارشال – أدجورث القياسى الصيغة التجميعية المرجحة باستخدام طريقة السنة النموذجية حيث الأوزان هى الوسط الحسابى لكميات سنة الأساس و كميات سنة المقارنة . أى $q_t = \frac{1}{2}(q_0 + q_n)$. وبالتعويض بهذه القيمة لـ q_t فى المعادلة (٨) ، نحصل على .

$$\text{رقم مارشال – أدجورث القياسى للأسعار} = \frac{\Sigma p_n(q_o + q_n)}{\Sigma p_o(q_o + q_n)} \qquad (10)$$

الوسط البسيط للمناسيب :

للتغلب على العيوب فى طريقة الوسط البسيط للمناسيب فيمكن أن نستخدم متوسطا مرجحا للمناسيب . والوسط المرجح الأكثر شيوعاً فى هذا المجال هو الوسط الحسابى المرجح ، على الرغم من أنه يمكن استخدام أوساط مرجحة أخرى مثل الوسط الهندسى المرجح (الفصل الثالث) .

فى هذه الطريقة نرجح كل منسوب سعر بالقيمة الإجمالية للسلعة وذلك بدلالة بعض الوحدات النقدية مثل الدولار . وبما أن قيمة السلعة نحصل عليها بضرب السعر p للسلعة فى الكمية q ، فإن الأوزان تعطى بالصيغة pq .

وهناك ثلاث صيغ يمكن استخدامها وهذه تعتمد على ما إذا كنا نستخدم قيم سنة الأساس ، أو سنة المقارنة أو سنة نموذجية ، ويعبر عن ذلك بالرموز $p_0\, q_0$ و $p_n\, q_n$ و $p_t\, q_t$ على الترتيب .

الوسط الحسابى المرجح لمناسيب الأسعار باستخدام قيم سنة الأساس كأوزان .

$$= \frac{\Sigma (p_n/p_o)(p_o q_o)}{\Sigma p_o q_o} = \frac{\Sigma p_n q_o}{\Sigma p_o q_o} \qquad (11)$$

الوسط الحسابى المرجح لمناسيب الأسعار باستخدام قيم سنة المقارنة كأوزان

$$= \frac{\Sigma (p_n/p_o)(p_n q_n)}{\Sigma p_n q_n} \qquad (12)$$

الوسط الحسابى المرجح لمناسيب الأسعار باستخدام قيم سنة نموذجية كأوزان

$$= \frac{\Sigma (p_n/p_o)(p_t q_t)}{\Sigma p_t q_t}$$

لاحظ أن المعادلة (١١) تعطى نفس نتيجة صيغة لاسبيرز المعروفة بالمعادلة (٦) .

الارقام القياسية للكمية او الحجم :

الصيغة الموضحة أعلاه التى تعرف الأرقام القياسية للأسعار يمكن بسهولة تعديلها للحصول على الأرقام القياسية للكمية أو الحجم وذلك ببساطة بإبدال p و q . على سبيل المثال ، إبدال p بدلا من q فى (٥) ينتج

$$\text{الوسط الحسابى البسيط للرقم القياسى لمناسيب الكميات} = \frac{\Sigma q_n/q_o}{N} \qquad (14)$$

حيث $\Sigma q_n/q_o$ = مجموع مناسيب كميات جميع السلع

N = عدد مناسيب أسعار السلع المستخدمة

وبالمثل ، الصيغ (٦) و (٧) تصبح

الرقم القياسى التجميعى المرجح باستخدام أسعار سنة الأساس كأوزان $= \dfrac{\Sigma q_n p_o}{\Sigma q_o p_o}$ (١٥)

وهذا يسمى أحياناً برقم لاسبيرز القياسى للكميات

الرقم القياسى التجميعى المرجح باستخدام أسعار سنة المقارنة كأوزان $= \dfrac{\Sigma q_n p_n}{\Sigma q_o p_n}$ (١٦)

وهذا يسمى أحياناً برنم باش القياسى للكميات .

فى هذه الصيغ الأوزان المستخدمة هى الأسعار . وعلى أية حال ، فإنه يمكن استخدام أى أوزان أخرى ملائمة بدلا من الأسعار . الصيغ من (٨) إلى (١٣) يمكن كذلك تعديلها بنفس الأسلوب .

الأرقام القياسية للقيم :

كما حصلنا بالضبط على صيغ الأرقام القياسية للأسعار والقيم ، فإنه يمكن أن نحصل على صيغ للأرقام القياسية للقيم . وأبسط هذه الأرقام هو

الرقم القياسى للقيمة $= \dfrac{\Sigma p_n q_n}{\Sigma p_o q_o}$ (١٧)

حيث $\Sigma p_o q_o =$ القيمة الإجمالية لجميع السلع فى فترة الأساس

$\Sigma p_n q_n =$ القيمة الإجمالية لجميع السلع فى فترة المقارنة .

وهذا رقم قياسى تجميعى بسيط ، حيث أن القيم لم ترجح . ويمكن صياغة صيغ أخرى حيث نستخدم الأوزان للدلالة على الأهمية النسبية للعناصر

تغيير فترة الأساس للارقام القياسية :

من الناحية العملية من المستحب أن تكون فترة الأساس المستخدمة للمقارنة هى فترة ثبات اقتصادى وليست على مسافة زمنية بعيدة فى الماضى . بهذا قد يكون ضرورياً من فترة إلى أخرى تغيير فترة الأساس .

أحد الحلول هو إعادة حساب جميع الأرقام القياسية باستخدام فترة الأساس الجديدة . كطريقة تقريبية مبسطة نقوم بقسمة جميع الأرقام القياسية للسنوات المختلفة المقابلة لفترة الأساس القديمة على الرقم القياسى .

المقابل لفترة الأساس الجديدة ، والتعبير عن النتيجة كنسبة مئوية . هذه النتائج تمثل الأرقام القياسية الجديدة . والرقم القياسى لفترة الأساس الجديدة يصبح 100 % كما يجب أن يكون .

ومن الناحية الرياضية ، فإن هذه الطريقة قابلة للتطبيق فقط فى حالة ما إذا كانت الأرقام القياسية تحقق اختبار الدائرية (أنظر المسألة ١٧ – ٣٧) . وعلى أية حال ، فإنه من حسن الحظ أن كثيراً من أنواع الأرقام القياسية تعطى أساليبها نتائج لها من الناحية العملية قريبة بدرجة كافية مما يجب أن نحصل عليه من الناحية النظرية

الانكماش فى السلاسل الزمنية :

على الرغم من أن دخول الأفراد قد ترتفع من الناحية النظرية خلال فترة من السنوات ، إلا أن دخولهم الحقيقية قد تنخفض من الناحية الفعلية وذلك نظراً لارتفاع تكلفة المعيشة وبالتالى انخفاض القوة الشرائية . ونحصل على الدخول الحقيقية وذلك بقسمة الدخول المادية أو الظاهرة للسنوات المختلفة على الرقم القياسى لتكلفة المعيشة أو الأرقام القياسية للمستهلك للسنوات ، باستخدام فترة أساس ملائمة .

على سبيل ، إذا كان دخول الفرد 1960 هو %150 من دخله 1950 (أى زاد بنسبة %50) بينما الرقم القياسى لتكلفة المعيشة تضاعف فى خلال نفس الفترة ، فإن دخل الفرد الحقيقى سنة 1960 هو %75 = 2 / 150 مما كان عليه 1950 .

شرحنا سالفاً عملية « إنقاص » السلسلة الزمنية المتضمنة دخولا . ويمكن استخدام عمليات مماثلة لإنقاص السلاسل الزمنية الأخرى . ففى الفصل السادس عشر ، على سبيل المثال ، استخدمنا أسلوباً مشابهاً فى تخليص البيانات من أثر الموسم باستخدام الدليل الموسمى .

ومن الناحية الرياضية ، فإن هذه الطريقة المستخدمة فى تخليص السلسلة الزمنية من أثر الانكماش تكون قابلة للتطبيق بالضبط فقط إذا كانت الأرقام القياسية تحقق اختبار الانعكاس فى المعامل ، ولهذا السبب فإن رقم فيشر المثالى يعد مناسباً ، وعلى أية حال فإنه يمكن استخدام أرقام قياسية أخرى مما أنها تعطى نتائج تعد صحيحة لأغلب الأغراض العملية .

مسائل محلولة

مناسيب الأسعار :

١٧ - ١ متوسط أسعار التجزئة بالدولار للطن من الفحم البتيومونى المباع فى بلد معين خلال السنوات 1958 — 1953 موضح بالجدول ١٧ - ١ (أ) باستخدام 1953 كأساس ، أوجد مناسيب الأسعار المقابلة للسنوات 1956 و 1958 .
(ب) باستخدام 1956 كأساس ، أوجد منسوب السعر المقابل لجميع السنوات المعطاة (ت) باستخدام 1955 — 1953 كأساس ، أوجه منسوب السعر لجميع السنوات المعطاة .

السنة	1953	1954	1955	1956	1957	1958
متوسط سعر التجزئة للفحم البتيومونى (بالدولارات للطن)	14·95	14·94	15·10	15·65	16·28	16·53

الحل :

(أ) منسوب السعر لسنة 1956 باستخدام سنة 1953 كأساس

$$p_{1953|1956} = \frac{\text{السعر فى } 1956}{\text{السعر فى } 1953} = \frac{15.65}{14.95} = 1.047 \quad 104.7\%$$

منسوب السعر لسنة 1958 باستخدام سنة 1953 كأساس

$$p_{1953|1958} = \frac{\text{السعر فى } 1958}{\text{السعر فى } 1953} = \frac{16.53}{14.95} = 0.106 \quad 110.6\% .$$

فى الدراسات الإحصائية من المعتاد حذف علامة % عند ذكر الأرقام القياسية ، على أساس أن هذه العلامات مفهومة . بهذا التسهيل فإن المناسيب السابقة تكتب 104.7 و 110.6 على الترتيب .

(ب) بقسمة كل من أسعار التجزئة بالجدول ١٧ - ١ على 15.65 (دولار) ، السعر لسنة 1956 . فإن مناسيب الأسعار معبراً عنها بنسب مئوية هى كما هو موضح بالجدول ١٧ - ٢ .

جـدول ١٧ – ٢

السنة	1953	1954	1955	1956	1957	1958
منسوب السعر (1956 = 100)	95·5	95·5	96·5	100·0	104·0	105·6

وهذه تمثل الأرقام القياسية لأسعار التجزئة للفحم البتيوموني في السنوات 1958 — 1953 وتسمى المجموعة كلها بسلسلة الأرقام القياسية . لاحظ أن منسوب السعر (أو الرقم القياسي للسعر) المقابل لسنة 1956 في صيغة نسبة مئوية يساوي 100.0 كما هو دائماً صحيح لفترة الأساس . وهذه يعبر عنها في الدراسات الإحصائية بالرمز 100 = 1956 .

(ج) الوسط الحسابي لأسعار السنوات 1000 = 1956 $= \$15{\cdot}00 = \dfrac{\$14{\cdot}95 + \$14{\cdot}94 + \$15{\cdot}10}{3}$

بقسمة كل من أسعار التجزئة بالجدول ١٧ – ١ على متوسط سعر فترة الأساس وهو 15.00 $ فإن مناسيب الأسعار المطلوبة معبراً عنها كنسبة مئوية موضحة بالجدول ١٧ – ٣ .

جـدول ١٧ – ٣

السنة	1953	1954	1955	1956	1957	1958
منسوب السعر 1953 = 100	99·7	99·6	100·7	104·3	108·5	110·2

وهذه تمثل الأرقام القياسية لأسعار التجزئة للفحم البتيوموني للسنوات 1958 — 1953 باستخدام 1955 — 1953 كفترة أساس . لاحظ أن الوسط الحسابي للأرقام القياسية المقابل لفترة الأساس 1955 - 1953 هو $(99{\cdot}7 - 99{\cdot}6 + 100{\cdot}7)/3 = 100{\cdot}0$ ، كما هو صحيح دائماً بالنسبة لفترة الأساس . وهذه يرمز لها في الدراسات الإحصائية بالصيغة 100 = 1955 — 1953 .

١٧ – ٢ أثبت أن (أ) $p_{a|b}\,p_{b|c} = p_{a|c}$ (ب) $p_{a|b}\,p_{b|a} = 1$

الحـل :

(أ) بالتعريف $p_{a|b}\,p_{b|c} = \dfrac{p_b}{p_a}\cdot\dfrac{p_c}{p_b} = \dfrac{p_c}{p_a} = p_{a|c}.$

(ب) بالتعريف $p_{a|b}\,p_{b|a} = \dfrac{p_b}{p_a}\cdot\dfrac{p_a}{p_b} = 1.$

١٧ – ٣ باستخدام الجدول ١٧ – ٣ بالمسألة ١٧ – ١ (ج) حيث 1955 — 1953 أساس ، أوجد مناسيب الأسعار بأخذ 1956 كأساس .

الحـل :

اقسم كل منسوب سعر بالجدول ١٧ – ٣ على منسوب السعر 104.3 المقابل لسنة 1956 . الأرقام الناتجة معبراً عنها كنسب مئوية هي مناسيب السعر المطلوبة وهي معطاة ، بها بعض من أخطاء التقريب ، بالجدول ١٧ – ٢ بالمسألة ١٧ – ٢ (ب) .

هذا المثال يوضح أنه إذا كان لدينا سلسلة من الأرقام القياسية مقابلة لفترة أساس معينة ، فإنه يمكن أن نحصل على سلسلة من الأرقام القياسية المقابلة لفترة أساس أخرى بدون استخدام بيانات الأسعار الأصلية . وهذه العملية تسمى بتغيير فترة الأساس . لإثبات الطريقة المستخدمة هنا (أنظر المسألة ١٧ – ٣٦)

١٧ - ٤ فى 1956 كان متوسط سعر سلعة أكبر بنسبة 20% منه عن 1955 وأقل بنسبة 20% عن 1954 وأكبر بنسبة 50% عن 1957 اختصر البيانات إلى مناسيب أسعار مستخدماً كسنة أساس (أ) 1955 ، (ب) 1956 ، (جـ) 1955 — 1954

الحـل :

(أ) بأخذ 1955 أساس ، فإن منسوب السعر (أو الرقم القياسى) المقابل لها هو 100 (بالرموز 100 = 1955 أو 100%) .

بما أن السعر سنة 1956 هو 20% أكبر من 1955 فإن منسوب السعر المقابل لسنة 1956 هو 120 = 20 + 100 أى ، السعر سنة 1956 هو 120% من السعر سنة 1955 .

بما أن السعر سنة 1956 هو 20% أقل من 1954 فيجب أن يكون 80% = 20 — 100 من سعر 1954 بهذا فان سعر 1954 هو 125% = 5/4 = 1/0.80 من السعر 1956 ، أى ، منسوب سعر 1954 يساوى 125% من منسوب سعر 1956 أى 125% من 120 يساوى 150 .

بما أن السعر سنة 1956 هو 50% أكبر من 1957 ، فيجب أن يكون 150% = 50 + 100 من سعر 1957 بهذا فإن سعر 1957 هو $\frac{2}{3}$ = 1/1.50 من سعر 1956 ، أى منسوب سعر 1957 من منسوب سعر 1956 أى $\frac{2}{3}$ من 120 يساوى 80 .

بهذا فإن مناسيب الأسعار المطلوبة هى كما فى الجدول ١٧ - ٤ .

جـدول ١٧ - ٤

السنة	1954	1955	1956	1957
منسوب السعر (1955 = 100)	150	100	120	80

(ب) باستخدام طريقة تغير فترة الأساس المعطاة بالمسألة ١٧ - ٣ . نقسم كل منسوب سعر بالجدول ١٧ - ٤ على 120 (منسوب السعر المقابل لسنة الأساس الجديدة 1956) ونعبر عن النتيجة كنسبة مئوية . بهذا فإن مناسيب السعر المطلوبة باستخدام سنة الأساس 1956 هى كما هو موضح بالجدول ١٧ - ٥ .

جـدول ١٧ - ٥

السنة	1954	1955	1956	1957
منسوب السعر (1956 = 100)	125	83.3	100	56.7

ويمكن الحـل مباشرة باستخدام الأسلوب المستخدم بالجزء (أ) ، باختيار 100 = 1956 .

(جـ) **الطريقة الأولى :** ، باستخدام الجزء (أ)

من الجدول ١٧-٤ ، الوسط الحسابى لمناسيب الأسعار لسنة 1954 وسنة 1955 وهو 125 = (150+100) ½ إذن بقسمة كل منسوب سعر بالجدول ١٧ - ٤ على 125 ، نحصل على مناسيب الأسعار المطلوبة كما هى موضحة بالجدول ١٧ - ٦ .

جـدول ١٧ – ٦

السـنة	1954	1955	1956	1957
منسوب السـعر (1954—1955=100	120	80	96	64

الطريقة الثانية : ، باستخدام الجزء (ب)

من الجدول ١٧–٤ ، الوسط الحسابي لمناسيب الأسعار لسنة **1954** وسنة **1955** هو 104.2=(125+83.3)½
إذن بقسمة كل منسوب سعر بالجدول ١٧ – ٥ على **104.2** ، نحصل على نفس نتائج الطريقة الأولى .

مناسيب الكمية أو الحجم :

١٧ – ٥ الجدول ١٧ – ٧ يوضح بيانات انتاج القمح ، فى أحد البلاد ، بملايين اللترات للسنوات **1958 - 1950**
اختصر البيانات إلى مناسيب كميات مستخدما كأساس (أ) **1955** (ب) **1953 — 1950**

جـدول ١٧ – ٧

السـنة	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958
إنتـاج القمـح (بملايين اللترات)	1019	988	1306	1173	984	935	1004	951	1462

الحـل :

(أ) بقسمة أرقام الانتاج فى كل سنة على 935 (رقم الإنتاج فى سنة الأساس) ، فإن مناسيب الكمية المطلوبة (أو الأرقام القياسية للكميات) للسنوات المختلفة معبراً عنها كنسب مئوية موضحة بالجدول ١٧ – ٨ .

جـدول ١٧ – ٨

السـنة	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958
منسوب الكمية (1955=100)	109·0	105·7	139·7	125·5	105·2	100·0	107·4	101·7	156·4

(ب) الوسط الحسابى للإنتاج للسنوات **1953 - 1950** هو (٤٠)

بقسمة رقم الإنتاج فى كل سنة على **1122** ، فإن مناسيب الكمية المطلوبة معبراً عنها كنسب مئوية هى كما هو موضح بالجدول ١٧ – ٩

جـدول ١٧ – ٩

السـنة	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958
منسوب الكمية (1950 - 1953=100)	90·8	88·1	116·4	104·5	87·7	83·3	89·5	84·8	130·3

١٧ – ٦ إذا كان منسوب الكمية لسنة **1958** باستخدام سنة **1949** كأساس هو **105** ، بينما منسوب الكمية لسنة **1958** باستخدام **1953** كأساس هو **140** . أوجد منسوب الكمية لسنة **1953** مستخدماً **1949** كأساس .

الحــل :

الطريقة الاولى :

من خصائص مناسيب الكية فإن

$$q_{a|b}\, q_{b|c} = q_{a|c}$$

اعتبر $a = 1949,\ b = 1953,\ c = 1958$ إذن

$$q_{1949|1953} = q_{1949|1958}\, q_{1958|1953} = (1{\cdot}05)(1/1{\cdot}40) = 0{\cdot}75 = 75\%$$

ومنسوب الكية المطلوب هو 75

الطريقة الثانية :

اعتبر q_{1949} تعبر عن الكيات الفعلية لسنة 1949 ، q_{1953} لسنة 1953 و q_{1958} لسنة 1958 إذن

منسوب الكية لسنة 1958 باستخدام سنة 1949 كأساس $= \dfrac{q_{1958}}{q_{1949}} = 105\% = 1{\cdot}05$

منسوب الكية لسنة 1958 باستخدام سنة 1953 كأساس $= \dfrac{q_{1958}}{q_{1953}} = 140\% = 1{\cdot}40$

بهذا فإن منسوب الكية لسنة 1953 حيث 1949 هى سنة الأساس يكون

$$\frac{q_{1953}}{q_{1949}} = \frac{q_{1953}/q_{1958}}{q_{1949}/q_{1958}} = \frac{1/1{\cdot}40}{1/1{\cdot}05} = \frac{1{\cdot}05}{1{\cdot}40} = 75\%$$

الطريقة الثالثة :

بما أن $l_{1958} = 1{\cdot}05 q_{1949} = 1{\cdot}40 q_{1953}$ ومن $\dfrac{q_{1953}}{q_{1949}} = \dfrac{1{\cdot}05}{1{\cdot}40} = 75\%$ بهذا فإن منسوب الكية هو 75 .

مناسيب القيمة :

١٧ – ٧ فى يناير 1960 كان مجموع قائمة الأجور بمصنع به 120 عاملا هو 000 40 $. فى يوليو من نفس العام أضيف 30 عاملا إلى قائمة الأجور ودفع المصنع 6000 $ أكثر مما دفع فى يناير . باستخدام يناير 1960 كأساس . أوجد (أ) الرقم القياسى للعمالة (منسوب الكية) لشهر يوليو ، (ب) الرقم القياسى لتكلفة العمالة (منسوب قيمة) لشهر يوليو (جـ) باستخدام النتيجة منسوب السعر × منسوب الكية = منسوب القيمة ، ماهو التفسير الممكن إعطاءه لمنسوب السعر فى هذه المسألة ؟

الحــل :

(أ) منسوب الكية = الرقم القياسى للعمالة $\dfrac{120 + 30}{120} = 1{\cdot}25 = 125\%$ or 125

(ب) منسوب القيمة = الرقم القياسى لتكلفة العمالة $\dfrac{\$40\,000 + \$6000}{\$40\,000} = 1{\cdot}15 = 115\%$ or 115

(جـ) منسوب السعر = $\dfrac{\text{منسوب القيمة}}{\text{منوب الكية}}$ $= \dfrac{115}{125} = 0{\cdot}92 = 92\%$ or 92

يمكن تفسير هذا كرقم قياسى لتكلفة العامل . هذا يوضح أنه فى يوليو 1960 كانت التكلفة للعامل 92% فى فترة الأساس يناير 1960 . ويسمى هذا أحياناً بالرقم القياسى لتكلفة العمل .

١٧ – ٨ شركة تتوقع أن تزيد مبيعاتها من سلعة بنسبة 50% فى السنة القادمة . ماهى النسبة المئوية التى يجب أن يزاد بها سعر البيع حتى يضاعف الدخل الإجمالى ؟

الحـل :

منسوب السعر × منسوب الكمية = منسوب القيمة

أو منسوب السعر × 150% = 200%

إذن منسوب السعر = $200/150 = 4/3 = 133\frac{1}{3}\%$ بحيث يجب أن تزيد سعر البيع بنسبة $133\frac{1}{3}-100=33\frac{1}{3}\%$

سلسلة المناسيب ووصلة المناسيب :

١٧ – ٩ وصلة المناسيب لأسعار السنوات 1956 – 1960 هى 175 ، 120 ، 135 ، 150 ، 125 على الترتيب
(أ) أوجد منسوب السعر لسنة 1957 حيث 1955 سنة الأساس (ب) سلسل وصلة المناسيب إلى 1956 كأساس .

الحـل :

$$p_{1955|1956} = 1.25,\quad p_{1956|1957} = 1.20,\quad p_{1957|1958} = 1.35,\quad p_{1958|1959} = 1.50,\quad p_{1959|1960} = 1.75$$

(أ)
$$p_{1955|1957} = p_{1955|1956}\, p_{1956|1957} = (1.25)(1.20) = 1.50 = 150\%$$

(ب)
$$p_{1956|1955} = \frac{1}{p_{1955|1956}} = \frac{1}{1.25} = 80\%$$

$$p_{1956|1956} = 100\% \qquad p_{1956|1957} = 120\%$$

$$p_{1956|1958} = p_{1956|1957}\, p_{1957|1958} = (1.20)(1.35) = 1.62 = 162\%$$

$$p_{1956|1959} = p_{1956|1957}\, p_{1957|1958}\, p_{1958|1959} = (1.20)(1.35)(1.50) = 2.43 = 243\%$$

$$p_{1956|1960} = p_{1956|1957}\, p_{1957|1958}\, p_{1958|1959}\, p_{1959|1960} = (1.20)(1.35)(1.50)(1.75) = 425\%$$

الأرقام القياسية . الطريقة التجميعية البسيطة :

١٧ – ١٠ الجدول ١٧ – ١٠ يوضح متوسط أسعار الجملة فى بلد والانتاج من الألبان ، والزبد والجبن للسنوات 1958 ، 1950 ، 1949 . احسب رقم قياسى تجميعى بسيط للأسعار الجملة لمنتجات هذه الألبان لسنة 1958 مستخدماً كأساس (أ) 1949 (ب) 1950 – 1949 .

جـدول ١٧ – ١٠

الأسعار (لكل كيلوجرام)

	1958	1950	1949
لبن	4·13	3·89	3·95
زبـد	59·7	62·2	61·5
جبن	38·9	35·4	34·8

الكميات المنتجة
(ملايين الكيلوجرامات)

1958	1950	1949
10436	9717	9675
115·5	115·5	117·7
82·70	74·39	77·93

الحـــل :

(أ) الرقم القياسى التجميعى البسيط للأسعار $= \dfrac{\Sigma p_n}{\Sigma p_o} = \dfrac{\text{مجموع أسعار سنة المقـــارنة (1958)}}{\text{مجموع أسعـــــار سـنة الأســاس (1949)}}$

$$= \frac{4{\cdot}13 + 59{\cdot}7 + 38{\cdot}9}{3{\cdot}95 + 61{\cdot}5 + 34{\cdot}8} = 102{\cdot}5(\%)$$

أى أن متوسط أسعار الجملة فى 1958 هى 102.5% من تلك فى 1949 أو (2.5% أعلى) .

(ب) متوسط (وسط حسابى) أسعار اللبن فى فترة الأساس 1950 - 1949 $= \frac{1}{2}(3{\cdot}95 + 3{\cdot}89) = 3{\cdot}92$

متوسط (وسط حسابى) أسعار الزبد فى فترة الأساس 1950 - 1949 $= \frac{1}{2}(61{\cdot}5 + 62{\cdot}2) = 61{\cdot}85$

متوسط (وسط حسابى) أسعار الجبن فى فترة الأساس 1950 - 1949 $= \frac{1}{2}(34{\cdot}8 + 35{\cdot}4) = 35{\cdot}1$

الرقم القياسى التجميعى البسيط للأسعار $= \dfrac{\Sigma p_n}{\Sigma p_o} = \dfrac{\text{مجموع أسعار سنة المقـــارنة (1958)}}{\text{مجموع أسعار سنة الأساس (1950 - 1949)}}$

$$= \frac{4{\cdot}13 + 59{\cdot}7 + 38{\cdot}9}{3{\cdot}92 + 61{\cdot}85 + 35{\cdot}1} = 101{\cdot}8(\%)$$

لاحظ أن هذه الطريقة لم تستخدم الكميات المنتجة ولكن استخدمت فقط أسعار السلع .

لهدف الإيضاح ، استخدمنا فقط ثلاث سلع لحساب الرقم القياسى . فى التطبيق الفعلى يجب أن ندخل عددا أكبر من السلع .

١٧ - ١١ وضح السبب فى أن الأرقام القياسية التى حصلت عليها فى المسألة ١٧ - ١٠ قد تكون مقاييس غير ملاءمة للتغير فى السعر للسلع المذكورة .

الحـــل :

الرقم القياسى المحسوب بالمسألة ١٧ - ١٠ لم يؤخذ فى الاعتبار الأهمية النسبية للسلع كما يجب تحديدها ، على سبيل المثال ، من مدى استخدامها بواسطة المستهلك أو كمية الإنتاج المخصصة لأهداف الاستهلاك . هذه الاعتبارات سوف تراعى فى المسائل التالية .

١٧ - ١١ الجدول ١٧-١١ يوضح متوسط أسعار التجزئة والانتاج من فحم الانتراسيت والبترول خلال السنوات 1949 و 1958 . وضح السبب فى أن رقماً قياسياً تجميعياً بسيطاً للأسعار لسنة 1958 مستخدماً سنة 1949 كأساس يعد مقياساً غير ملائم لتغيرات الأسعار فى السلع المعطاة .

جـــدول ١٧ - ١١

	الكميات 1958	الكميات 1949	الأسعار 1958	الأسعار 1949
فحم الأنتراسيت	1.821 مليون طن	3.559 مليون طن	\$28.20 للطـــن	\$20.13 للطـــن
البترول	118.6 * مليون برميـــل	80.2 مليون برميـــل	21.4c لـكل لـــتر	20.3c لـكل لـــتر

* كل برميل يحتوى على 159 لتر

الحــل :

إذا استخدمنا الرقم القياسي التجميعي البسيط للأسعار فإن النتيجة هي

$$\frac{\Sigma p_n}{\Sigma p_o} = \frac{\text{مجموع الأسعار فى سنة المقارنة 1958}}{\text{مجموع الأسعار فى سنة الأساس 1949}} = \frac{\$28\cdot20 + \$0\cdot214}{\$20\cdot13 + \$0\cdot203} \quad 139\cdot7(\%)$$

مشيراً إلى أن متوسط أسعار التجزئة لهذه السلع فى 1958 أكثر ارتفاعاً بنسبة % 39.7 عنها فى سنة 1949 .

إذا عبرنا عن سعر فحم الانثراسيت بدلالة سنتات لكل kg بدلا من دولارات لكل طن ، فإن السعر فى 1949 هو $\$20.13(1000\text{ kg})=\$2.013c|kg$ بينما السعر فى 1958 هو $\$28.20\ 1000\text{kg})=2.820c|\text{kg}$ فى هذه الحالة فإن الرقم القياسي التجميعي البسيط هو

$$\frac{\Sigma p_n}{\Sigma p_o} = \frac{2\cdot820¢ + 21\cdot4¢}{2\cdot013¢ + 20\cdot3¢} = 108\cdot5(\%)$$

موضحاً إلى أن متوسط أسعار التجزئة لهذه السلع فى 1958 أكثر ارتفاعاً بنسبة 8.5% عنها فى سنة 1949 .

وبما أن الرقم القياسي التجميعي البسيط شديد التأثر بالوحدات المستخدمة فى تمييز الأسعار . فمن الواضح أنه مقياس غير ملائم فى مثل هذه الحالات . هذا مع إضافة العيب الموضح بالمسألة ١٧ – ١١ يعطى أسباباً جيدة فى عدم استخدام هذا الرقم فى التطبيق .

الملاحظة التى أبديت فى نهاية المسألة ١٧ – ١٠ تنطبق كذلك على هذه المسألة .

الوسط المرجح للمناسيب :

١٧ – ١٣ استخدم طريقة الوسط البسيط للمناسيب (الوسط الحسابى) لحساب الرقم القياسي لأسعار الجملة لمنتجات الألبان بالمسألة ١٧ – ١٠ لسنة 1958 مستخدماً (أ) 1949 (ب) 1950 - 1949 كأساس

الحــل :

(أ) مناسيب السعر لكل من اللبن ، الزبد والجبن فى 1958 باستخدام سنة 1949 كأساس هى مايلى

$$\text{منسوب سعر اللبن} = \frac{\text{سعر اللبن فى 1958}}{\text{سعر اللبن فى 1949}} = \frac{4\cdot13}{3\cdot95} = 104\cdot6(\%)$$

$$\text{منسوب سعر الزبد} = \frac{\text{سعر الزبد فى 1958}}{\text{سعر الزبد فى 1949}} = \frac{59\cdot7}{61\cdot5} = 97\cdot1(\%)$$

$$\text{منسوب سعر الجبن} = \frac{\text{سعر الجبن فى 1958}}{\text{سعر الجبن فى 1949}} = \frac{38\cdot9}{34\cdot8} = 111\cdot8(\%)$$

متوسط (الوسط الحسابى) لمناسيب الأسعار $= 104\cdot5(\%)$ $\dfrac{\Sigma p_n/p_o}{N} = \dfrac{104\cdot6 + 97\cdot1 + 111\cdot8}{3}$

(ب) بالرجوع إلى المسألة ١٧–١٠ (ب) ، مناسيب السعر فى 1958 باستخدام 1950 - 1949 كأساس هى

$$\text{منسوب سعر اللبن} = \frac{\text{سعر اللبن فى 1958}}{\text{سعر اللبن فى 50 - 1949}} = \frac{4\cdot13}{3\cdot92} = 105\cdot4(\%)$$

$$\text{منسوب سعر الزبد} = \frac{\text{سعر الزبد فى } 1958}{\text{سعر الزبد فى } 50-1949} = \frac{59.7}{61.85} = 96.5(\%)$$

$$\text{منسوب سعر الجبن} = \frac{\text{سعر الجبن فى } 1958}{\text{سعر الجبن فى } 50-1949} = \frac{38.9}{35.1} = 110.8(\%)$$

$$\text{متوسط (الوسط الحسابى) لمناسيب الأسعار} = \frac{\Sigma p_n/p_o}{N} = \frac{105.4 + 96.5 + 110.8}{3} = 104.2(\%).$$

١٧ – ١٤ حل المسألة ١٧ – ١٣ إذا استخدم الوسيط بدلا من الوسط الحسابى .

الحـل :

(أ) الرقم القياسى المطلوب = وسيط مناسيب السعر 111.8 ، 97.1 ، 104.6 ويساوى 104.6 .

(ب) الرقم القياسى المطلوب = وسيط مناسيب السعر 110.8 ، 96.5 ، 105.4 ويساوى 105.4 .

١٧ – ١٥ حل المسألة ١٧ – ١٣ إذا استخدم الوسط الهندسى بدلا من الوسط الحسابى .

الحـل :

(أ) الرقم القياسى المطلوب = الوسط الهندسى لمناسيب السعر 111.8 ، 97.1 ، 104.6

$$= \sqrt[3]{(104.6)(97.1)(111.8)} = 104.3$$ باستخدام الوغاريتمات

(ب) الرقم القياسى المطلوب = الوسط الهندسى لمناسيب السعر 110.8 ، 96.5 ، 105.4

$$= \sqrt[3]{(105.4)(96.5)(110.8)} = 104.1$$ باستخدام الوغاريتمات .

١٧ – ١٦ استخدم الوسط البسيط (الوسط الحسابى) لمناسيب الأسعار للحصول على الرقم القياسى لأسعار التجزئة للسلع الموضحة بالمسألة ١٧ – ١٢ باستخدام 1949 كسنة أساس و 1958 كسنة مقارنة .

الحـل :

$$\text{منسوب السعر للفحم} = \frac{\text{سعر الفحم فى } 1958}{\text{سعر الفحم فى } 1949} = \frac{\$28.20}{\$20.13} = 140.1(\%)$$

$$\text{منسوب السعر للبترول} = \frac{\text{سعر البترول فى } 1958}{\text{سعر البترول فى } 1949} = \frac{21.4¢}{20.3¢} = 105.4(\%)$$

$$\text{المتوسط البسيط (الوسط الحسابى) لمناسيب الأسعار} = \frac{\Sigma p_n/p_o}{N} = \frac{140.1 + 105.4}{2} = 122.8.$$

لاحظ أن النتيجة لاتعتمد على الوحدات المستخدمة فى تمييز الأسعار (قارن بالمسألة ١٧ – ١٢) .

١٧ – ١٧ حل المسألة ١٧ – ١٦ إذا استخدم الوسط الهندسى .

الحـل :

الرقم القياسى المطلوب = الوسط الهندسى لمناسيب السعر 140.1 و 105.4

$$\sqrt{(140.1)(105.4)} = 121.5$$

الطريقة التجميعية ، رقمى لاسبيرز وباش :

١٧ – ١٨ باستخدام بيانات المسألة ١٧ – ١٠ احسب رقم لاسبيرز القياسى للسعر لسنة 1958 باستخدام (أ) 1949 (ب) 1950 – 1949 كأساس .

الحـل :

(أ) رقم لاسبيرز = الرقم القياسى التجميعى المرجح للأسعار باستخدام كميات فترة الأساس كأوزان

$$\frac{\Sigma p_n q_o}{\Sigma p_o q_o} = \frac{\Sigma(\text{الأسعار فى 1959})(\text{الكميات فى 1949})}{\Sigma(\text{الأسعار فى 1949})(\text{الكميات فى 1949})}$$

$$= \frac{(4{\cdot}13)(9675) + (59{\cdot}7)(117{\cdot}7) + (38{\cdot}9)(77{\cdot}93)}{(3{\cdot}95)(9675) + (61{\cdot}5)(117{\cdot}7) + (34{\cdot}8)(77{\cdot}93)} = 103{\cdot}84, \text{ or } 103{\cdot}8(\%)$$

(ب) متوسط كميات اللبن والزبد والجبن المنتجة فى 1950 – 1949 هى على الترتيب .

$\frac{1}{2}(9675 + 9717) = 9696$, $\frac{1}{2}(117{\cdot}7 + 115{\cdot}5) = 116{\cdot}6$ and $\frac{1}{2}(77{\cdot}93 + 74{\cdot}39) = 76{\cdot}16$

متوسط الأسعار فى 1950 – 1949 موضح بالمسألة ١٧ – ١٠ .

$$\text{رقم لاسبيرز} = \frac{\Sigma p_n q_o}{\Sigma p_o q_o} = \frac{\Sigma(\text{الأسعار فى 1958})(\text{متوسط الكميات فى 50 – 1949})}{\Sigma(\text{الأسعار فى 50 – 1949})(\text{متوسط الكميات فى 50 – 1949})}$$

$$= \frac{(4{\cdot}13)(9696) + (59{\cdot}7)(116{\cdot}6) + (38{\cdot}9)(76{\cdot}16)}{(3{\cdot}92)(9696) + (61{\cdot}85)(116{\cdot}6) + (35{\cdot}1)(76{\cdot}16)} = 104{\cdot}33, \text{ or } 104{\cdot}3(\%)$$

١٧ – ١٩ باستخدام بيانات المسألة ١٧ – ١٠ احسب رقم باش للأسعار لسنة 1958 باستخدام (أ) 1949 (ب) 1950 – 1949 كأساس .

الحـل :

(أ) رقم باش = الرقم القياسى التجميعى المرجح للأسعار باستخدام كميات سنة المقارنة كأوزان .

$$= \frac{\Sigma p_n q_n}{\Sigma p_o q_o} = \frac{\Sigma(\text{الأسعار فى 1958})(\text{الكميات فى 1958})}{\Sigma(\text{الأسعار فى 1949})(\text{الكميات فى 1958})}$$

$$= \frac{(4{\cdot}13)(10\,436) + (59{\cdot}7)(115{\cdot}5) + (38{\cdot}9)(82{\cdot}79)}{(3{\cdot}95)(10\,436) + (61{\cdot}5)(115{\cdot}5) + (34{\cdot}8)(82{\cdot}79)} = 103{\cdot}93, \text{ or } 103{\cdot}9(\%).$$

(ب)

$$\text{رقم باش} = \frac{\Sigma p_n q_n}{\Sigma p_o q_n} = \frac{\Sigma(\text{الأسعار فى 1958})(\text{الكميات فى 1958})}{\Sigma(\text{الأسعار فى 50 – 1949})(\text{الكميات فى 1958})}$$

$$= \frac{(4{\cdot}13)(10\,436) + (59{\cdot}7)(115{\cdot}5) + (38{\cdot}9)(82{\cdot}79)}{(3{\cdot}92)(10\,436) + (61{\cdot}85)(115{\cdot}5) + (35{\cdot}1)(82{\cdot}79)} = 104{\cdot}43 \text{ or } 104{\cdot}4(\%).$$

١٧ – ٢٠ أوجد الأرقام القياسية لكل من (أ) لاسبيرز (ب) باش باستخدام بيانات المسألة ١٧ – ١٢ (جـ) أذكر ميزة رقم لاسبيرز على رقم باش فى حالة ما إذا كان الرقم القياسى يراجع من سنة الأخرى

الحـــل :

(أ) رقم لاسبيرز $= \dfrac{\Sigma p_n q_o}{\Sigma p_o q_o} = \dfrac{\text{(الكميات فى 1949) (الأسعار فى 1958)}}{\text{(الكميات فى 1949) (الأسعار فى 1949)}}$

$$\frac{\text{(\$28.20 لكل طن) (3.559 مليون طن) + (\$0.214 لكل لتر) (159 × 80.2 مليون لتر)}}{\text{(\$20.13 لكل طن) (3.559 مليون طن) + (\$0.203 لكل لتر) (159 × 80.2 مليون لتر)}}$$

$$\frac{\text{2829.25 مليون دولار}}{\text{2660.26 مليون دولار}} = 106.4\ \%\ \text{أو}\ 106.35$$

لاحظ أنه من المهم جداً أن تكون الوحدات المستخدمة صحيحة ومتسقة .

(ب) رقم باش $= \dfrac{\Sigma p_n q_n}{\Sigma p_o q_n} = \dfrac{\Sigma\ \text{(الكميات فى 1958) (الأسعار فى 1958)}}{\Sigma\ \text{(الكميات فى 1958) (الأسعار فى 1949)}}$

$$\frac{\text{(\$28.20 لكل طن) (1.821 مليون طن) + (\$0.214 لكل لتر) (159 × 118.6 مليون لتر)}}{\text{(\$20.13 لكل طن) (1.821 مليون طن) + (\$0.203 لكل لتر) (159 × 118.6 مليون لتر)}}$$

$$\frac{\text{4086.84 مليون دولار}}{\text{3864.71 مليون دولار}} = 105.7\ \%\ \text{أو}\ 105.747$$

من الناحية العملية ، عندما يحسب الرقم القياسى ، لعدد كبير من السلع ، فإنه ينصح بترتيب الحسابات فى صورة جدول ملائم (أنظر المسألة المسألة ١٧ - ٣١ ، على سبيل المثال) .

(جـ) فى حساب رقم لاسبيرز ، فإن الأوزان (الكميات المنتجة أو المستهلكة فى سنة الأساس ، إذا كنا نحسب الرقم القياسى للسعر) لا تتغير من سنة لأخرى أى أننا نحتاج إلى المعلومات الخاصة بآخر الأسعار .

فى حساب رقم باش ، فإن آخر المعلومات عن الأوزان (الكميات) وكذلك الأسعار يجب الحصول عليها . بهذا فإن حساب رقم باش يتضمن مجهود أكبر فى تجميع البيانات .

١٧-٢١ أعط تفسيراً لكل من (أ) رقم لاسبيرز للأسعار (ب) رقم باش للأسعار ، بدلالة القيمة الإجمالية (أو التكلفة الإجمالية) للسلع .

الحـــل :

(أ) فى حساب رقم لاسبيرز للأسعار ، $\Sigma p_o\, q_o$ تمثل القيمة الإجمالية (أو التكلفة الإجمالية) لمجموعة من البضائع والخدمات أو السلع (تمثل أحياناً سلة السوق) فى سنة أو فترة الأساس . الكمية $\Sigma p_n\, q_o$ تمثل القيمة الإجمالية لنفس سلة السوق فى سنة أو فترة المقارنة . بهذا فإن رقم لاسبيرز للأسعار يفيد فى قياس التكلفة الإجمالية فى أن سنة مقارنة لنفس المجموعة السلعية المشتراه فى سنة الأساس .

(ب) فى حساب رقم باش للأسعار ، $\Sigma p_o\, q_n$ تمثل القيمة الإجمالية (أو التكلفة الأجمالية) للسلع المشتراة فى سنة المقارنة مقومة بأسعار سنة الأساس ، بينما $\Sigma p_n q_n$ تمثل القيمة الإجمالية للسلع المشتراه فى سنة المقارنة مقومة بسعر سنة المقارنة . بهذا فإن رقم باش للأسعار يفيد فى قياس التكلفة الكلية لمجموعة سلعية فى سنة المقارنة بالنسبة إلى ما يمكن أن تتكلفه لو تم الشراء فى سنة الأساس .

١٧-٢٢ يذكر أحياناً أن رقم لاسبيرز للأسعار يميل إلى المغالاة فى تقدير تغيرات السعر بينما رقم باش للأسعار يميل إلى التقليل فى تقدير هذه التغيرات بين سبب يمكن لإثبات صحة هذه العبارة .

الحـــل :

طبقاً للقانون الاقتصادى للعرض ، فإن الناس تميل إلى التقليل من الشراء إذا ارتفعت الأسعار وإلى زيادة الشراء إذا انخفضت الأسعار . وهذا ما يسمى بمرونة الطلب وهو صحيح إذا كانت الحاجة للسلع ليست ضرورية تماماً .

فى حالة رقم لاسبيرز ، $\Sigma p_n q_0$ سيكون إلى حد ما أكبر مما يجب حيث أنه طبقاً لقانون العرض والطلب فإن الأشخاص تميل إلى شراء أقل من السلع التى يرتفع سعرها وأكثر من السلع التى ينخفض سعرها بحيث تكون التكلفة الكلية أقل مما هو متوقع من $\Sigma\ p_n q_0$ بهذا فإن رقم لاسبيرز $\frac{\Sigma p_n q_0}{\Sigma p_0 q_0}$ يميل إلى أن يكون أعلى .

فى حالة رقم باش ، فإن الدور الذى تلعبه كيات سنة الأساس وكيات سنة المقارنة فى رقم لاسبيرز يتم تبادلهما . هذا التبادل يميل إلى جعل رقم باش أقل مما يجب أن يكون عليه .

والسبب السابق لا يتضمن أن رقم لاسبيرز يكون دائماً أعلى من رقم باش ولكن يميل فقط إلى أن يكون أعلى . وفى الناحية العملية فإن رقم لاسبيرز يمكن أن يكون أكبر من، أقل من أو يساوى رقم لاسبيرز (أنظر المسائل ١٧-١٨ و ١٧ - ١٩ حيث رقم لاسبيرز ، فى حقيقته أقل من رقم باش) .

١٧-٢٣ أثبت أن الرقم القياسى التجمعى المرجح للأسعار حيث الأوزان (الكيات) ثابتة يحقق اختبار الدائرية

الحـــل :

اعتبر q_0 تمثل أوزاناً ثابتة ، فإنه لأى فترات c و p و a فإن الأرقام القياسية

$$I_{a|b} = \frac{\Sigma p_b q_0}{\Sigma p_a q_0} \qquad \text{and} \qquad I_{b|c} = \frac{\Sigma p_c q_0}{\Sigma p_b q_0}$$

إذن

$$I_{a|b} I_{b|c} = \frac{\Sigma p_b q_0}{\Sigma p_a q_0} \cdot \frac{\Sigma p_c q_0}{\Sigma p_b q_0} = \frac{\Sigma p_c q_0}{\Sigma p_a q_0} = I_{a|c}$$

والذى يوضح تحقق اختبار الدائرية .

الرقان القياسيان لكل من لاسبيرز وباش لا يحققان اختبار الدائرية .

رقم فيشر المثالى :

١٧-٢٤ أثبت أن رقم فيشر المثالى هو الوسط الهندسى لكل من رقم لاسبيرز ورقم باشر .

الحـــل :

اعتبر أن F تعبر عن رقم فيشرو L رقم لاسبيرزو P رقم باش ، فإن

$$F = \sqrt{\left(\frac{\Sigma p_n q_0}{\Sigma p_0 q_0}\right)\left(\frac{\Sigma p_n q_n}{\Sigma p_0 q_n}\right)} = \sqrt{LP}$$

باستخدام تعريف P ، L . وبما أن $\sqrt{LP}$ هو الوسط الهندسى لكل من P ، L ، فإننا نحصل على النتيجة المطلوبة .

١٧-٢٥ أثبت أن رقم فيشر المثالى يقع بين رقى لاسبيرز وباش .

الحـــل :

هذا ينتج مباشرة من حقيقة أن $F = \sqrt{LP}$ تقع بين P ، L ، نظراً لأن P ، L أرقام موجبة . لاحظ أنه إذا كانت $L = P$ إذن $F = L = P$.

وبما أنه من المسألة ١٧ – ٢٢ ، L تميل إلى التقليل من تقدير تغيرات السعر بينما P تميل إلى المغالاة فى تقديرها ، فإنه ينتج عن ذلك أن F ، والتى تقع بين P و L ، سوف تمدنا بتقدير أحسن من L أو P .

١٧ – ٢٦ أوجد رقم فيشر المثالى للأسعار لمنتجات الألبان بالمسألة ١٧ – ١٠ وذلك لسنة 1958 مستخدماً (أ) 1949 (ب) 1950 – 1949 كسنة أساس .

الحـــل :

(أ) $F = \sqrt{LP} = \sqrt{(103{\cdot}84)(103{\cdot}93)} = 103{\cdot}9$ من المسائل ١٧ – ١٨ (أ) و ١٧ – ١٩ (ب) .

(ب) $F = \sqrt{LP} = \sqrt{(104{\cdot}33)(104{\cdot}43)} = 104{\cdot}4$ من المسائل ١٧ – ١٨ (ب) و ١٧ – ١٩ (ب)

١٧–٢٧ أوجد رقم فيشر المثالى للأسعار لبيانات المسألة ١٧ – ١٢

الحـــل :

من المسألة ١٧ – ٢٠ $F = \sqrt{LP} = \sqrt{(106{\cdot}35)(105{\cdot}75)} = 106{\cdot}0$

لاحظ أن تقريباً جيداً ا $\sqrt{LP}$ عندما تكون P و L متساوين تقريباً تعطى بالصورة $\frac{1}{2}(L+P)$ هذا الوسط الحسابى لكل من P و L يمكن استخدامه كتعريف لرقم قياسى جديد يقع بين P و L .

١٧–٢٨ أثبت أن رقم فيشر المثالى يحقق اختبار الانعكاس فى الزمن .

الحـــل :

اعتبر أن $F_{0|n}$ يرمز إلى رقم فيشر المثالى لسنة المقارنة بالنسبة لسنة أساس ، و $F_{0|n}$ يرمز لرقم فيشر المثالى عندما نضع سنة الأساس بدلا من سنة المقارنة والعكس. بهذا فإن اختبار الانعكاس فى الزمن يتحقق إذا كان $F_{0|n}=1/F_{n|0}$ أو $F_{0|n}\,F_{n|0} = 1$.

بالتعريف $F_{0|n} = \sqrt{\left(\frac{\Sigma p_n q_0}{\Sigma p_0 q_0}\right)\left(\frac{\Sigma p_n q_n}{\Sigma p_0 q_n}\right)}$ إذن $F_{n|0} = \sqrt{\left(\frac{\Sigma p_0 q_n}{\Sigma p_n q_n}\right)\left(\frac{\Sigma p_0 q_0}{\Sigma p_n q_0}\right)}$

$$F_{0|n}F_{n|0} = \sqrt{\left(\frac{\Sigma p_n q_0}{\Sigma p_0 q_0}\right)\left(\frac{\Sigma p_n q_n}{\Sigma p_0 q_n}\right)\left(\frac{\Sigma p_0 q_n}{\Sigma p_n q_n}\right)\left(\frac{\Sigma p_0 q_0}{\Sigma p_n q_0}\right)} = 1$$

رقم مارشال — ادجورث القياسى :

١٧–٢٩ احسب رقم مارشال – أدجورث القياسى للأسعار لبيانات المسألة ١٧ – ١٢

الحـــل :

رقم مارشال – أدجورث = $\frac{\Sigma p_n(q_0 + q_n)}{\Sigma p_0(q_0 + q_n)}$

$$\frac{\Sigma\ (\text{مجموع الكميات فى 1949 و 1958})\ (\text{الأسعار فى سنة 1958})}{\Sigma\ (\text{مجموع الكميات فى 1949 و 1958})\ (\text{الأسعار فى سنة 1949})}$$

$$= \frac{(\$28{\cdot}20)\{(3{\cdot}559 + 1{\cdot}821)(10^6)\} + (\$0{\cdot}214)\{(80{\cdot}2 + 118{\cdot}6)(159 + 10^6)\}}{(\$20{\cdot}13)\{(3{\cdot}559 + 1{\cdot}821)(10^6)\} + (\$0{\cdot}203)\{(80{\cdot}2 + 118{\cdot}6)(159 + 10^6)\}} = \frac{6916{\cdot}0}{6525{\cdot}0} = 105{\cdot}9(\%)$$

لاحظ أن هذا يقع بين رقمى لاسبيرز وباش القياسيين (أنظر المسألة ١٧–٢٠) لإثبات أن هذا دائماً صحيح ، أنظر المسألة ١٧ – ٣٠ .

۱۷–۳۰ (أ) أثبت أنه إذا كان $\frac{X_1}{X_2} < \frac{Y_1}{Y_2}$ إذن $\frac{X_1}{X_2} < \frac{X_1 + Y_1}{X_2 + Y_2} < \frac{Y_1}{Y_2}$ ، حيث X_2 ، X_1 ، Y_2 ، Y_1 أى رقم موجب .

(ب) استخدم النتيجة فى (أ) لإثبات أن الرقم القياسى لمارشال – أدجورث يقع بين رقمى لاسبيرز وباش .

الحـــل :

(أ) إذا كانت $\frac{X_1}{X_2} < \frac{Y_1}{Y_2}$ إذن (١) $X_1 Y_2 < X_2 Y_1$.

بإضافة $X_1 X_2$ إلى الجانبين فى (١) ، نحصل على

$X_1X_2 + X_1Y_2 < X_1X_2 + X_2Y_1$ or $X_1(X_2 + Y_2) < X_2(X_1 + Y_1)$ أو (٢) $\frac{X_1}{X_2} < \frac{X_1 + Y_1}{X_2 + Y_2}$

وذلك بقسمة الطرفين على $X_2(X_2+Y_2)$.

بإضافة $Y_1 Y_2$ إلى الجانبين فى (١) ، نحصل على

$X_1Y_2 + Y_1Y_2 < X_2Y_1 + Y_1Y_2$ or $Y_2(X_1 + Y_1) < Y_1(X_2 + Y_2)$ أو (٣) $\frac{X_1 + Y_1}{X_2 + Y_2} < \frac{Y_1}{Y_2}$

وذلك بقسمة الطرفين على $Y_1 (X_1+Y_1)$.

من (٢) و (٣) نحصل على النتيجة المطلوبة .

(ب) المسألة ١ : رقم لاسبيرز أقل من رقم باش .

اعتبر $X_1 = \Sigma p_n q_o, X_2 = \Sigma p_o q_o, Y_1 = \Sigma p_n q_n, Y_2 = \Sigma p_o q_n$. إذن $\frac{X_1}{X_2} < \frac{Y_1}{Y_2}$ بهذا وباستخدام (أ)

$$\frac{\Sigma p_n q_o}{\Sigma p_o q_o} < \frac{\Sigma p_n q_o + \Sigma p_n q_n}{\Sigma p_o q_o + \Sigma p_o q_n} < \frac{\Sigma p_n q_n}{\Sigma p_o q_n}$$ أو

$$\frac{\Sigma p_n q_o}{\Sigma p_o q_o} < \frac{\Sigma p_n (q_o + q_n)}{\Sigma p_o (q_o + q_n)} < \frac{\Sigma p_n q_n}{\Sigma p_o q_n}$$ أو

رقم باش > رقم مارشال – أدجورث > رقم لاسبيرز

المسألة ٢ : رقم باش أقل من رقم لاسبيرز

اعتبر $X_1 = \Sigma p_n q_n, X_2 = \Sigma p_o q_n, Y_1 = \Sigma p_n q_o, Y_2 = \Sigma p_o q_o$. إذن $\frac{X_1}{X_2} < \frac{Y_1}{Y_2}$ بهذا وباستخدام (أ)

$$\frac{\Sigma p_n q_n}{\Sigma p_o q_n} < \frac{\Sigma p_n q_n + \Sigma p_n q_o}{\Sigma p_o q_n + \Sigma p_o q_o} < \frac{\Sigma p_n q_o}{\Sigma p_o q_o}$$ أو

$$\frac{\Sigma p_n q_n}{\Sigma p_o q_n} < \frac{\Sigma p_n (q_o + q_n)}{\Sigma p_o (q_o + q_n)} < \frac{\Sigma p_n q_n}{\Sigma p_o q_n}$$ أو

رقم لاسبيرز > رقم مارشال – أدجورث > رقم باش

بهذا نستنتج من الحالة (١)، (٢) أنه بصرف النظر عما إذا كان رقم لاسبيرز أكبر من أو أصغر من رقم باش ، فإن رقم مارشال – أدجورث يقع بينهما .

الوسط المرجح لمناسيب :

١٧–٣١ احسب الوسط الحسابى المرجح لمناسيب الأسعار لبيانات المسألة ١٧ – ١٢ باستخدام (أ) قيم سنة المقارنة ، كأوزان (ب) قيم سنة الأساس كأوزان ، حيث سنة الأساس هى 1949 وسنة المقارنة هى 1958 .

الحــــل :

(أ) الوسط الحسابى المرجح لمناسيب الأسعار باستخدام قيم سنة المقارنة كأوزان

$$= \frac{\Sigma \text{ (قيم سنة المقارنة) (مناسيب السعر)}}{\Sigma \text{ قيم سنة المقارنة}} = \frac{\Sigma(p_n/p_o)(p_nq_n)}{\Sigma p_nq_n}$$

عمليات الحساب المطلوبة يمكن ترتيبها كما فى الجدول ١٧ – ١٢ ، حيث الدليل n يعبر عن سنة المقارنة 1958 والدليل o يعبر عن سنة الأساس 1949 ، و p تعبر عن السعر و q عن الكمية .

جـــدول ١٧ – ١٢

	p_o	p_n	q_n	p_n/p_o	p_nq_n ملايين الدولارات	$(p_n/p_o)(p_nq_n)$ ملايين الدولارات
فحم الأنثراسيت	$20·13 (لكل طن)	$28·20 (لكل طن)	1·821 (مليون طن)	1·4009	51·352	71·939
بترول	$0·203 (لكل لتر)	$0·214 (لكل لتر)	118·6 × 159 (مليون لتر)	1·0542	4035·484	4254·207
					Σp_nq_n = 4086·836	$\Sigma(p_n/p_o)(p_nq_n)$ = 4326·146

$$\text{إذن الرقم القياسى المطلوب} = \frac{\Sigma(p_n/p_o)(p_nq_n)}{\Sigma p_nq_n} = \frac{4326·146}{4035·484} = 107·2(\%)$$

(ب) الوسط الحسابى المرجح لمناسيب الأسعار باستخدام قيم سنة الأساس كأوزان هى

$$\frac{\Sigma(p_n/p_o)(p_oq_o)}{\Sigma p_oq_o} = \frac{\Sigma p_nq_o}{\Sigma p_oq_o}$$ = رقم لاسبيرز بالمسألة ١٧ – ٢٠ (أ) = 106.4(%) ويمكن كذلك الحـــل باستخدام جدول كما فى الجزء (أ)

الأرقام القياسية للكمية او الحجم :

١٧–٣٢ استخدم بيانات المسألة ١٧–١٢ لحساب الرقم القياسى لحجم لسنة 1958 حيث سنة 1949 هى سنة الأساس باستخدام (أ) وسطاً حسابياً بسيطاً لمناسيب الحجوم (ب) رقماً قياسياً تجميعياً مرجحاً لحجم باستخدام أسعار سنة الأساس كأوزان (ج) رقماً قياسياً تجميعياً مرجحاً لحجم باستخدام أسعار سنة المقارنة كأوزان .

الحــــل :

(أ) الوسط الحسابى البسيط لمناسيب الحجوم

$$\frac{\Sigma q_n/q_o}{N} \quad \frac{1·821/3·559 + 118·6/80·2}{2} = \frac{51·17(\%) + 147·88(\%)}{2} \quad 99·5(\%)$$

(ب) رقم قياسى تجميعى مرجح لحجم باستخدام أسعار سنة الأساس كأوزان

$$= \frac{\Sigma p_o q_n}{\Sigma p_o q_o} = \frac{\Sigma\text{(الكميات فى 1958) (الأسعار فى 1949)}}{\Sigma\text{(الكميات فى 1949) (الأسعار فى 1949)}}$$

$$= \frac{\text{(1.821 مليون طن) (20.13 \$ لكل طن) + (118.6 × 159 مليون لتر) (0.203 \$ لكل لتر)}}{\text{(3.559 مليون طن) (20.13 \$ لكل طن) + (80.2 × 159 مليون لتر) (0.203 \$ لكل لتر)}}$$

$$\frac{\text{3853.73 مليون دولار}}{\text{2660.26 مليون دولار}} = 144.86, \text{ أو } 144.9\ (\%)$$

وهذه تسمى أحياناً رقم لاسبيرز القياسى للكيات أو الحجوم .

(ج) رقم قياسى تجميعى مرجح لحجم باستخدام أسعار سنة المقارنة كأوزان

$$\frac{\Sigma q_n p_n}{\Sigma q_o p_n} = \frac{\Sigma\text{(الكيات فى 1958) (الأسعار فى 1958)}}{\Sigma\text{(الكيات فى 1949) (الأسعار فى 1958)}}$$

$$= \frac{\text{(1.821 مليون طن) (28.20 \$ لكل طن) + (118.6 × 159 مليون لتر) (0.214 \$ لكل لتر)}}{\text{(3.559 مليون طن) (28.20 \$ لكل طن) + (80.2 × 159 مليون لتر) (0.214 \$ لكل لتر)}}$$

$$= \frac{\text{4086.84 مليون دولار}}{\text{2829.25 مليون دولار}} = 144.45, \text{ أو } 144.4(\%)$$

وهذه تسمى أحياناً رقم باش القياسى للكيات أو الحجوم .

١٧–٣٣ من نتائج المسألة ١٧–٣٢ أوجد الرقم القياسى المثالى للكميات أو الحجوم لفيشر .

الحــل :

كما فى الرقم القياسى للسعر ، فإن رقم فيشر المثالى الكية يحسب بالوسط الهندسى لرقمى لاسبيرز وباش للكيات . بهذا فى المسألة ١٧ – ٣٢ .

الرقم القياسى المثالى الكيات لفيشر = $\sqrt{(144{\cdot}86)(144{\cdot}45)} = 144{\cdot}6$.

الرقم القياسى للقيمة :

١٧–٣٤ أثبت أن رقم فيشر المثالى يحقق اختبار الانعكاس فى المعامل .

الحــل :

يتحقق اختبار الانعكاس فى المعامل للرقم القياسى إذا كان

(الرقم القياسى للسعر) (الرقم القياسى للكية) = الرقم القياسى للقيمة . اعتبر أن F_P هو رقم فيشر المثالى للسعر و F_Q هو رقم فيشر المثالى للكية . إذن

$$F_P F_Q = \sqrt{\left(\frac{\Sigma p_n q_o}{\Sigma p_o q_o}\right)\left(\frac{\Sigma p_n q_n}{\Sigma p_o q_n}\right)} \sqrt{\left(\frac{\Sigma q_n p_o}{\Sigma q_o p_o}\right)\left(\frac{\Sigma q_n p_n}{\Sigma q_o p_n}\right)} = \frac{\Sigma p_n q_n}{\Sigma p_o q_o} = \text{الرقم القياسى للقيمة}$$

بهذا فإن رقم فيشر المثالى يحقق اختبار الانعكاس فى المعامل .

١٧–٣٥ احسب الرقم القياسى للقيمة بالمسألة ١٧ – ٣٤ باستخدام بيانات المسألة ١٧ – ١٢ .

الحــل :

بما أن النتيجة :

الرقم القياسى للقيمة = (الرقم القياسى للسعر) (الرقم القياسى للكية) ، تنطبق تماماً إذا استخدمت أرقام فيشر المثالية فإنه من المسائل ١٧ – ٢٧ و ١٧ – ٣٣

الرقم القياسى للقيمة = $(106{\cdot}0\%)(144{\cdot}6\%) = 153{\cdot}3\%$

وهذه النتيجة نحصل عليها بالتعويض المباشر فى الصيغة $\frac{\Sigma p_n q_n}{\Sigma p_o q_o}$

تغيير فترة الأساس للأرقام القياسية :

١٧–٣٦ وضح أسس صلاحية الطريقة المستخدمة فى المسائل ١٧ – ٣ لحصول على مناسيب السعر لفترة أساس جديدة .

الحـــل :

افترض أن الفترات مرقة على التتالى من 1 إلى N كما فى الصف الأول من الجدول ١٧ – ١٣ ، وافترض أن $p_1, p_2, \ldots, p_N$ تعبر عن الأسعار فى هذه الفترات كما فى الصف الثانى فى هذا الجدول .

جدول ١٧ – ٣

الفـــترة	1	2	3	...	j	...	k	...	N
الأسعـــار	p_1	p_2	p_3	...	p_j	...	p_k	...	p_N
مناسيب السعر المقابلة للفترة القديمة j	$p_{j\mid 1}$	$p_{j\mid 2}$	$p_{j\mid 3}$	...	100%	...	$p_{j\mid k}$	...	$p_{j\mid N}$
مناسيب السعر المقابلة للفـــترة الجديدة k	$p_{k\mid 1}$	$p_{k\mid 2}$	$p_{k\mid 3}$	...	$p_{k\mid j}$	...	100%	...	$p_{k\mid N}$

مناسيب السعر المقابلة للفترات j و k والتى أطلقنا عليها الفترات القديمة والجديدة على الترتيب موضحة بالصف الثالث والرابع من الجدول . هنا $p_{j\mid 1} = p_1/p_j, p_{j\mid 2} = p_2/p_j$ وهكذا .

من الواضح أن الصف الرابع يمكن الحصول عليه من الصف الثالث بقسمة كل قيمة فى الصف الثالث على $p_{j\mid k}$ أى ، منسوب السعر فى الفترة k بالنسبة للفترة كأساس ، على سبيل المثال .

$$\frac{p_{j\mid 1}}{p_{j\mid k}} = \frac{p_1/p_j}{p_k/p_j} = \frac{p_1}{p_k} = p_{k\mid 1}$$

ومن الواضح أن النتيجة تنطبق على مناسيب الكية والقيمة كما تنطبق على مناسيب السعر .

١٧–٣٧ أثبت أن طريقة المسألة ١٧ – ٣٦ فى تغيير فترة الأساس للأرقام القياسية قابلة للتطبيق فى حالة وحيدة فقط وهى إذا كان الرقم القياسى يحقق اختبار الدائرية .

الحـــل :

إذا رمزنا للأرقام القياسية للفترات المختلفة باستخدام الفترة j كأساس بالرمز

$$I_{j\mid 1}, I_{j\mid 2}, \ldots, I_{j\mid N} \qquad (١)$$

وكانت الأرقام القياسية المناظرة باستخدام الفترة k كأساس هى :

$$I_{k\mid 1}, I_{k\mid 2}, \ldots, I_{k\mid N} \qquad (٢)$$

فإننا سوف نحصل على المتتابعة (٢) بقسمة كل رقم فى المتتابعة (١) على $I_{j|k}$ ، فى حالة وحيدة فقط وهى إذا كان

$$\frac{I_{j|1}}{I_{j|k}} = I_{k|1}, \quad \frac{I_{j|2}}{I_{j|k}} = I_{k|2}, \quad \ldots$$

أو

$$I_{j|1} = I_{j|k} I_{k|1}, \quad I_{j|2} = I_{j|k} I_{k|2}, \quad \ldots$$

وهذا يتضمن أن الأرقام القياسية تحقق اختبار الدائرية .

بما أن الأرقام القياسية لكل من لاسيبرز ، باش، فيشر ومارشال – أدجورث لا تحقق اختبار الدائرية ، فإن طريقة تغيير الأساس لا تنطبق بصورة دقيقة . وعلى أية حال فإنها من الناحية العملية تنطبق بصورة تقريبية .

الرقم القياسى التجميعى المرجح حيث الأوزان المستخدمة لسنة ثابتة يحقق اختبار الدائرية (أنظر المسألة ١٧–٢٣) بهذا فإنه للأرقام القياسية المحسوبة بهذه الطريقة فإن الطريقة المعطاة لتغيير الأساس تنطبق تماماً .

١٧–٣٨ الجدول ١٧ – ١٤ يوضح الرقم القياسى للإنتاج الصناعى لجميع المصانع للسنوات 1947 - 1958 حيث 1947 - 1949 فترة أساس . أوجد رقماً قياسياً جديداً باستخدام (أ) 1951 (ب) 1953 - 1956 ، كأساس .

جـدول ١٧ – ١٤

السنة	1947	1948	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958
الرقم القياسى للإنتاج الصناعى (1947–49=100)	100	104	97	112	120	124	134	125	139	143	143	134

المصدر : استقصاء الأعمال الجارية

الحـل :

(أ) اقسم كل رقم بالجدول على 120 (الرقم القياسى المقابل لسنة 1951) وعبر عن النتيجة كنسبة مئوية . الرقم القياسى المطلوب حيث 1951 سنة أساس موضح بالجدول ١٧ – ١٥ .

جـدول ١٧ – ١٥

السنة	1947	1948	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958
الرقم القياسى للإنتاج الصناعى (1951=100)	83	87	81	93	100	103	112	104	116	119	119	112

(ب) الوسط (الوسط الحسابي) للأرقام القياسية للسنوات 1956 - 1953 كأساس هو 135·25. (143 · 139 · 125 · 134)¼ إذن بقسمة كل رقم قياسي بالجدول ١٧ – ١٤ على 135.25 والتعبير عن النتيجة كنسبة مئوية ، نحصل على الأرقام القياسية المطلوبة الموضحة بالجدول ١٧ – ١٦ .

جدول ١٧ – ١٦

السنة	1947	1948	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958
الرقم القياسي للإنتاج الصناعي (1953-56=100)	74	77	72	83	89	92	99	92	103	106	106	99

لاحظ أن متوسط الأرقام القياسية لفترة الأساس الجديدة 1956—1953 هو 100. (106 · 103 · 92 · 99)¼ كما يجب أن يكون .

الانكماش في السلاسل الزمنية :

١٧–٣٩ الجدول ١٧ – ١٧ يوضح متوسط الأجور بالدولار في الساعة لعمال السكك الحديدية بالولايات المتحدة خلال السنوات 1947 - 1958 .

كذلك يوضح الرقم القياسي لأسعار المستهلك لهذه السنوات باعتبار 1949 – 1947 فترة أساس . حدد الأجر « الحقيقي » لعمال السكك الحديدية خلال السنوات 1958 - 1947 بالمقارنة بأجورهم في 1947 .

جدول ١٧ – ١٧

السنة	1947	1948	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958
متوسط أجر عمال السكك الحديدية (دولار في الساعة)	1·19	1·33	1·44	1·57	1·75	1·84	1·89	1·94	1·97	2·13	2·28	2·45
الرقم القياسي لأسعار المستهلك (1947-49=100)	95·5	102·8	101·8	102·8	111·0	113·5	114·4	114·8	114·5	116·2	120·2	123·5

المصدر : مكتب العمل بالولايات المتحدة

الحل :

(أ) نقوم أولا بتكوين رقم قياسي جديد لأسعار المستهلك حيث 1947 هي سنة أساس بقسمة جميع الأرقام في الصف الثالث بالجدول ١٧ – ١٧ على 95.5 والتعبير عن النتيجة كنسبة مئوية . النتيجة موضحة بالصف الثاني

بالجدول ١٧ – ١٨ . ثم نقوم بقسمة كل متوسط أجر للسنوات المعطاة (الصف الثانى بالجدول ١٧ – ١٧) على الرقم القياسى المقابل (الصف الثانى بالجدول ١٧ – ١٨) لنحصل على الأجر « الحقيقى » (الصف الثالث بالجدول ١٧ – ١٨) .

هذا ، على سبيل المثال ، الأجر الحقيقى المقابل لسنة 1958 هو $1.89 = % 129.3 / $2.45 وينتج عن ذلك أنه على الرغم من أن الأجر « الظاهر » زاد أكثر من الضعف فى المدة من 1947 إلى 1958 ، فإن الأجر « الحقيقى » زاد بنسبة % 59 فقط . أى أن القوة الشرائية زادت بنسبة % 59 فقط .

جـــدول ١٧ – ١٨

السنــة	1947	1948	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958
الرقم القياسى لأسعار المستهلك (1947=100)	100	107·6	106·6	107·6	116·2	118·8	119·8	120·2	119·9	121·7	125·9	129·3
الأجر « الحقيقى » لعمال السكك الحديدية (دولار فى الساعة)	1·19	1·24	1·35	1·46	1·51	1·55	1·58	1·61	1·64	1·75	1·81	1·89

١٧–٤٠ استخدم الرقم القياسى لأسعار المستهلك بالمسألة ١٧ – ٣٩ لتحديد القوة الشرائية للدولار للسنوات المختلفة مفترضاً أنه فى 1947 كان الدولار يساوى فعلا دولاراً فى الشرائية .

الحـــل :

بقسمة $ 1.00 على كل رقم قياسى للسعر بالصف الثانى فى الجدول ١٧–١٨ ، نحصل على القيم بالجدول ١٧ – ١٩ التى توضح القوة الشرائية لدولار 1947 فى كل من السنوات المعطاة . فى 1958 ، على سبيل المثال ، القيمة 0.77 تعنى أن دولار 1958 يمكن أن يشترى به %77 مما يمكن أن يشترى بدولار 1947 ، أى أن الدولار يساوى $0.77 من دولار 1947 .

البيانات المعبر عنها بقيم الدولار عند فترة معينة من الزمن يقال أنه معبر عنها بدولارات ثابتة باستخدام الفترة المعينة كفترة أساس أو فترة أسناد .

جـــدول ١٧ – ١٩

السنــة	1947	1948	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958
القوة الشرائية للدولار بدولارات 1947	1·00	0·93	0·94	0·93	0·86	0·84	0·83	0·83	0·83	0·82	0·79	0·77

مسائل اضافية

مناسيب الأسعار :

١٧–٤١ الجدول ١٧ – ٢٠ يوضح متوسط أسعار الجملة للقمح فى احدى الدول لعدد من السنوات المختلفة . أوجد منسوب السعر لكل من (أ) سنة 1958 باستخدام 1948 كأساس ، (ب) 1949 و 1956 باستخدام 1950 كأساس ، (جـ) السنوات 1958 – 1955 باستخدام 100= 1949 – 1947 .

جدول ١٧ – ٢٠

السنة	1947	1948	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958
متوسط أسعار القمح بالبنس الجديد لكل كيلو جرام	2·66	2·50	2·24	2·29	2·41	2·45	2·49	2·56	2·50	2·39	2·35	2·23

ج : (أ) 89.2 (ب) 97.8, 104.4 (جـ) 101·4, 96·9, 95·3, 90·4

١٧–٤٢ أثبت أن (أ) $p_{a|b}p_{b|c}p_{c|a} = 1$, (ب) $p_{a|b}p_{b|c}p_{c|d} = p_{a|d}$.

١٧–٤٣ أثبت أن $p_{0|n} = p_{0|1}p_{1|2}p_{2|3}\cdots p_{(n-1)|n}$.

١٧–٤٤ أثبت أن خاصية الدائرية المعدلة تأتى مباشرة من خاصية الدائرية وخاصية الانعكاس فى الزمن .

١٧–٤٥ الجدول ١٧ – ٢١ يوضح مناسيب السعر لسلعة حيث 100 = 1949 — 1947 . حدد مناسيب السعر حيث (أ) 100 = 1956 ، (ب) 100 = 1956 - 1955

جدول ١٧ – ٢١

السنة	1955	1956	1957	1958	1959	1960
منسوب السعر (1947–1949=100)	135	128	120	150	140	162

ج : (أ) 105. 100, 93·8, 117, 109, 127. (ب) 103, 97·3, 91·3, 114, 106, 123

١٧–٤٦ منسوب السعر لسنة 1956 حيث 1958 سنة الأساس هو 62½ بينما منسوب السعر لسنة 1957 حيث 1956 سنة الأساس هو 133½ .أوجد منسوب السعر لسنة 1958 حيث (أ) 1957 ، (ب) 1957 – 1956 كأساس .
ج : (أ) 120 ، (ب) 137

١٧–٤٧ فى 1960 انخفض متوسط سعر سلعة بنسبة 25% من قيمتها سنة 1954 ولكنه زاد بنسبة 50% من قيمتها سنة1946 . أوجد منسوب السعر لكل من (أ) 1954 ، (ب) 1960 مستخدماً كأساس 1946 .
ج : (أ) 200 ، (ب) 150

مناسيب الكمية أو الحجم :

١٧–٤٨ الجدول ١٧ – ٢٢ يوضح الطاقة الكهربائية ببليون الكيلووات – ساعة المباعة للعملاء المحليين والمقيمين بالولايات المتحدة خلال السنوات 1958 – 1947 . اختصر البيانات إلى مناسيب الكمية مستخدماً (أ) 1953 (ب) 1949 – 1947 كأساس .

جـــدول ١٧ – ٢٢

السنـــة	1947	1948	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958
الطاقة الكهربائية (بليون kW h)	3·68	4·25	4·84	5·59	6·42	7·23	8·09	9·04	10·04	11·15	12·26	13·25

المصدر : استقصاء الأعمال الجارية

ج : (أ) 45·5, 52·5, 59·8, 69·1, 79·4, 89·4, 100·0, 111·7, 124·1, 137,8, 151·5, 163·8

(ب) 86·5, 99·8, 113·7, 131·3, 150·8, 169·9, 190·1, 212·4, 235·9, 261·9, 288·0, 311·3

١٧–٤٩ فى 1956 زاد الإنتاج من معدن خام بنسبة 40% عنه فى 1955 ، وفى 1957 كان الإنتاج أقل بنسبة 20% منه فى 1956 ولكن $16\ ^2/_3$ % أعلى منه فى 1958 . أوجد مناسيب السعر للسنوات 1958 – 1955 مستخدماً كأساس (أ) 1955 (ب) 1958 (جـ) 1958 – 1955

ج : (أ) 100, 140, 112, 96 (ب) 104, 146, 117, 100 (جـ) 89·3, 125, 100, 85·7

١٧–٥٠ فى المسألة السابقة إذا كان الإنتاج من المعدن الخام لسنة 1957 هو 3.20 مليون طن ، أوجد الإنتاج للسنوات (أ) 1955 (ب) 1956 (جـ) 1958

ج : (أ) 2.86 (ب) 4.00 (جـ) 2.74 مليون طن

مناسيب القيمة :

١٧–٥١ فى 1960 زاد سعر سلعة ما بنسبة 50% عن سعرها 1952 بينما انخفضت كمية الإنتاج بنسبة 30% . ما هى النسبة المئوية للإرتفاع أو الانخفاض من القيمة الإجمالية للسلعة فى 1960 بالنسبة للقيمة فى 1952 ؟

ج : 5% زيادة .

١٧–٥٢ الجدول ١٧ – ٢٣ يوضح مناسيب السعر والقيمة لسلعة للسنوات 1960 – 1956 حيث سنة الأساس كما هو موضح . أوجد منسوب الكمية للسلعة حيث الاساس (أ) 1956 و (ب) 1958 – 1956 فسر نتائجك .

جـــدول ١٧ – ٢٣

السنـــة	1956	1957	1958	1959	1960
منسوب السعـــر (1956 = 100)	100	125	150	175	200
منسوب القيمـــة (1947 - 1949 = 100)	150	180	207	231	252

ج : (أ) 100, 96, 92, 88, 84 (ب) 104, 100, 96, 92, 88

سلسلة المناسيب ووصلة المناسيب :

١٧ – ٥٣ وصلة المناسيب لاستهلاك سلعة خلال السنوات 1960 - 1957 هى 80 ، 125 ، 120 ، 90 على الترتيب .

(أ) أوجد منسوب السعر لسنة 1958 حيث 1960 كأساس .

(ب) سلسل وصلة المناسيب إلى 1959 كأساس .

(جـ) سلسل وصلة المناسيب إلى 58 - 1957 كأساس .

ج : (أ) 100 (ب) 80.0 ، 100 ، ، 80.0 ، 66.7 ، 74.1 ، المقابلة للسنوات 1950 - 1956 على الترتيب .

(جـ) 109 ، 136 ، 109 ، 99.9 ، 101 ، المقابلة للسنوات 1960 - 1956 على الترتيب .

١٧ – ٥٤ فى نهاية A من السنوات المتتالية كان إنتاج سلعة ما A وحدة . فى كل من السنوات المتتالية كان الإنتاج يتزايد بنسبة r % عن السنة السابقة لها . (أ) وضح أن الإنتاج خلال السنة n هو $A(1 + r/100)^{n-1}$ وحدة

(ب) وضح أن الإنتاج الكلى لجميع السنوات n هو $(100\,A/r)\,[(1 + r/100)^n - 1]$ وحدة .

الأرقام القياسية . الطريقة التجميعية البسيطة :

١٧ – ٥٥ الجدول ١٧ – ٢٤ يوضح لبلد ما أسعار وكميات المستهلك من المعادن المختلفة غير الحديدية للسنوات 1956 و 1957 بأخذ 1949 كسنة أساس أحسب الرقم القياسى للسعر ، باستخدام الطريقة التجميعية البسيطة ، للسنوات (أ) 1956 (ب) 1957 .

ج : (أ) 121.7 (ب) 110.0 .

جدول ١٧ – ٢٤

الأسعار (بنس جديد لكل kg)

	1949	1956	1957
ألمونيوم	17·00	26·01	27·52
نحاس	19·36	41·88	29·99
رصاص	15·18	15·81	14·46
صفيح	99·32	101·26	96·17
زنك	12·15	13·49	11·40

الكميات (بملايين kg)

	1949	1956	1957
ألمونيوم	1357	3707	3698
نحاس	2144	2734	2478
رصاص	1916	2420	2276
صفيح	161	202	186
زنك	1872	2018	1424

١٧ – ٥٦ أثبت أن الرقم القياسى التجميعى البسيط يحقق اختبار الانعكاس فى الزمن واختبار الدائرية ولكنه لا يحقق اختبار الانعكاس فى المعامل .

الوسط البسيط لطريقة المناسيب :

١٧ – ٥٧ من البيانات بالجدول ١٧ – ٢٤ بالمسألة ١٧ – ٥٥ ، استخدم وسطاً بسيطاً (الوسط الحسابى) لمناسيب الأسعار ، للحصول على رقم قياسى لسعر المعادن غير الحديدية للسنوات (أ) 1956 ، (ب) 1957 ، باستخدام 1944 كأساس . قارن بالمسألة ١٧ – ٥٥ .

ج : (أ) 137.3 (ب) 120.5

١٧ – ٥٨ حل المسألة ١٧ – ٥٧ باستخدام الوسيط

ج : (أ) 111.0 (ب) 96.8

١٧ – ٥٩ حل المسألة ١٧ – ٥٧ باستخدام الوسط الهندسى

ج : (أ) 131.3 (ب) 116.8

١٧ – ٦٠ حل المسألة ١٧ – ٥٧ باستخدام الوسط التوافقى

ج : (أ) 126.3 (ب) 113.3

الطريقة التجميعية المرجحة ، رقمى لاسبيرز وباش :

١٧ – ٦١ من بيانات الجدول ١٧ – ٢٤ بالمسألة ١٧ – ٥٥ أوجد رقم لاسبيرز للأسعار للسنوات (أ) 1956 (ب) 1957 باستخدام 1949 سنة أساس .

ج : (أ) 148.7 (ب) 125.5

١٧ – ٦٢ من بيانات الجدول ١٧ – ٢٤ بالمسألة ١٧ – ٥٥ أوجد رقم باش للأسعار للسنوات (أ) 1956 (ب) 1957 باستخدام 1949 كسنة أساس .

ج : (أ) 150.5 (ب) 134.2

١٧ – ٦٣ وضح أن (أ) رقم لاسبيرز (ب) رقم باش ، لايحققان اختبارات الانعكاس فى الزمن والانعكاس فى المعامل .

رقم فيشر المثالى :

١٧ – ٦٤ من بيانات الجدول ١٧ – ٢٤ بالمسألة ١٧ – ٥٥ أوجد رقم فيشر المثالى للأسعار للسنوات (أ) 1956 (ب) 1957 باستخدام سنة 1949 كسنة أساس .

ج : (أ) 149.6 (ب) 129.8

جـــدول ١٦ – ٢١

	يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونيو	يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفبر	ديسمبر
1951												
1952	119·9	107·7	103·7	92·4	85·4	80·6	81·2	88·5	96·4	107·6	115·2	122·3
1953	120·7	107·3	104·1	92·8	86·4	80·0	82·2	88·4	96·6	107·1	113·5	120·2
1954	119·8	106·1	103·4	93·6	86·8	81·3	82·0	89·3	96·7	107·2	113·4	121·1
1955	119·8	107·2	104·3	93·5	87·2	81·5	83·4	89·6	95·7	105·5	112·2	119·6
1956	119·1	107·6	103·2	93·2	87·2	81·8	83·4	89·5	95·9	106·0	112·3	119·6
1957	118·6	106·6	103·4	94·2	88·1	82·1	84·6	90·0	97·7	105·7	111·7	118·2
1958	119·5	107·2	103·4	93·9	87·7	83·2	83·8	90·4	96·0	105·1	112·3	117·3
الوسيط	119·8	107·2	103·4	93·5	87·2	81·5	83·4	89·5	96·4	106·0	112·3	119·6

لحصول على متوسط النسب المئوية لكل شهر للسنوات المختلفة ، فقد استخدمنا الوسيط ، كما هو موضح بالجدول ١٦ – ٢١ ، وذلك نظراً لوجود قيم متطرفة فى بعض الحالات ، (مثل نوفبر ، ديسمبر) . ومن الممكن أن تستخدم أيضاً الوسط الحسابى مع استبعاد القيم المتطرفة فى كل عمود .

مجموع الوسيطات هو 1199.8 ، وهو قريب من 1200 وهذا هو المطلوب وبهذا لا توجد حاجة إلى التعديل . ويوضح الصف الأخير بالجدول ١٦ – ٢١ الدليل الموسمى المطلوب .

وتتفق النتائج بشكل جيد مع نتائج المسألة ١٦ – ٩

١٦–١١ أوجد الدليل الموسمى لبيانات المسألة ١٦ – ٨ باستخدام طريقة الوصلة النسبية .

الحـــل :

نعبر أولا عن بيان كل شهر كنسبة مئوية من بيانات الشهر السابق ، كما هو موضح بالجدول ١٦ – ٢٢ . كل من هذه النسب تسمى وصلة نسبية . على سبيل المثال . لحصول على قيم شهرى فبراير ومارس 1951 ، فإنه من بيانات المسألة ١٦ – ٦ ،

$$\text{الوصلة النسبية لشهر فبراير 1951} = \frac{\text{قيمة فبراير 1951}}{\text{قيمة يناير 1951}} = \frac{281}{318} = 88.4\ \%$$

$$\text{الوصلة النسبية لشهر مارس 1951} = \frac{\text{قيمة مارس 1951}}{\text{قيمة فبراير 1951}} = \frac{278}{281} = 98.9\ \%$$

جـــدول ١٦ – ٢٢

	يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونيو	يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفمبر	ديسمبر
1951		88·4	98·9	89·9	92·4	93·5	103·2	109·9	109·8	112·3	107·6	106·8
1952	98·6	90·4	96·8	89·6	92·9	94·8	102·5	108·3	109·9	111·5	106·5	106·4
1953	100·8	89·4	97·6	89·7	93·7	93·3	103·2	109·7	108·8	111·7	106·4	107·4
1954	99·5	89·0	98·0	90·9	93·2	94·1	103·3	108·2	107·5	111·0	106·9	107·2
1955	100·7	90·0	97·9	90·3	94·0	94·3	103·0	108·2	107·9	111·2	106·6	107·1
1956	100·2	90·9	96·6	91·0	94·2	94·4	104·0	107·2	109·2	108·9	106·3	106·4
1957	100·8	90·3	97·5	91·6	94·1	93·8	102·9	108·7	107·0	110·1	107·4	105·1
1958	102·5	90·2	97·1	91·4	94·1	95·5	102·4	107·7	106·9	110·0	106·7	106·5
الوسيط	100·7	90·1	97·6	90·6	93·8	94·2	103·1	108·2	108·4	111·1	106·6	106·6

متوسط الوصلات النسبية للأشهر المختلفة (فى هذه الحالة الوسيط) موضح بالصف الأخير لجدول ١٦ – ٢٢ . ويمكن أيضاً استخدام الوسط الحسابى (أنظر المسألة ١٦ – ١٢) .

اعتبر أن يناير له القيمة 100% (أنظر الجدول ١٦ – ٢٣) . وبما أن متوسط الوصلة النسبية لشهر فبراير هو 90.1 (من الجدول ١٦–٢٢) فإن بيانات شهر فبراير هى فى المتوسط 90.1% من بيانات شهر يناير ، أى 90.1% من 100 = 90.1 وبصورة مشابهة فإن متوسط الوصلة النسبية لشهر مارس هو 97.6% من شهر فبراير أى 97.6% من 90.1 = 87.9 ، وهكذا نحصل على الجدول ١٦ – ٢٣ والذى تسمى قيمه أحياناً بالمناسيب المسلسلة .

الجـــدول ١٦ – ٢٣

يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونيو	يوليو	أغسطس	بتمبر	أكتوبر	نوفبر	ديسمبر	يناير
100·0	90·1	87·9	79·6	74·7	70·4	72·6	78·6	85·2	94·7	101·0	107·6	108·5

فى الجدول ١٦–٢٣ قيمة يناير التالى (العمود الأخير) هى 108.5 ، بزيادة قدرها 8.5 عن يناير الأول . وهذه الزيادة ترجع إلى الزيادة طويلة المدى فى البيانات . للتعديل لاستبعاد هذا الاتجاه العام يجب طرح $(12/12)(8.5) = 8.5$ من قيمة العمود الأخير (وهذا يجعل قيمة يناير التالى 100) ، $(11/12)(8.5) = 7.8$ من قيمة ديسمبر ، $(10/12)(8.5) = 7.1$ من قيمة نوفبر ، وهكذا . والقيم المعدلة لاستبعاد الاتجاه العام موضحة بالجدول ١٦–٢٤ ، (بصورة أكثر دقة يجب ضرب القيم الموجودة بالجدول من اليمين إلى اليسار فى

$$(100.0\ /\ 108.5)^{12/12},\ (100.0\ /\ 108.5)^{11/12},\ (100.0\ /\ 108.5)^{10/12},\ \ldots$$

وهذه من الناحية العملية تنتج نفس النتيجة الموضحة بالجدول (١٦ – ٢٤)

الجـــدول ١٦ – ٢٤

يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونيو	يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفبر	ديسمبر
100·0	89·4	86·5	77·5	71·9	66·9	68·4	73·6	79·5	88·3	93·9	99·9

ونظراً لأن مجموع هذه النسب المئوية هى 995.8 ، فإننا نعد لها بالضرب فى 1200/995.8 لحصول على الدليل الموسمى ، وهو موضح بالجدول ١٦ – ٢٥ .

الجـــدول ١٦ – ٢٥

	يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونيو	يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفبر	ديسمبر
الدليل الموسمى	120·5	107·7	104·2	93·4	86·6	80·6	82·4	88·7	95·8	106·4	113·2	120·4

١٦–١٢ حل المسألة ١٦ – ١١ إذا استخدمنا الوسط الحسابى للوصلات النسبية بدلا من الوسيط .

الحـــل :

متوسط الوصلات النسبية موضح بالجدول ١٦ – ٢٦

جدول ١٦ – ٢٦

	يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونيو	يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفبر	ديسمبر
المتوسط	100·4	89·8	97·6	90·5	93·6	94·2	103·1	108·5	108·4	110·8	106·8	106·6

إذا اعتبرنا أن يناير له القيمة (%)100 فإن قيمة فبراير هى %89.8 من 100=89.8 ، وقيمة مارس هى %97.6 من 89.8 تساوى 87.6 ، كما هو موضح بالجدول ١٦ – ٢٧

جـــدول ١٦ – ٢٧

يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونيو	يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفبر	ديسمبر	
100·0	89·8	87·6	79·3	74·2	69·9	72·1	78·2	84·8	94·0	100·4	107·0	107·4

هنا القيمة فى يناير التالى هى 107.4 ، بزيادة مقدارها 7.4 عن يناير الأول وذلك راجع إلى الاتجاه العام .
لاستبعاد أثر الاتجاه العام نقوم بطرح 7.4 = (12/12)(7.4) من العمود الأخير ، 6.8 = (11/12)(7.4) من قيمة شهر ديسمبر ، 6.2=(10/12)(7.4) من قيمة شهر نوفبر وهكذا ، وينتج عن ذلك القيم الموجودة بالجدول ١٦ — ٢٨

جـــدول ١٦ — ٢٨

يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونيو	يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفبر	ديسمبر
100·0	89·2	86·4	77·5	71·7	66·8	68·4	73·9	79·9	88·4	94·2	100·0

وبما أن مجموع القيم فى الصف الأخير بالجدول ١٦ — ٢٨ هى 996.6 فإننا نعدل هذه القيمة بالضرب فى 1200/996.6 ومن ثم نحصل على الدليل الموسمى المعطى بالجدول ١٦ — ٢٩

جـــدول ١٦ — ٢٩

	يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونيو	يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفبر	ديسمبر
الدليل الموسمى	120·4	107·4	104·0	93·3	86·3	80·4	82·4	89·0	96·2	106·4	113·4	120·7

تخليص البيانات من أثر الموسم :

١٦—١٣ عدل بيانات المسألة ١٦ — ٨ للتغيرات الموسمية ، أى خلص البيانات من أثر الموسم .

الحـــل :

لتعديل البيانات للتخلص من أثر التغيرات الموسمية ، يجب قسمة كل عنصر فى البيانات الأصلية للمسألة ١٦—٨ بالدليل الموسمى للشهر المقابل كما حصلنا عليه فى الطريقة السابقة .

فإذا استخدمنا ، على سبيل المثال ، الدليل الموسمى للمسألة ١٦ — ١٠ فإننا نقسم كل قيم يناير على 119.8% (أى 1.198) ، وكل قيم فبراير على 107.2% (أى 1.072) وهكذا . وبهذا فإن البيانات المخلصة من أثر الموسم هى كما يلى بالجدول ١٦ — ٣٠

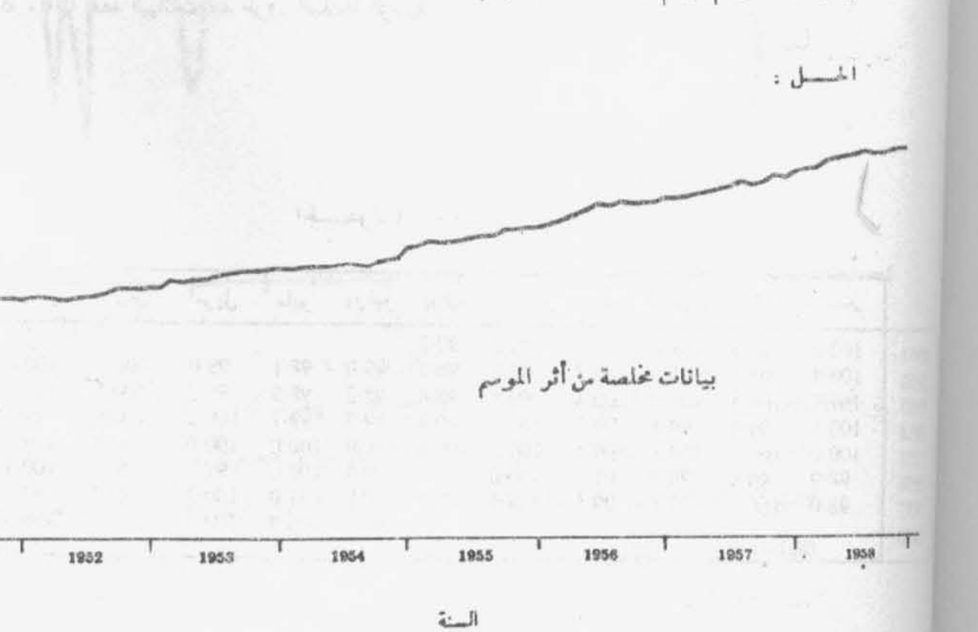
الجـــدول ١٦ – ٣٠

	يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونيو	يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفبر	ديسمبر
1951	265	262	269	267	265	265	267	274	279	285	289	290
1952	285	288	289	287	286	290	290	293	299	303	305	304
1953	306	306	309	307	308	308	311	317	321	325	327	329
1954	327	326	331	333	333	335	338	341	340	343	346	349
1955	351	353	358	357	360	363	366	369	369	374	376	378
1956	378	384	385	387	391	395	402	401	407	403	404	404
1957	407	410	415	420	424	426	428	434	430	431	437	431
1958	442	445	448	452	456	466	466	468	465	465	468	468

١٦-١٤ (أ) ارسم البيانات المخلصة من الموسم بالمسألة السابقة

(ب) قارن الرسم برسم المسألة ١٦ – ٨ (أ)

الحـــل :



شكل ١٦ – ٥

(ب) الشكل البيانى للبيانات المعدلة للتخلص من أثر الموسم تظهر بوضوح الاتجاه العام طويل المدى والذى ، باستثناء بعض التقلبات الطفيفة ، يعد تقريباً جيداً لخط مستقيم على الرغم من وجود اتجاه طفيف إلى أعلى .

إذا رمزنا لبيانات المسألة ١٦ – ٨ بالرمز $Y = TCSI$ ، فإن الرسم فى (أ) يعبر عن المتغير $Y/S = TCI$ مرسوماً فى مقابل الزمن t وهذا يحتوى على الاتجاه العام طويل المدى ، التغيرات الدورية وغير المنتظمة . وبما ان الرسم يوضح الاتجاه طويل المدى بصورة جيدة فإنه يظهر أن حاصل الضرب CI للعناصر الدورية وغير المنتظمة يجب أن يكون من الناحية العملية 100% . وهذه الحقيقة سنتأكد منها فى المسألة ١٦ – ١٦ .

تقدير التغيرات الدورية وغير المنتظمة :

١٦–١٥ عدل بيانات المسألة ١٦ – ١٣ للتخلص من أثر الموسم .

الحـــل :

لاستبعاد أثر الاتجاه العام من بيانات المسألة ١٦–١٣ نقسم كل قيمة على القيمة الاتجاهية المقابلة لكل شهر ، محسوبة بأى من الطرق الموضحة . فى هذه المسألة سوف نستخدم القيم الاتجاهية الشهرية ، التى حصلنا عليها فى المسألة ١٦ – ١٠ مستخدمين طريقة المتوسطات المتحركة . ويوضح الجدول ١٦ – ٣١ النتائج . لحصول على قيمة يوليو 1951 على سبيل المثال ، نقسم القيمة المقابلة 267 الموضحة بالجدول ١٦ – ٣ بالمسألة ١٦ – ١٣ على القيمة 274.7 (أنظر المسألة ١٦ – ١٠ ، القيمة الأولى فى العمود 5 من الجدول ١٦ – ٢٠) ، والتى تعطى (%)97.2 = 267/274.7 ونحصل على القيم الأخرى بطريقة مماثلة . أحد عيوب هذه الطريقة ، كما فى جميع الطرق المتضمنة استخدام المتوسطات المتحركة ، أننا نفقد البيانات عند طرفى السلسلة الزمنية .

الجـــدول ١٦ – ٣١

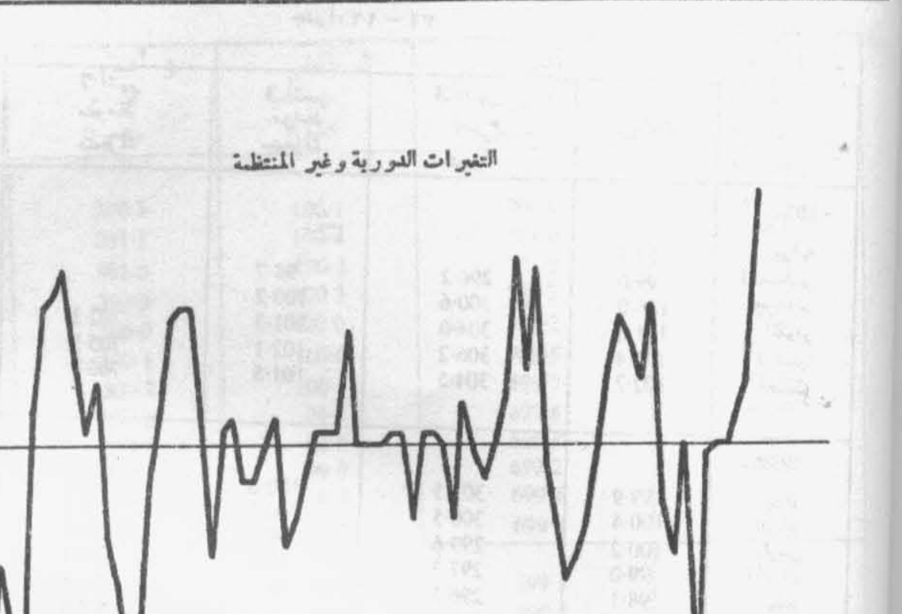
	يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونيو	يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفمبر	ديسمبر
1951							97·2	99·0	100·0	101·6	102·4	102·2
1952	99·9	100·4	100·2	99·0	98·1	99·0	98·5	97·8	100·3	101·1	101·2	100·4
1953	100·6	100·1	100·5	99·2	98·9	98·2	98·4	99·7	100·4	101·0	101·1	101·1
1954	99·9	99·1	100·1	100·2	99·7	99·7	100·0	100·2	99·2	99·4	99·8	100·1
1955	100·1	100·1	100·9	100·0	100·0	100·0	100·1	100·2	99·4	100·1	100·1	100·0
1956	99·4	100·3	99·9	99·7	100·0	100·4	101·5	100·6	101·4	99·8	99·4	98·9
1957	99·1	99·3	100·0	100·7	101·0	100·8	100·5	101·1	99·5	99·1	100·0	98·0
1958	99·9	100·0	100·0	100·3	100·5	102·0						

١٦–١٦ (أ) ارسم البيانات التى حصلت عليها بالمسألة ١٦ – ١٥

(ب) فسر دلالة الرسم .

الحـــل :

(أ) من الملائم طرح 100(%) من بيانات المسألة السابقة ورسم الانحرافات الناتجة . الرسم الناتج ، باستخدام محور رأسى مكبر موضح بالشكل ١٦ – ٦ .



شكل ١٦ – ٦

(ب) يعبر عن البيانات الأصلية بالمعادلة $Y = TCSI$. إجراء التعديل لاستبعاد التغيرات الموسمية كما فى المسألة ١٦ – ١٣ يعتبر بمثابة قسمة الطرفين على الدليل الموسمى S لحصول على $Y/S = TCI$. والتعديل التالى لاستبعاد الاتجاه العام يعد بمثابة القسمة على T لنحصل على $Y/ST = CI$. بطرح 100% نحصل على $CI - 100 = T/ST - 100$. أى أن المتغير التابع فى الشكل أعلاه هو $Y/ST - 100$ ، والمتغير المستقل هو الزمن t .

ويتكون الشكل من الناحية النظرية من التحركات الدورية وغير المنتظمة فقط ، ممثلة بالعناصر C و I على الترتيب . لاحظ أن حاصل الضرب CI يتغير بين 97% و 103% وهذا يؤكد العبارة التى وردت فى نهاية المسألة ١٦ – ١٤ .

١٦-١٧ (أ) أوجد 3 أشهر متوسط و 7 أشهر متوسط لبيانات المسألة ١٦ – ١٥

(ب) كون الرسم البيانى للمتوسطات المتحركة لجزء (أ)

(ت) فسر الرسوم البيانية .

الحـــل :

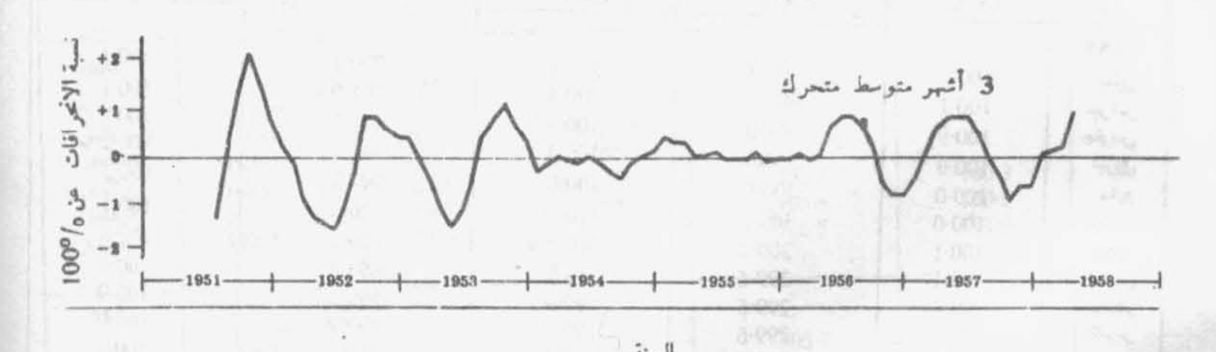
(أ) المتوسطات المتحركة المطلوبة موضحة بالجدول ١٦ – ٣٢ .

جدول ١٦ – ٣٢

السنة و الشهر	البيانات	3 أشهر مجموع متحرك	3 أشهر متوسط متحرك	7 أشهر متوسط متحرك	7 أشهر مجموع متحرك
1951					
يوليه	97·2				
اغسطس	99·0	296·2	98·7		
سبتمبر	100·0	300·6	100·2		
أكتوبر	101·6	304·0	101·3	702·3	100·3
نوفمبر	102·4	306·2	102·1	705·5	100·8
ديسمبر	102·2	304·5	101·5	706·7	101·0
1952					
يناير	99·9	302·5	100·8	705·7	100·8
فبراير	100·4	300·5	100·2	702·2	100·3
مارس	100·2	299·6	99·9	698·8	99·5
أبريل	99·0	297·3	99·1	695·1	99·3
مايو	98·1	296·1	98·7	693·0	99·0
يونيه	99·0	295·6	98·5	692·9	99·0
يوليه	98·5	295·3	98·4	693·8	99·1
اغسطس	97·8	296·6	98·9	696·0	99·4
سبتمبر	100·3	299·2	99·7	698·3	99·8
أكتوبر	101·1	302·6	100·9	699·9	100·0
نوفمبر	101·2	302·7	100·9	701·5	100·2
ديسمبر	100·4	302·2	100·7	704·2	100·6
1953					
يناير	100·6	301·1	100·4	703·1	100·4
فبراير	100·1	301·2	100·4	700·9	100·1
مارس	100·5	299·8	99·9	697·9	99·7
ابريل	99·2	298·6	99·5	695·9	99·4
مايو	98·9	296·3	98·8	695·0	99·3
يونيه	98·2	295·5	98·5	695·3	99·3
يوليه	98·4	296·3	98·8	695·8	99·4
اغسطس	99·7	298·5	99·5	697·7	99·7
سبتمبر	100·4	301·1	100·4	699·9	100·0
أكتوبر	101·0	302·5	100·8	701·6	100·2
نوفمبر	101·1	303·2	101·1	702·3	100·3
ديسمبر	101·1	302·1	100·7	702·7	100·4
1954					
يناير	99·9	300·9	100·3	702·5	100·4
فبراير	99·1	299·1	99·7	701·2	100·2
مارس	100·1	299·4	99·8	699·8	100·0
ابريل	100·2	300·0	100·0	698·7	99·8
مايو	99·7	299·6	99·9	699·0	99·9
يونيه	99·7	299·4	99·8	699·1	99·9
يوليه	100·0	299·9	100·0	698·4	99·8
اغسطس	100·2	299·4	99·8	698·0	99·7
سبتمبر	99·2	298·8	99·6	698·4	99·8
أكتوبر	99·4	298·4	99·5	698·8	99·8
نوفمبر	99·8	299·3	99·8	698·9	99·8
ديسمبر	100·1	300·0	100·0	699·6	100·0

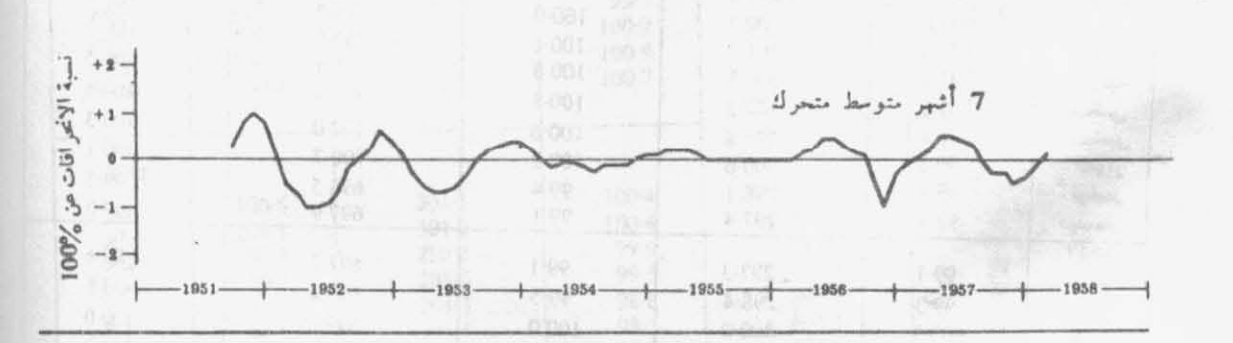
السنة و الشهر	البيانات	3 أشهر مجموع متحرك	3 أشهر متوسط مجموع	7 أشهر مجموع متحرك	7 أشهر متوسط متحرك
1955					
يناير	100·1	300·3	100·1	700·4	100·1
فبراير	100·1	301·1	100·4	701·0	100·1
مارس	100·9	301·0	100·3	701·2	100·2
ابريل	100·0	300·9	100·3	701·2	100·2
مايو	100·0	300·0	100·0	701·2	100·2
يونيه	100·0	300·1	100·0	700·5	100·1
يوليه	100·1	300·2	100·1	699·7	100·0
اغسطس	100·1	299·6	99·9	699·8	100·0
سبتمبر	99·4	299·6	99·9	699·8	100·0
اكتوبر	100·1	299·6	99·9	699·2	100·0
نوفمبر	100·1	300·2	100·1	699·4	100·0
ديسمبر	100·0	299·5	99·8	699·2	100·0
1956					
يناير	99·4	299·7	99·9	699·5	100·0
فبراير	100·3	299·6	99·9	699·4	100·0
مارس	99·9	299·9	100·0	699·7	100·0
ابريل	99·7	299·6	99·9	701·2	100·2
مايو	100·0	300·1	100·0	702·4	100·3
يونيه	100·4	301·9	100·6	703·5	100·5
يوليه	101·5	302·5	100·8	703·4	100·5
اغسطس	100·6	302·5	100·8	703·1	100·4
سبتمبر	101·4	301·8	100·6	702·0	100·3
اكتوبر	99·8	300·6	100·2	700·7	100·1
نوفمبر	99·4	298·1	99·4	698·5	99·5
ديسمبر	98·9	297·4	99·1	697·9	99·0
1957					
يناير	99·1	297·3	99·1	697·2	99·6
فبراير	99·3	298·4	99·5	698·4	99·8
مارس	100·0	300·0	100·0	699·8	100·0
ابريل	100·7	301·7	100·6	701·4	100·2
مايو	101·0	302·5	100·8	703·4	100·5
يونية	100·8	302·3	100·8	703·6	100·5
يولية	100·5	302·4	100·8	702·7	100·4
اغسطس	101·1	301·1	100·4	702·0	100·3
سبتمبر	99·5	299·7	99·9	699·0	99·9
اكتوبر	99·1	298·6	99·5	698·1	99·7
نوفمبر	100·0	297·1	99·9	697·6	99·7
ديسمبر	98·0	297·9	99·3	696·5	99·5
1958					
يناير	99·9	297·9	99·3	697·3	99·6
فبراير	100·0	299·8	100·0	698·7	99·8
مارس	100·0	300·3	100·1	700·7	100·1
ابريل	100·3	300·8	100·2		
مايو	100·5	302·8	100·9		
يونية	102·0				
يولية					
اغسطس					
سبتمبر					
اكتوبر					
نوفمبر					
ديسمبر					

(ب) كما فى المسألة ١٦ - ١٦ فى الملائم طرح (%100) من المتوسطات المتحركة ورسم الانحرافات الناتجة كما هو موضح أدناه .



السنة

الشكل ١٦ - ٧



السنة

الشكل ١٦ - ٧

(ج) وكما هو متوقع ، فإن المتوسطات المتحركة تعمل فى تمهيد عدم الانتظام فى بيانات المسألة ١٦ - ١٥ ، كما هو واضح من مقارنة الأشكال فى (ب) بشكل المسألة ١٦-١٦ . ويتضح أيضا من الشكل أن الـ 7 أشهر متوسط متحرك يعطى تمهيدا أكبر للبيانات عن الـ 3 أشهر متوسط متحرك فى هذه المسألة . وما يثير الاهتمام أن النهايات الثلاث إلى اليسار والنهايتين الصغيرتين إلى اليمين فى أشكال (ب) تحدث كلها بالقرب من ديسمبر . كذلك ، فإن النهايتين الصغيرتين إلى اليسار والنهايتين العظميين إلى اليمين تحدث بالقرب من يونيو . هذه الملاحظات يظهر أنها تشير إلى بقايا ضئيلة لمتغيرات موسمية عند بداية ونهاية فترة السنوات الثمانى والتى تعمل فى اتجاهات مضادة ، وهذه تشير إلى تغير محتمل فى نمط الموسمية . والتى من الطبيعى خلال فترة ثمانية سنوات كاملة أن تختفى . وتظهر البقايا الضئيلة الموسمية بصورة أوضح إذا استخدمنا 12 شهرا متوسطا متحركا مركزيا

من المعتاد استخدام طريقة هذه المسألة لاستقصاء نمط الدورية .

ويجب أن نتوقع ذلك حيث أنه لو كانت البيانات الأصلية ، معطاة بالصورة $Y = TCSI$ ، فإن تعديلها لاستبعاد أثر الاتجاه العام والتغيرات الموسمية فإننا نحصل على بيانات جديدة $Y/ST=CI$ ، والتي (نظريا) تحتوى فقط على التحركات الدورية وغير المنتظمة . وبهذا فإن متوسطا متحركا مناسبا يفيد في حذف عدم الانتظام وإيضاح نمط الدورية ، في حالة وجودها . لهذا الغرض فإن 12 شهرا لمتوسطا متحركا مركزيا قد يكون أفضل لحذف بقايا التغيرات الموسمية وكذلك عدم الانتظام .

في المسألة الحالية لا يوجد أثر ظاهر للدورية ، أو إذا كانت موجودة فإنه يمكن اهمالها . في النظرية الاقتصادية فإننا غالبا ما نطلب بيانات لعدد قد يصل إلى فترة 20 سنة قبل أن تبدأ الدورات في الظهور .

قابلية البيانات لمقارنة :

١٦–١٨ كيف يمكن تعديل بيانات المسألة ١٦–٨ بحيث نمنح مسموحات للسنوات الكبيسة 1952 و 1956 ؟

الحل :

في السنة الكبيسة ، فبراير 29 يوما بدلا من 28 يوما كالمعتاد . لتحقيق قابلية البيانات للمقارنة فإننا نقوم بضرب بيانات شهر فبراير في السنة الكبيسة في 28/29 . بهذا فإنه في الجدول ١٦–١٢ ، المسألة ١٦–٨ .

قيمة شهر فبراير 1952 يوضع بدلا منها $298 = (309)(28/29)$

قيمة شهر فبراير 1956 يوضع بدلا منها $398 = (412)(28/29)$

هذه التعديلات لم تستخدم عند حساب الدليل الموسمي (أنظر المسائل ١٦–٨ ، ١٦–١٢) . وعلى أية حال ، فإن تأثيرها على النتائج يمكن اهماله (انظر المسألة ١٦–٥٢) .

التنبـــوء :

١٦–١٩ (ا) باستخدام البيانات في الجدول ١٦–١٢ بالمسألة ١٦ – ٨ ، تنبوء بالطاقة الكهربائية الشهرية المستخدمة في إضاءة الشوارع والطرق السريعة في الولايات المتحدة خلال سنة 1959

(ب) قارن القيم المتنبوء بها بالقيم الفعلية .

الحل :

(ا) القيم الشهرية المستقبلة تعطى بالمعادلة $Y = TCSI$ ، حيث يجب أن نقدر T, C, S, I

لتقدير الاتجاه العام T ، هناك عدد من الطرق يمكن أن تستخدم . من الرسم البياني للمسألة ١٦–١٤ (أنظر الشكل ١٦–٥) يتضح أنه فى إمكاننا الحصول على تقدير دقيق للقيم الاتجاهية فى المستقبل بتوفيق خط القيم الاتجاهية فى السنتين الأخيرتين ، على سبيل المثال ، وهذا يمكن عمله باستخدام طريقة المربعات الصغرى أو من الطرق الأخرى التى سبق مناقشتها .

سوف نحصل على القيم بطريقة سهلة نسبيا وهى طريقة شبهات المتوسطات مطبقة على النتائج التى حصلنا عليها فى المسألة ١٦–١٠ . فى الجدول المرفق قسمنا الـ 12 شهر متوسطات متحركة مركزية إلى مجموعتين متساويتين للأشهر من يوليو 1956 إلى يونية 1958.

جدول ١٦ – ٣٣

425·9	1957	يولية	396·2	1956	يولية
429·2	1957	اغسطس	398·8	1956	اغسطس
432·2	1957	سبتمبر	401·3	1956	سبتمبر
434·8	1957	اكتوبر	403·9	1956	اكتوبر
437·2	1957	نوفمبر	406·4	1956	نوفمبر
439·8	1957	ديسمبر	408·6	1956	ديسمبر
442·5	1958	يناير	410·6	1957	يناير
445·1	1958	فبراير	412·7	1957	فبراير
447·8	1958	مارس	414·9	1957	مارس
450·7	1958	ابريل	417·1	1957	ابريل
453·6	1958	مايو	419·9	1957	مايو
456·9	1958	يونية	422·8	1957	يونية
5295·7	المجموع		4913·2	المجموع	
441·3	المتوسط		409·4	المتوسط	

من متوسطات البيانات فى كل جزء يتضح أن هناك زيادة مقدارها $31.9 = 441.3 - 409.4$ فى 12 شهر أو $31.9 / 12 = 2.66$ فى الشهر . بالإضافة المتتالية لـ 2.66 إلى 456.9 ، وهو آخر رقم متاح ويقابل شهر يونيو 1958 ، فإنه يمكن أن نحصل على القيم الاتجاهية عن سنة 1959 كما هو موضح بالعمود الثالث بالجدول ١٦–٣٤ (١) أدناه .

لتقدير عنصر الموسمية S ، فإننا تستخدم الدليل الموسمى الذى حصلنا عليه فى المسألة ١٦–١٠ ، على الرغم من أنه يمكن أن نستخدم الدليل الموسمى الذى حصلنا عليه باستخدام طرق أخرى . هذا الدليل الموسمى قد كرر فى الصف الرابع بالجدول ١٦ – ٣٤ (١) .

من الشكل ١٦–٦ بالمسألة ١٦–١٦ يتضح أن تقدير العناصر الدورية وغير المنتظمة CI يختلف عن 100% بمقدار أقل من 2.5% بهذا فلو افترضنا أن $CI = 100\% = 1$ أى $Y = T \times C \times S \times I = (T \times S)(C \times I) = T \times S$ فإننا يجب ألا نكون أعلى بأكثر من 2.5% فى Y .

جدول ١٦-٣٤ (ا)	يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونيه	يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفبر	ديسمبر
القيم الاتجاهية T لسنة 1958						456·9	459·6	462·2	464·9	467·5	470·2	472·9
القيم الاتجاهية T لسنة 1959	475·5	478·2	480·8	483·5	486·2	488·8	491·5	494·1	496·8	499·5	502·1	504·8
الدليل الموسمى ($S\%$)	119·8	107·2	103·4	93·5	87·2	81·5	83·4	89·5	96·4	106·0	112·3	119·6
الطاقة المتنبؤ بها لسنة 1959 ($T \times S$) (بالمليون kWh)	570	513	497	452	424	398	410	442	479	529	564	604

بضرب قيم T لسنة 1959 بقيم S المقابلة (تذكر أن S هى نسبة مئوية) فإننا نحصل على القيم الشهرية المتوقعة أو المسقطة لسنة 1959 المعطاة فى الصف الأخير بالجدول ١٦-٣٤ (ا) أعلاه . على سبيل المثال ، القيمة المتوقعة ليناير 1959 هى $570 = (1.198)(475.5)$ وهكذا .

(ب) القيم الشهرية الفعلية لسنة 1959 ، موضحة بالجدول التالى ١٦-٣٤ (ب) وهى تظهر اتفاقا جيدا مع القيم المتنبؤ بها .

جدول ١٦-٣٤ (ب)	يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونيو	يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفبر	ديسمبر
الطاقة الفعلية لسنة 1959 (بالمليون kWh)	563	509	497	454	424	404	415	446	478	524	561	594

المصدر : استقصاء الأعمال الجارية

مسائل اضافية

التحركات المميزة فى السلاسل الزمنية :

٢٠-١ إلى أى من التحركات المميزة فى السلاسل الزمنية ترتبط بصورة أساسية ما يلى :

(ا) كساد مؤقت (ب) زيادة العمالة فى خلال أشهر الصيف

(ﺟ) انخفاض معدل الوفيات الراجع إلى التقدم فى العلم .

(د) اضراب فى صناعة الصلب .

(ﻫ) الزيادة المستمرة فى الطلب على سيارات الركوب الصغيرة .

ج : (ا) دورية (ب) موسمية (ﺟ) اتجاه عام طويل المدى .

(د) غير منتظمة (ﻫ) اتجاه عام طويل المدى .

المتوسطات المتحركة :

١٦–٢١ إذا أعطينا الأرقام 1,0,1,0,−1,0,1,0,−1 حدد متوسطا متحركا من الرتبة
(ا) الثانية (ب) الثالثة (جـ) الرابعة (د) الخامسة .

ج : (ا) 0.5, −0.5, −0.5, 0.5, 0.5, −0.5, −0.5, 0.5
(ب) 0,−1/3, 0, 1/3, 0,−1/3, 0 (جـ) 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 (د) 1/5, 0,−1/5, 0, 1/5

١٦–٢٢ أثبت أنه إذا كانت متتالية من الأرقام لها دورة مقدارها N (أى أن المتتالية تعيد نفسها بعد N حد) فإن كل متوسط متحرك رتبته أقل من N له دورة N . فسر إجابتك بالرجوع إلى المسألة ١٦–٢١ .

١٦–٢٣ (ا) فى المسألة ١٦–٢٢ ماذا يحدث فى حالة المتوسط المتحرك من الدرجة N ؟ (ب) ماذا يحدث إذا كانت الرتبة أكبر من N ؟ فسر إجابتك بالرجوع إلى المسألة ١٦–٢١ .

١٦–٢٤ أثبت أنه إذا كان كل رقم فى متتالية يزيد (أو ينقص) بمقدار ثابت ، فإن المتوسط يزيد أيضا (أو ينقص) بمقدار ثابت .

١٦–٢٥ أثبت أنه إذا كان كل رقم فى متتالية يضرب فى (أو يقسم على) ثابت يختلف عن الصفر ، فإن المتوسط المتحرك يضرب أيضا فى (أو يقسم على) هذا الثابت .

١٦–٢٦ أوجد المتوسط المتحرك المرجح للأرقام فى المسألة ١٦–٢١ (ب) ، (جـ) ، (د) إذا كانت الأوزان هى على الترتيب : (ب) 1, 2, 1 (جـ) 1, 2, 2, 1 (د) 1, 2, 2, 2, 1
قارن بنتائج المسألة ١٦–٢١ .

ج : (ب) 0, −0.5, 0, 0.5, 0, −0.5, 0 (جـ) 1/6 1/6. 1/6. 1/6. 1/6. 1/6. (د) 0, 0, 0, 0, 0

١٦–٢٧ (ا) أثبت الخصائص فى المسائل ١٦–٢٤ و ١٦–٢٥ للمتوسطات المتحركة المرجحة (ب) هل نتائج المسألة ١٦–٢٢ تنطبق فى حالة المتوسطات المتحركة المرجحة ؟

١٦–٢٨ متتالية بها (ا) 24 (ب) 25 (جـ) 200 رقم . ما هو عدد الأرقام الموجودة إذا استخدم متوسط متحرك من الرتبة 5 ؟

ج : (ا) 20 ، (ب) 21 ، (جـ) 196

١٦–٢٩ متتالية بها M . عدد (ا) أثبت أن متوسط متحرك من الدرجة N سيكون به $M - N + 1$ رقم . فسر إجابتك باستخدام قيم مختلفة لـ N و M (ب) ناقش الحالة عندما $M = N$.

١٦-٣٠ الجدول ١٦-٣٥ يوضح متوسط الاستهلاك الشهرى ، بآلاف البالات من القطن المحلى والأجنبى بالولايات المتحدة الأمريكية للسنوات 1949 - 1958 . أوجد (ا) 2 سنة متوسط متحرك ، (ب) 2 سنة متوسط متحرك مركزى ، (جـ) 3 سنوات متوسط متحرك ، (د) 4 سنوات متوسط متحرك مركزى (هـ) 6 سنوات متوسط متحرك مركزى .

جدول ١٦ - ٣٥

السنة	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958
استهلاك القطن بالولايات المتحدة (بآلاف البالات)	656	804	836	765	777	711	755	747	696	677

المصدر : استقصاء الأعمال الجارية

ج : (ا) 686, 722, 751, 733, 744, 771, 800, 820, 730

(ب) 704, 736, 742, 738, 758, 786, 810, 775

(جـ) 707, 733, 738، 748, 751, 793, 802, 765

(د) 723, 737, 750, 762, 784, 780

(هـ) 734, 753, 770, 766

١٦-٣١ ارسم المتوسطات المتحركة فى المسألة ١٦-٣٠ مع البيانات الأصلية وناقش النتائج التى حصلت عليها .

١٦-٣٢ (ا) وضح أن 2 سنة متوسط متحرك بالمسألة ١٦ - ٣٠ (ب) يكافئ 3 سنوات متوسط متحرك مرجح بأوزان 1, 2, 1 على الترتيب . مثل بحسابات رقمية مباشرة . (ب) وضح أن 6 سنوات متوسط متحرك مركزى بالمسألة ١٦-٣٠ (جـ) يكافئ متوسطا متحركا مرجحا بأوزان مناسبة .

١٦-٣٣ (ا) لبيانات المسألة ١٦ - ٣٠ حدد متوسطا متحركا مرجحا من الرتبة 3 إذا كانت الأوزان المستخدمة 1, 4, 1 .

(ب) ارسم هذا المتوسط المتحرك وقارن بالمسألة ١٦ - ٣٠ (جـ)

ج : 701, 740, 746, 729, 764, 779, 819, 785

١٦–٣٤ الجدول ١٦–٣٦ يوضح اجمالى المبيعات الشهرية بالآلاف لصنع عربات ركوب بالولايات المتحدة خلال السنوات 1953 — 1958 .

كون (ا) 12 شهرا متوسطا متحركا (ب) 12 شهرا متوسطا متحركا مركزيا (جـ) 6 أشهر متوسط متحرك مركزى .

فى الأجزاء (ب) و(جـ) ارسم المتوسط المتحرك مع البيانات الأصلية وقارن بين النتائج .

جـدول ١٦ – ٣٦

	يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونية	يولية	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفبر	ديسمبر
1953	452·6	485·3	566·1	595·8	548·3	585·7	596·9	512·7	476·2	528·8	378·9	389·6
1954	454·6	446·7	531·5	534·7	497·1	507·1	451·7	445·3	301·0	221·2	498·2	669·9
1955	635·5	677·7	791·3	753·4	721·1	647·7	658·7	620·6	467·8	505·2	746·0	695·1
1956	591·0	560·9	583·2	552·9	474·0	445·8	441·0	417·0	203·9	352·1	576·7	617·6
1957	628·0	570·0	585·7	541·7	537·1	496·3	484·7	521·3	318·3	291·1	583·8	555·2
1958	478·4	396·2	359·5	322·5	352·1	342·2	316·4	195·0	102·7	272·2	511·9	608·7

المصدر : استقصاء الأعمال الجارية

تقدير الاتجاه العام :

١٦–٣٥ احصل على القيم الاتجاهية لبيانات المسألة ١٦–٣٠ باستخدام طريقة أشباه المتوسطات حيث يأخذ كتوسط : (ا) الوسط الحسابى (ب) الوسيط . كون رسما يوضح النتائج التى حصلت عليها .

ج : (ا) 788, 778, 768, 758, 747, 737, 727, 717, 707, 697

(ب) 803, 790, 777, 764, 751, 737, 724, 711, 698, 685

١٦–٣٦ حل المسألة ١٦–٣٠ باستخدام (ا) طريقة التمهيد باليد (ب) متوسط متحرك من رتبة مناسبة . قارن بنتائج المسألة ١٦–٣٥ .

١٦–٣٧ (ا) استخدم طريقة المربعات الصغرى لتوفيق خط لبيانات المسألة ١٦–٣٠ .

(ب) من النتائج فى (ا) أوجد القيم الاتجاهية . قارن بنتائج المسائل ١٦–٣٥ و ١٦–٣٦

ج : (ا) $Y = 742.4 - 3.358\ X$ ، حيث X نصف سنة ونقطة الأصل هى 1 يناير 1954 .

(ب) 758·0, 754·7, 751·3, 747·9, 744·6, 741·2, 737·9, 734·5, 731·1, 727·8

١٦–٣٨ (ا) وفق القطع $Y = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$ لبيانات المسألة ١٦–٨ باستخدام المتوسطات بالجدول ١٦–١٣ بالمسألة ١٦–٩ (ب) قارن النتائج فى (ا) بخط المربعات الصغرى بالمسألة ١٦–٩ وقارن بالقيم الاتجاهية .

ج : (ا) $Y = 351·1 + 13·188X + 0·3110X^2$ حيث X مقاسة بوحدات نصف سنوية ونقطة الأصل عند 1 يناير 1955 .

١٦–٣٩ احصل على القيم الاتجاهية لبيانات المسألة ١٦–٣٤ باستخدام (ا) طريقة أشباه المتوسطات ، (ب) طر – التمهيد باليد ، (ح) 12 شهر متوسط متحرك مركزى ، (د) منحنى مربعات صغرى ملائم.

(لتحديد ذلك استخدم رسم البيانات الأصلية المستخدم فى المسألة ١٦–٣٤) ناقش مزايا وعيوب كل طريقة.

تقدير التغيرات الموسمية . الدليل الموسمى :

١٦–٤٠ الجدول ١٦–٣٧ يوضح ، لبلد معينة ، الانتاج الشهرى من الزبدة بملايين الكيلوجرامات خلال السنوات 1951 — 1958 .

(ا) ارسم البيانات (ب) كون الدليل الموسمى مستخدما طريقة متوسط النسب المئوية.

عدل البيانات لتأخذ فى الاعتبار السنوات الكبيسة قبل الحصول على الدليل .

جدول ١٦–٣٧

	يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونية	يولية	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفبر	ديسمبر
1951	85·6	80·9	92·2	101·8	132·6	141·2	130·5	119·0	93·6	86·6	68·4	70·4
1952	78·7	78·8	91·5	102·5	135·0	128·0	117·7	105·7	92·1	87·7	75·9	94·6
1953	103·9	101·9	121·4	133·5	156·0	154·0	135·6	118·7	95·0	91·6	91·3	109·0
1954	118·7	116·6	143·3	142·0	164·5	160·9	129·7	109·4	92·6	87·8	86·8	97·0
1955	108·1	104·3	121·1	129·4	157·9	151·9	123·0	102·1	91·9	94·7	92·7	105·8
1956	114·6	114·1	129·6	135·4	151·9	149·0	127·6	109·8	92·4	93·1	92·3	103·4
1957	115·3	110·3	124·6	132·3	159·3	148·1	125·8	106·9	90·1	100·3	94·1	105·7
1958	118·6	113·4	129·5	130·3	150·6	144·7	126·9	97·7	86·7	91·9	90·9	107·2

١٦–٤١ أوجد الدليل الموسمى لبيانات المسألة ١٦–٤٠ باستخدام طريقة الاتجاه العام للنسب المئوية أو الاتجاه العام للنسب . لحصول على القيم الاتجاهية ، وفق منحنى مربعات صغرى ملائم للمتوسطات الشهرية للسنوات المعطاة.

١٦–٤٢ أوجد الدليل الموسمى لبيانات المسألة ١٦–٤٠ باستخدام طريقة النسب المئوية للمتوسط المتحرك أو نسبة المتوسط المتحرك.

١٦–٤٣ أوجد الدليل الموسمى لبيانات المسألة ١٦–٤٠ باستخدام طريقة الوصلة النسبية.

١٦–٤٤ الجدول ١٦–٣٨ يوضح القيم المقدرة لمبيعات محلات البيع بالتجزئة بملايين الدولارات وذلك بالولايات المتحدة خلال السنوات 1958 — 1951

(ا) ارسم البيانات

(ب) أوجد الدليل الموسمى باستخدم طريقة متوسط النسب المئوية.

جـدول ١٦–٣٨

	يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونيو	يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفبر	ديسمبر
1951	12·63	11·72	13·43	12·53	13·29	13·27	12·36	13·27	13·10	13·86	13·39	15·38
1952	11·84	11·74	12·74	13·40	14·85	13·81	13·40	13·45	13·62	14·82	14·01	16·91
1953	13·05	12·33	13·96	14·17	14·66	14·58	14·38	14·18	14·08	14·95	13·96	16·44
1954	12·34	12·06	13·54	14·32	14·25	14·66	14·39	13·90	14·14	14·66	14·53	17·87
1955	13·15	12·64	14·57	15·49	15·33	15·60	15·26	15·48	15·76	15·68	15·75	19·12
1956	13·73	13·55	15·72	14·89	16·11	16·58	15·38	16·19	15·58	16·13	16·49	19·38
1957	14·74	14·06	15·79	16·44	17·20	17·11	16·86	17·49	16·37	16·95	17·13	19·84
1958	15·29	13·78	15·55	16·27	17·36	16·60	16·60	17·00	16·33	17·36	17·04	21·17

المصدر : استقصاء الأعمال الجارية

١٦–٤٥ أوجد الدليل الموسمي لبيانات المسألة ١٦–٤٤ باستخدام طريقة النسب المئوية للاتجاه العام أو النسبة للاتجاه العام .

١٦–٤٦ أوجد الدليل الموسمي لبيانات المسألة ١٦–٤٤ باستخدام طريقة النسبة للمتوسط المتحرك .

١٦–٤٧ أوجد الدليل الموسمي لبيانات المسألة ١٦–٤٤ باستخدام طريقة الوصلات النسبية .

١٦–٤٨ الجدول ١٦–٣٩ يوضح أجور الشحن بعربات السكك الحديدية بالولايات المتحدة بآلاف عربات السكك الحديدية خلال السنوات 1958 — 1951 . (أ) ارسم هذه البيانات .

(ب) أوجد الدليل الموسمي باستخدام طريقة متوسط النسب المئوية .

جـدول ١٦–٣٩

	يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونيو	يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفبر	ديسمبر
1951	3661	2834	2999	3152	3977	3295	3807	3307	3312	4317	3139	2700
1952	3562	2911	2868	2912	3678	2606	2969	3149	3364	4156	3139	2672
1953	3351	2730	2801	2957	3883	3204	3758	3229	3153	4024	2797	2413
1954	2967	2462	2412	2445	3345	2730	3251	2708	2711	3629	2685	2518
1955	2505	2556	3256	2757	3754	3052	3015	3883	3148	3282	3758	2669
1956	2713	2751	3517	2971	3835	3143	2397	3700	3155	3284	3740	2641
1957	2565	2616	3446	2696	3558	2959	2708	3737	2849	2920	3223	2221
1948	2164	2108	2702	2105	2729	2489	2138	3146	2570	2733	2462	2188

المصدر : استقصاء الأعمال الجارية

١٦–٤٩ حل المسألة ١٦–٤٨ بطريقة النسبة إلى الاتجاه العام .

١٦–٥٠ حل المسألة ١٦–٤٨ بطريقة النسبة إلى المتوسط المتحرك .

١٦–٥١ حل المسألة ١٦–٤٨ بطريقة الوصلات النسبية .

١٦-٥٢ أعد حل (ا) المسألة ١٦-٨ ، (ب) المسألة ١٦-٩ ، (ج) المسألة ١٦-١٠ (د) المسألة ١٦-١١ ، باستخدام البيانات بعد تعديلها لمراعاة الأشهر الكبيسة وحدد ما إذا كان التعديل يؤدى إلى تغير معنوى فى الدليل الموسمى النهائى الذى حصلت عليه .

١٦-٥٣ (ا) احسب الدليل الموسمى للسنوات الأربع الأخيرة والسنوات الأربع الأولى لبيانات المسألة ١٦-٨ باستخدام أى طريقة .

(ب) قارن الدليلين الذين حصلت عليهما واشرح الاختلاف إذا وجد .

تخليص البيانات من أثر الموسم :

١٦-٥٤ (ا) خلص بيانات المسألة ١٦-٤٠ من أثر الموسم ، مستخدما أى دليل موسمى من الذى حصلت عليه فى المسائل ١٦-٤٠ إلى ١٦-٤١ .

(ب) ارسم البيانات المخلصة من أثر الموسم وفسر النتائج .

١٦-٥٥ (ا) عدل بيانات المسألة ١٦-٤٤ لاستبعاد التغيرات الموسمية باستخدام أى من نتائج المسائل ١٦-٤٤ إلى ١٦-٤٧ .

(ب) ارسم البيانات المعدلة موسميا وفسر النتائج التى حصلت عليها .

١٦-٥٦ (ا) خلص بيانات المسألة ١٦-٤٨ من أثر الموسم باستخدام الأدلة الموسمية للمسائل ١٦-٤٨ إلى ١٦-٥١ .

(ب) ارسم البيانات المعدلة موسميا وفسر النتائج التى حصلت عليها .

تقدير التغيرات الدورية وغير المنتظمة :

١٦-٥٧ (ا) عدل بيانات المسألة ١٦-٥٤ لاستبعاد أثر الاتجاه العام باستخدام أى طريقة .

(ب) ارسم البيانات التى حصلت عليها .

(ج) احسب 3 أشهر متوسط متحرك أو 5 أشهر متوسط متحرك للبيانات فى (ا) .

(د) فسر أى تذبذبات مشاهدة وعلى وجه الخصوص حدد ما إذا كان هناك أى وجود لتحركات دورية .

١٦-٥٨ الجدول ١٦-٤٠ يوضح ، للبلد المشار إليه بالمسألة ١٦-٤٠ ، متوسط الانتاج الشهرى من الزبد بملايين الكيلوجرامات خلال السنوات 1930 — 1958 .

(ا) ارسم البيانات وناقش امكانية وجود دورات بها .

(ب) قارن النتائج التى توصلت إليها فى (ا) مع النتائج التى توصلت إليها فى المسألة ١٦ - ٥٧ (ج) وفسر أى تعارض .

جـدول ١٦–٤٠

السنة	1930	1931	1932	1933	1934	1935	1936	1937	1938	1939	1940	1941	1942	1943	1944
المتوسط الشهرى	133·1	139·0	141·1	146·9	141·2	136·0	135·8	135·3	148·8	148·5	153·1	156·0	147·0	139·5	124·0

السنة	1945	1946	1947	1948	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958
المتوسط الشهرى	113·6	97·6	110·8	100·9	117·7	115·5	100·2	99·0	117·7	120·7	115·2	117·8	117·7	115·5

١٦–٥٩ حل المسائل ١٦–٥٧ و ١٦–٥٨ للبيانات المخلصة من أثر الموسم بالمسألة ١٦–٥٦ . المتوسط الشهرى للتأمين على حمولات عربات السكك الحديدية معبرا عنه بآلاف عربات السكك الحديدية موضح للسنوات 1958 – 1930 بالجدول التالى

جـدول ١٦–٤١

السنة	1930	1931	1932	1933	1934	1935	1936	1937	1938	1939	1940	1941	1942	1943	1944
المتوسط الشهرى	3823	3096	2348	2435	2570	2625	3009	3139	2538	2826	3030	3529	3564	3537	3617

السنة	1945	1946	1947	1948	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958
المتوسط الشهرى	3493	3445	3709	3560	2993	3242	3375	3165	3185	2826	3136	3154	2958	2517

١٦–٦٠ فى تعديل البيانات للتخلص من أثر الاتجاه العام والتغيرات الموسمية ، هل يحدث اختلاف فى النتائج حسب أى منهم الذى نبدأ به أولا ؟ مثل إجابتك (ا) نظريا (ب) باستخدام أحد السلاسل الزمنية بالمسائل ١٦–٤٠ ، ١٦ – ٤٤ أو ١٦ – ٤٨

١٦–٦١ (ا) حل المسألة ١٦–١٧ باستخدام 12 شهرا متوسطا متحركا مركزيا وارسم البيانات (ب) ما هى الاستنتاجات التى تحصل عليها من النتائج فى (ا) ؟

١٦–٦٢ (ا) أوجد التوزيع التكرارى لحجم التغيرات غير المنتظمة الموجود بالمسألة ١٦–١٥ و ١٦–١٦ .

(ب) هل التوزيع التكرارى الذى حصلت عليه فى (ا) يمكن تقريبه بالتوزيع الطبيعى ؟ إذا كان هذا صحيحا أذكر مبررات ذلك .

التنبـــؤ :

١٦–٦٣ (ا) استخدم أى نتائج بالمسائل ١٦–٤٠ إلى ١٦ – ٤٣ ، ١٦ – ٥٧ و ١٦–٥٨ للتنبؤ بانتاج الزبد خلال سنة 1959.

(ب) ناقش المصادر الممكنة للخطأ .

(ﺟ) قارن تنبؤاتك بالقيم الفعلية لسنة 1959 المعطاة بالجدول ١٦–٤٢ .

جــدول ١٦–٤٢

يناير	فبراير	مارس	بريل	مايو	يونية	يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفبر	ديسمبر
116·3	108·2	121·4	126·8	143·4	135·6	112·5	90·9	82·6	91·2	92·1	108·0

١٦–٦٤ (ا) استخدم أى نتائج فى المسائل ١٦–٤٤ إلى ١٦–٤٧ للتنبؤ بمبيعات جميع متاجر التجزئة بالولايات المتحدة خلال سنة 1959 .

(ب) ناقش المصادر الممكنة للخطأ .

(ﺟ) قارن تنبؤاتك بالقيم الفعلية لسنة 1959 المعطاة بالجدول ١٦–٤٣ .

جدول ١٦–٤٣

يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونية	يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفبر	ديسمبر
16·23	14·96	17·19	17·59	18·60	18·71	18·33	18·05	17·57	19·10	17·64	21·45

المصدر : استقصاء الأعمال التجارية

١٦–٦٥ (ا) استخدم أى نتائج فى المسائل ١٦–٤٨ إلى ١٦–٥١ و ١٦–٥٩ للتنبؤ بالشحن على عربات السكك الحديدية بالولايات المتحدة خلال سنة 1959 .

(ب) ناقش المصادر الممكنة للخطأ .

(ﺟ) قارن تنبؤاتك بالقيم الفعلية لسنة 1959 المعطاة بالجدول ١٦–٤٤

جــدول ١٦–٤٤

يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونية	يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفبر	ديسمبر
2742	2291	2398	2489	3419	2813	2249	2712	2190	2908	2403	2376

المصدر : استقصاء الأعمال الجارية

مسـائل متنوعـة

١٦-٦٩ حلل كلا من السلاسل الزمنية المعطاة بالجدول ١٦-٥٤ والتى تشير إلى بيانات أحد الدول . يمكن استخدام بيانات السنوات حتى 1958 . إذا كان هذا مرغوبا فيه . وتنبؤ بالنتائج لسنة 1959 ، مقارنا بالبيانات الفعلية لهذه السنة . لاحظ أن البيانات للسنوات 1958 — 1929 فى الجزء الأول من الجدول معطاة على أساس متوسطات شهرية لكل سنة ، بينما البيانات فى نهاية الجدول معطاة على أساس قيم شهرية لكل سنة .

جدول ١٦-٥٤

السنة	وحدات البناء المستديمة غير الريفية تحت (التأسيس (بالآلاف)	مجموع الاعلانات فى الصحف فى 52 مدينة (ملايين السطور)	الانتاج من ألواح الخشب (آلاف الأمتار المكعبة)	انتاج الألومنيوم الخام (آلاف الأطنان)	قيمة نشاط الأبنية العامة الجديدة (ملايين الدولارات)
1929	42·4	158·1	3074	9·50	207
1930	27·5	137·9	2171	9·54	238
1931	21·2	122·2	1377	7·40	222
1932	11·2	97·1	902	4·37	155
1933	7·8	88·8	1225	3·55	137
1934	10·5	98·2	1291	3·09	184
1935	18·4	103·9	1628	4·97	186
1936	26·6	115·0	2030	9·37	293
1937	28·0	117·5	2166	12·20	258
1938	33·8	102·1	1804	11·95	285
1939	42·9	103·6	2096	13·63	317
1940	50·2	105·7	2411	17·19	302
1941	58·8	109·4	2801	25·76	479
1942	29·7	103·5	3028	43·43	888
1943	15·9	116·4	2857	76·68	527
1944	11·8	113·4	2745	64·70	256
1945	17·4	116·0	2344	41·26	200
1946	55·9	144·1	2843	34·14	186
1947	70·8	167·4	2950	47·65	277
1948	77·6	188·6	3064	51·96	392
1949	85·4	191·8	2742	50·29	522
1950	116·3	203·3	3242	59·89	572
1951	90·9	206·5	3126	69·74	771
1952	93·9	208·8	3122	78·11	898
1953	92·0	217·6	3062	104·33	936
1954	101·7	215·1	3030	121·71	973
1955	110·7	237·0	3154	130·48	977
1956	93·2	242·6	3219	139·91	1059
1957	86·8	235·8	2851	137·31	1168
1958	100·8	223·8	2798	130·46	1284

البيانات أعلاه تشير إلى متوسطات شهرية

جدول ١٦-٤٥ (تابع)

قيمة نشاط الأبنية العامة الجديدة ملايين الدولارات)	إنتاج الالومنيوم الخام (آلاف الأطنان)	الانتاج من ألواح الخشب (آلاف الأمتار المكعبة)	مجموع الاعلانات في الصحف في مدينة (مدين السطور	وحدات البناء المستديمة غير الريفية تحت التأسيس (بالآلاف)	السنة و الشهر
					1952
671	76.93	2694	178.1	64.9	يناير
636	72.37	2766	184.6	77.7	فبراير
722	77.07	2872	213.2	103.9	مارس
829	76.88	3123	218.4	106.2	ابريل
924	80.80	3049	225.6	109.6	مايو
1002	77.48	3214	209.3	103.5	يونية
1037	78.37	3213	175.4	102.6	يولية
1089	85.18	3489	186.6	99.1	اغسطس
1109	76.88	3569	214.5	100.8	سبتمبر
1071	77.31	3596	245.0	101.1	اكتوبر
922	74.64	3052	234.9	86.1	نوفمبر
769	83.42	2825	219.8	71.5	ديسمبر
					1953
732	89.90	2769	182.7	72.1	يناير
719	92.65	2754	186.1	79.2	فبراير
798	104.46	3091	231.7	105.8	مارس
880	102.07	3280	232.6	111.4	ابريل
953	105.46	3071	244.4	108.3	مايو
1034	104.15	3219	216.0	104.6	يونية
1089	109.29	3141	188.0	96.7	يولية
1097	110.55	3237	198.6	93.2	اغسطس
1143	109.33	3266	219.6	95.1	سبتمبر
1084	108.22	3326	244.4	90.1	اكتوبر
933	105.64	2893	241.3	81.5	نوفمبر
774	110.29	2695	224.3	65.8	ديسمبر
					1954
745	116.25	2746	182.9	66.4	يناير
730	110.48	2906	180.7	75.2	فبراير
792	122.34	3361	216.2	95.2	مارس
888	120.43	3307	233.3	107.7	ابريل
998	125.14	3324	234.6	108.5	مايو
1088	120.76	3124	216.6	116.5	يونية
1159	126.16	2724	185.8	116.0	يولية
1202	125.30	2956	199.4	114.3	اغسطس
1205	120.33	3279	218.9	115.7	سبتمبر
1103	125.09	3363	244.9	110.7	اكتوبر
964	121.25	3154	238.5	103.6	نوفمبر
804	127.04	3085	229.5	90.6	ديسمبر
					1955
742	128.20	2707	196.2	87.6	يناير
697	116.24	2845	194.4	89.9	فبراير
776	130.27	3268	242.5	113.8	مارس
898	126.39	3147	243.8	132.0	ابريل
1030	131.13	3327	260.4	137.6	مايو
1107	127.63	3491	243.7	134.5	يونية
1165	132.67	2946	212.3	122.7	يولية
1216	133.55	3554	219.8	124.7	اغسطس
1208	130.61	3442	246.2	114.9	سبتمبر
1131	134.66	3334	273.1	105.8	اكتوبر
971	133.69	3009	268.5	89.2	نوفمبر
783	140.75	2788	242.5	76.2	ديسمبر

البيانات أعلاه تشير إلى قيم شهرية

جـدول ١٦-٤٥ (تابع)

قيمة نشاط الأبنية العامة الجديدة (ملايين الدولارات)	الانتاج الالومنيوم الخام (آلاف الأطنان)	الانتاج من ألواح الخشب (آلاف الأمتار المكعبة)	مجموع الاعلانات في الصحف في مدينة (ملايين السطور)	وحدات البناء المستديمة غير الريفية تحت التأسيس (بالآلاف)	السنة و الشهر
					1955
741	140·39	2991	212·2	75·1	يناير
700	132·76	2993	218·3	78·4	فبراير
774	145·90	3182	251·3	98·6	مارس
932	144·73	3245	261·0	111·4	ابريل
1099	150·80	3545	268·5	113·7	مايو
1223	145·73	3437	239·3	107·4	يونية
1290	151·62	3175	214·0	101·1	يولية
1349	92·41	3669	227·3	103·9	اغسطس
1341	132·32	3263	244·1	93·9	سبتمبر
1296	149·13	3496	269·9	93·6	اكتوبر
1066	145·08	3036	262·0	77·4	نوفمبر
901	148·39	2597	243·1	63·6	ديسمبر
					1956
896	147·03	2693	210·5	64·2	يناير
793	119·06	2687	207·1	65·8	فبراير
885	135·71	2914	249·5	87·0	مارس
1055	139·15	3003	245·4	93·7	ابريل
1204	145·17	3113	265·6	103·0	مايو
1326	138·01	2952	240·6	99·9	يونية
1303	142·04	2793	204·0	97·8	يولية
1436	143·45	3194	216·4	100·0	اغسطس
1473	129·28	2970	241·3	91·9	سبتمبر
1453	133·76	3097	259·0	97·0	اكتوبر
1170	135·02	2559	250·0	78·2	نوفمبر
1023	140·04	2239	239·5	63·4	ديسمبر
					1957
951	139·91	2526	197·1	67·9	يناير
861	121·98	2388	188·3	66·1	فبراير
938	134·02	2548	227·8	81·4	مارس
1109	125·00	2676	228·0	99·1	ابريل
1274	126·33	2824	240·9	108·5	مايو
1422	115·33	2889	226·2	113·0	يونية
1486	118·54	2810	198·0	112·8	يولية
1555	125·42	3056	211·6	124·0	اغسطس
1604	125·94	3143	224·6	121·0	سبتمبر
1600	139·84	3272	259·2	115·0	اكتوبر
1403	140·96	2731	252·9	109·4	نوفمبر
1209	152·30	2716	231·0	91·2	ديسمبر
					1958
1130	156·7	2650	193·5	87·0	يناير
1032	142·1	2642	196·1	94·5	فبراير
1126	157·2	2964	236·5	121·0	مارس
1285	155·2	3121	255·0	142·2	ابريل
1468	163·9	3163	263·8	137·0	مايو
1637	167·3	3216	237·0	136·7	يونية
1611	179·2	3136	220·4	128·8	يولية
1608	172·8	3171	234·4	129·3	اغسطس
1528	168·2	3324	246·9	120·3	سبتمبر
1420	173·7	3304	271·3	105·5	اكتوبر
1119	153·7	2892	259·5	92·5	نوفمبر
1013	163·0	2947	250·9	83·7	ديسمبر

البيانات أعلاه تشير إلى قيم شهرية

الفصل السابع عشر

الأرقـــام القياســـية

الرقم القياسى :

الرقم القياسى هو مقياس احصائى مصمم لاظهار التغيرات فى متغير أو مجموعة مرتبطة من المتغيرات بالنسبة للزمن ، المكان الجغرافى ، أو أى خاصية أخرى مثل الدخل ، الوظيفة ، وغير ذلك . وتسمى أحيانا المجموعة من الأرقام القياسية لسنوات أو أماكن مختلفة ، وما إلى ذلك ، بالسلسلة القياسية .

تطبيقات الأرقام القياسية :

باستخدام الأرقام القياسية يمكننا ، على سبيل المثال ، مقارنة الغذاء أو تكاليف المعيشة الأخرى فى أحد المدن خلال سنة معينة بتلك خلال سنوات سابقة أو يمكن مقارنة انتاج الصلب خلال سنة معينة فى أحد مناطق البلد بالإنتاج فى منطقة أخرى . وعلى الرغم من أن الأرقام القياسية تستخدم أساسا فى الأعمال والاقتصاد ، فإنه يمكن تطبيقها فى مجالات كثيرة مختلفة . فى مجال التعليم ، على سبيل المثال ، نستخدم الأرقام القياسية لمقارنة ذكاء الطلبة فى مناطق مختلفة أو سنوات مختلفة .

كثير من الوكالات الحكومية والخاصة تقوم بحساب أرقام قياسية أو أدلة كما تسمى فى أغلب الأحيان ، وذلك بهدف التنبؤ بأحوال الأعمال والاقتصاد ، وكذلك الحصول على معلومات عامة ، وما إلى ذلك . فمثلا هناك الأرقام القياسية للأجور ، الأرقام القياسية للإنتاج ، الأرقام القياسية للبطالة وغير ذلك . ومن أكثر الأرقام المعروفة الرقم القياسى لتكاليف المعيشة أو الرقم القياسى للمستهلك والذى يعده مكتب احصاءات العمل . وفى كثير من عقود العمل يظهر شرط معين للتدرج والذى بمقتضاه تعطى زيادة تلقائية فى الأجور مقابلة للزيادة فى الرقم القياسى لتكاليف المعيشة .

فى هذا الفصل سنهتم أساسا بالأرقام القياسية التى تظهر التغيرات بالنسبة للزمن ، على الرغم من أن الطرق التى ستشرح يمكن تطبيقها على الحالات الأخرى .

مناسيب الأسعار :

من أبسط الأمثلة للرقم القياسى هو منسوب السعر ، وهو نسبة السعر لسلعة واحدة فى فترة المقارنة إلى سعرها فى فترة أخرى تسمى بفترة الأساس أو فترة الاسناد . وللتسهيل سوف نفترض أن الأسعار ثابتة لأى فترة . فإذا لم يكن هذا صحيحا فإنه يمكن استخدام متوسط ملائم للفترة حتى نجعل هذا الفرض صحيحاً .

إذا كانت p_o تمثل سعر السلعة خلال فترة الأساس و p_n سعرها خلال فترة المقارنة ، فإنه بالتعريف .

$$\text{منسوب السعر} \quad \frac{p_n}{p_o} \qquad (1)$$

ويعبر عنه بشكل عام فى صورة نسبة مئوية بضربه فى 100

وبشكل أكثر عمومية إذا كانت p_b ، p_a هى أسعار سلعة خلال الفترات b ، a على الترتيب ، فإن منسوب السعر فى الفترة b بالنسبة للفترة a يعرف بأنه p_b/p_a ويرمز له بالرمز $p_{a/b}$ ، وسنجد أن هذا الرمز مفيد فيما بعد . بهذا الرمز فإن منسوب السعر بالمعادلة (١) يمكن أن يرمز له بالرمز $p_{o/n}$.

مثال ١ : افترض أن أسعار المستهلكين لعنصر معين فى السنوات 1960 ، 1955 هى 30 ، 52 بنسا جديدا على الترتيب . فإذا أخذنا 1955 كسنة أساس و 1960 سنة المقارنة ، فإن

$$\text{منسوب السعر} = p_{1955|1960} = \frac{\text{السعر فى } 1960}{\text{السعر فى } 1955} = \frac{30\text{ p}}{25\text{ p}} = 1{\cdot}2 = 120\%$$

أو باختصار 120 ، بحذف علامة % كما هو متبع غالبا فى المؤلفات الاحصائية . هذه النتيجة تعنى ببساطة أن سعر العنصر سنة 1960 . أصبح % 120 من سعره فى سنة 1955 أى زاد بنسبة % 20 .

مثـــال ٢ : بأخذ 1960 كسنة أساس و 1955 هى سنة المقارنة فى المثال ١ ، فإن

$$\text{منسوب السعر} = p_{1960|1955} = \frac{\text{السعر فى } 1955}{\text{السعر فى } 1960} = \frac{25\text{ p}}{30\text{ p}} = \frac{5}{6} = 83\tfrac{1}{3}\%$$

أو باختصار $83^1/_3$ وهذا يعنى أنه فى 1955 كان سعر العنصر هو $83^1/_3\%$ من سعره فى 1960 ، أى أنه كان ينقص بنسبة $16^2/_3\%$.

لاحظ أن منسوب السعر لفترة معينة بالنسبة لنفس الفترة سيكون دائما 100% أو 100 . وعلى وجه الخصوص فإن منسوب السعر المقابل لفترة الأساس يصبح دائما 100 . وهذا يوضح الرمز الذى يستخدم غالبا فى المؤلفات الاحصائية بكتابة ، على سبيل المثال ، 100 = 1955 للإشارة إلى أن سنة 1955 أخذت كسنة أساس .

خصائص مناسيب اسعار :

إذا كانت p_a ، p_b ، p_c ، . . . تعبر عن أسعار الفترات a و b و c . . . على الترتيب ، فإن الخصائص التالية تتحقق لمناسيب الأسعار المرتبطة بها . الاثباتات تحصل عليها مباشرة من التعاريف .

١ ــ خاصية التطابق :

$$p_{a|a} = 1$$

وهذه تقرر ببساطة أن منسوب السعر لفترة معينة بالنسبة لنفس الفترة تساوى 1 أو 100 % .

٢ ــ خاصية الانعكاس فى الزمن :

$$p_{a|b}\,p_{b|a} = 1 \quad \text{or} \quad p_{a|b} = \frac{1}{p_{b|a}}$$

وهذه تقرر أنه إذا أحللنا فترتين كلا محل الأخرى ، فإن مناسيب الأسعار المقابلة تكون كل منها معكوس الأخرى .

٣ ــ خاصية الدورية او الدائرية :

$$p_{a|b}\,p_{b|c}\,p_{c|a} = 1$$
$$p_{a|b}\,p_{b|c}\,p_{c|d}\,p_{d|a} = 1$$
وهلم جرا

٤ ــ خاصية الدورية او الدائرية المعدلة :

$$p_{a|b}\,p_{b|c} = p_{a|c}$$
$$p_{a|b}\,p_{b|c}\,p_{c|d} = p_{a|d}$$
وهلم جرا

وهذه نحصل عليها مباشرة من الخاصيتين ٢ ، ٣ .

مناسيب الكمية او الحجم :

بدلا من مقارنة أسعار السلعة ، قد نهتم بمقارنة كيات أو حجوم السلعة ، مثل كية أو حجم الانتاج ، الاستهلاك ، التصدير ، وغيرها . فى مثل هذه الحالات نتكلم عن مناسيب الكية أو مناسيب الحجم للتسهيل ، كما فى حالة الأسعار ، نفترض أن الكيات ثابتة فى أى فترة . إذا لم يكن هذا صحيح ، فإنه يمكن استخدام متوسط ملائم لجعل هذا الفرض ممكنا .

إذا كانت q_0 تعبر عن كية أو حجم السلعة المنتجة ، المستهلكة ، المصدرة وغير ذلك خلال فترة الأساس ، بينما q_n تعبر عن كية الانتاج ، الاستهلاك وغير ذلك المقابلة ، خلال فترة المقارنة ، فإننا نعرف .

$$\frac{q_n}{q_o} = \text{منسوب الكية أو الحجم} \quad (٢)$$

ويعبر عنها بصفة عامة فى شكل نسب مئوية .

كما فى حالة مناسيب السعر ، فإننا نستخدم الرمز $q_{a|b} = q_b/q_a$ للتعبير عن منسوب السعر فى الفترة b بالنسبة للفترة a نفس الملاحظات التى تتعلق بمناسيب السعر تنطبق على مناسيب الكية .

مناسيب القيمة :

إذا كان p هو سعر السلعة خلال فترة ما و q هى الكية أو الحجم المنتج ، المباع ، وغير ذلك ، خلال الفترة ، إذن pq تسمى القيمة الاجمالية . بهذا فإذا بيعت 1000 وحدة بسعر 30 بنسا جديدا لكل وحدة فإن القيمة الاجمالية هى $(£0.30)(1000) = £300$.

إذا كانت p_0 تعبر عن السعر و q_0 عن الكية لسلعة خلال فترة الأساس بينما p_n تعبر عن السعر المقابل و q_n الكية المقابلة خلال الفترة المعطاة ، كذلك فإن القيمة الاجمالية خلال هذه الفترات هى v_0 لفترة الأساس و v_n للفترة المعطاة ، فإننا نعرف .

$$\text{منسوب القيمة} \quad \frac{v_n}{v_0} = \frac{p_n q_n}{p_0 q_0} = \left(\frac{p_n}{p_0}\right)\left(\frac{q_n}{q_0}\right) \quad (٣)$$

نفس التعليقات ، الرموز والخصائص التى تتعلق بمناسيب السعر والكية يمكن أن تنطبق على مناسيب القيمة .

وعلى وجه الخصوص إذا كانت $p_{a|b}$ تعبر عن منسوب السعر و $q_{a|b}$ عن منسوب الكية و $v_{a|b}$ عن منسوب القيمة للفترة b بالمقارنة بالفترة a ، بهذا ، كما فى المعادلة (٣)

$$v_{a|b} = p_{a|b}q_{a|b}$$

والذى يسمى خاصية الانعكاس فى المعامل .

سلسلة المناسيب ووصلة المناسيب :

إذا كانت ... ، p_1 ، p_2 ، p_3 تمثل الأسعار خلال الفترات المتتالية ... ,3 ,2 ,1 إذن .... ,$p_{1/2}, p_{2/3}, / p_{3/4}$ تمثل مناسيب الأسعار لكل فترة زمنية بالمقارنة بالفترة الزمنية السابقة لها وتسمى بمناسيب الوصلات .

مثال ١ : إذا كانت أسعار سلعة خلال السنوات 1956 ، 1955 ، 1954 ، 1953 هى 18 ، 15 ، 12 ، 8 سنت على الترتيب ، فإن الوصلات النسبية هى

$$p_{1953|1954} = 12/8 = 150(\%),\ p_{1954|1955} = 15/12 = 125(\%),\ p_{1955|1956} = 18/15 = 120(\%)$$

يمكن التعبير دائما عن مناسيب الأسعار لفترة معينة بالمقارنة بفترة الأساس بدلالة وصلة المناسيب . هذا فعلى سبيل المثال

$$p_{5|2} = p_{5|4}p_{4|3}p_{3|2}$$

مثال ٢ : من المثال ١ ، منسوب السعر لسنة 1956 بالمقارنة بسنة الأساس 1953 هــو

$$p_{1953|1956} = p_{1953|1954}\ p_{1954|1955}\ p_{1955|1956} = \frac{12}{8} \cdot \frac{15}{12} \cdot \frac{18}{15} = \frac{18}{8} = 225(\%)$$

مناسيب السعر بالنسبة لفترة أساس ثانية ، والتي كما سبق أن أوضحنا يمكن أن نحصل عليها باستخدام وصلة المناسيب ، تسمى أحيانا بسلسلة المناسيب بالنسبة لهذا الأساس ، أو المناسيب مسلسلة إلى أساس ثابت .

مثال ٣ : في الأمثلة ١ ، ٢ مجموعة سلسلة المناسيب للسنوات 1956 ، 1955 ، 1954 بالمقارنة بسنة الأساس 1953 تعطى كما يلى . :

$$p_{1953|1954} = \frac{12}{8} = 150(\%)$$

$$p_{1953|1955} = p_{1953|1954}\, p_{1954|1955} = \frac{12}{8} \cdot \frac{15}{12} = 187{\cdot}5(\%)$$

$$p_{1953|1956} = p_{1953|1954}\, p_{1954|1955}\, p_{1955|1956} = \frac{12}{8} \cdot \frac{15}{12} \cdot \frac{18}{15} = 225(\%)$$

الأفكار السابقة قابلة للتطبيق أيضا في حالة مناسيب الكميات ومناسيب القيمة .

المشاكل المتعلقة بحساب الأرقام القياسية :

في نواحي التطبيق الفعلي لانهتم بدرجة كبيرة بالمقارنة بين أسعار ، كميات أو قيم سلع بمفردها بقدر اهتمامنا بالمقارنة بين مجموعات كبيرة من هذه السلع . على سبيل المثال ، عند حساب الرقم القياسي لنفقات المعيشة لا نهتم فقط بأسعار البن في فترة واحدة بالمقارنة بفترة أخرى ولكن نرغب أيضا في مقارنة أسعار البيض ، اللحم ، الخبز الإيجار والملابس وغيرها . بحيث يمكن أن نحصل على صورة عامة . وبالطبع يمكن وضع قائمة بمناسيب أسعار كل السلع . ولكن هذا لا يعد مرضيا . فما نرغب فيه هو رقم قياسي واحد والذي يمكن أن يقارن الأسعار في الفترتين في المتوسط .

وليس من الصعب التنبؤ بأن حسابات الأرقام القياسية المتضمنة مجاميع من السلع تتضمن كثيرا من المشاكل التي يجب حلها . فمثلا عند حساب ، الرقم القياسي لتكاليف المعيشة ، على سبيل المثال ، فيجب أن نقرر ما هي السلع التي يجب أن تدخل ضمن الرقم وكذلك كيفية ترجيحها بما تتناسب مع أهميتها النسبية . فيجب أن نجمع بيانات تتعلق بأسعار وكميات هذه السلع . كذلك فإننا نواجه بمشكلة التعرف في حالة وجود درجات مختلفة لنفس النوع من السلع ، أو ماذا نفعل في حالة ما إذا كانت بعض أنواع من المواد أو الآلات متاحة في أحد السنوات ولكنها لم تكن موجودة في سنة الأساس . وفي النهاية يجب أن نقرر كيف نضع هذه المعلومات معا بحيث ننتهي بالحصول على رقم قياسي واحد لتكلفة المعيشة له دلالة عملية .

استخدام المتوسطات :

بما أننا يجب أن نصل إلى رقم قياسي واحد يلخص كمية كبيرة من المعلومات ، فإنه من السهل التحقق من أن المتوسطات ، مثل تلك التي درست في الفصل الثالث ، تلعب دورا مهما في حساب الأرقام القياسية .

وكما أن هناك طرقا عديدة موجودة لحساب المتوسطات ، فإن هناك طرقا كثيرة لحساب الأرقام القياسية ، لكل منها مزاياه وعيوبه .

فيما يلى سوف نقوم باختيار عدد قليل من الطرق الشائعة الاستخدام في النواحي العملية مستخدمين أنماطا عديدة من طرق المتوسطات . وعلى الرغم من أننا سنقتصر على الأرقام القياسية للأسعار أولا ، فإننا سوف نوضح كيف يمكن بسهولة تعديلها لتنطبق في حالة الكمية أو القيمة .

١٧ - ٦٥ وضح أن رقم فيشر المثالى لايحقق اختبار الدائريه

رقم مارشال ـ ادجورث :

١٧ - ٦٦ من بيانات الجدول ١٧ - ٢٤ بالمسألة ١٧ - ٥٥ أوجد رقم مارشال - أدجورث القياسى للسعر للسنوات (أ) 1956 (ب) 1957 باستخدام سنة 1949 كسنة أساس .

ج : (أ) 149.8 (ب) 130.5

١٧ - ٦٧ وضح أن رقم مارشال - أدجورث يحقق اختبار الانعكاس فى الزمن ولكنه لايحقق اختبار الانعكاس فى العامل .

طريقة الوسط المرجح لمناسيب :

١٧ - ٦٨ من بيانات الجدول ١٧ - ٢٤ بالمسألة ١٧ - ٥٥ أوجد الوسط المرجح للمناسيب لسنة 1956 و 1957 باستخدام 1949 كسنة أساس مستخدماً (أ) قيم سنة المقارنة (ب) قيم سنة الأساس ، كأوزان

ج : (أ) 141.4 ، 163.8 (ب) 125.5 ، 148.7

الأرقام القياسية للكمية أو الحجم :

١٧ - ٦٩ استخدم البيانات بالجدول ١٧ - ٢٤ بالمسألة ١٧ - ٥٥ لحساب الأرقام القياسية للأحجام للسنوات 1956 و 1957 حيث سنة الأساس هى 1949 مستخدماً (أ) الوسط الحسابى البسيط لمناسيب الحجم

(ب) الوسط الهندسى البسيط لمناسيب الحجم

(حـ) رقماً قياسياً تجميعياً مرجحاً للحجم حيث تستخدم أسعار سنة الأساس كأوزان (رقم لاسيرز للكميات)

(د) رقم قياسى تجميعى مرجح للحجم حيث تستخدم أسعار سنة المقارنة كأوزان (رقم باش للكميات)

(هـ) رقم فيشر المثالى للكميات .

(و) رقم مارشال - أدجورث القياسى للكمية .

الرقم القياسى للقيمة :

١٧ - ٧٠ (أ) باستخدام 1949 كسنة أساس فى بيانات المسألة ١٧ - ٥٥ أحسب الرقم القياسى القيمة للسنوات 1956، 1957
(ب) حقق أن الرقم القياسى القيمة فى (أ) هو مثل ناتج حاصل ضرب رقم فيشر المثالى للسعر فى رقم فيشر المثالى الكمية .

ج : (أ) 183.6 ، 224.4

١٧ - ٧١ باستخدام 1949 كسنة أساس فى بيانات المسألة ١٧ - ٥٥ ، احسب الرقم القياسى للسعر × الرقم القياسى للكمية للسنوات 1956 و 1957 باستخدام (أ) رقم لاسيرز (ب) رقم باش .

قارن بالرقم القياسى الفعلى للقيمة .

(أ) 171.7 ، 221.6 (ب) 196.3 ، 226

القيم الحقيقية هى 183.6 ، 224.2 على الترتيب (المسألة ١٧ – ٧٠) .

١٧ – ٧٢ أثبت أن الرقم القياسى التجميعى البسيط للقيمة يحقق اختبار الانعكاس فى الزمن واختبار الدائرية .

تغيير فترة الأساس للأرقام القياسية :

١٧ – ٧٣ الجدول ١٧ – ٢٥ يوضح رقمين قياسيين لتكلفة التشييد للسنوات 1958 – 1947 . الأول ، مبنى على متوسط 30 مدينة ومجمع بواسطة الشركة الأمريكية للتقييم ، ويوضح الرقم القياسى لتكلفة التشييد حيث 100 = 1913 والثانى مجمع بواسطة مصلحة التجارة ، ويوضح رقم قياسى حيث 100 = 1949 – 1947 .

(أ) باستخدام البيانات حيث 100 = 1913 ، أوجد رقماً قياسياً 100 = 1949 – 1947 وذلك باستخدام الطريقة المبسطة فى تغيير الأساس المستخدمة فى مناسيب السعر .

(ب) قارن النتائج فى (أ) بالرقم المجمع بواسطة مصلحة التجارة معدداً الأسباب المختلفة لأى تناقض مشاهد .

جدول ١٧ – ٢٥

السنة	1947	1948	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958
الرقم القياسى للتشييد للشركة الأمريكية للتقسيم (1913 = 100)	430	490	490	500	532	553	577	591	608	635	663	682
الرقم القياسى للتشييد لمصلحة التجارة (1947 – 1949 = 100)	93	104	103	107	116	119	122	122	125	132	137	139

المصدر : استقصاء الأعمال الجارية

الانكماش فى السلاسل الزمنية :

١٧ – ٧٤ الرقم القياسى لأسعار الجملة بالولايات المتحدة للسنوات 1958 – 1947 حيث 100 = 1949 – 1947 معطى بالجدول ١٧ – ٢٦ . حدد قوة الدولار الشرائية فى سوق الجملة فى كل من السنوات المعطاة بدلالة دولارات 1954

ج : 1·14, 1·06, 1·11, 1·07, 0·96, 0·99, 1·00, 1·00, 0·97, 0·94, 0·93

جـدول ١٧ – ٢٦

السـنة	1947	1948	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958
الرقم القياسى لأسعار الجملة (1947–1949=100)	96·4	104·4	99·2	103·1	114·8	111·6	110·1	110·3	110·7	114·3	117·6	119·2

المصدر : استقصاء الأعمال الجارية

١٧ – ٧٥ توضح سلسلة زمنية معينة القيمة الإجمالية السنوية بالدولار لمجموعة من السلع . (أ) وضح كيف يمكن تعديل السلسلة الزمنية لحذف أثر التغير فى قيمة الدولار من سنة لأخرى . (ب) برر نظرياً الطريقة المستخدمة فى (أ) . (جـ) وضح إجابتك بمثال .

١٧ – ٧٦ (أ) خلص السلسلة الزمنية الموضحة بالعمود الأخير من الجدول ١٦ – ٤٥ بالفصل السادس عشر من أثر الانكماش و (ب) فسر دلالة البيانات المخلصة من أثر الانكماش .

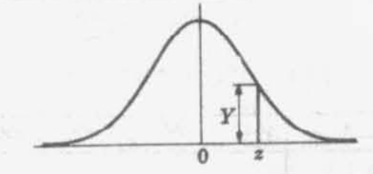
١٧ – ٧٧ أثبت أن طريقة تخليص السلاسل الزمنية من أثر الانكماش ، المستخدمة على سبيل المثال فى المسألة ١٧ – ٣٩ ، قابلة للتطبيق تماماً فقط فى حالة ما إذا كانت الأرقام القياسية تحقق اختبار الانعكاس فى المعامل .

مسـائل متنوعـة :

١٧ – ٧٨ أثبت أنه إذا كان رقماً لاسبيرز وباش القياسيان متساويان فإنهما متساويين مع رقم مارشال – أدجورث ورقم فيشر المثالى

١٧ – ٧٩ كون جدولا للأنماط المختلفة للأرقام القياسية ، موضحاً فى كل حالة ما إذا كانت تحقق أو لاتحقق اختبارات الانعكاس فى المعامل واختبار الدائرية

ملحق 1

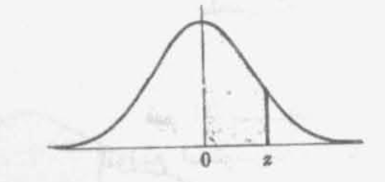


الاحداثيـــات (Y)
للمنحنى الطبيعى المعيارى
عند z

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0·0	0·3989	0·3989	0·3989	0·3988	0·3986	0·3984	0·3982	0·3980	0·3977	0·3973
0·1	0·3970	0·3965	0·3961	0·3956	0·3951	0·3945	0·3939	0·3932	0·3925	0·3918
0·2	0·3910	0·3902	0·3894	0·3885	0·3876	0·3867	0·3857	0·3847	0·3836	0·3825
0·3	0·3814	0·3802	0·3790	0·3778	0·3765	0·3752	0·3739	0·3725	0·3712	0·3697
0·4	0·3683	0·3668	0·3653	0·3637	0·3621	0·3605	0·3589	0·3572	0·3555	0·3538
0·5	0·3521	0·3503	0·3485	0·3467	0·3448	0·3429	0·3410	0·3391	0·3372	0·3352
0·6	0·3332	0·3312	0·3292	0·3271	0·3251	0·3230	0·3209	0·3187	0·3166	0·3144
0·7	0·3123	0·3101	0·3079	0·3056	0·3034	0·3011	0·2989	0·2966	0·2943	0·2920
0·8	0·2897	0·2874	0·2850	0·2827	0·2803	0·2780	0·2756	0·2732	0·2709	0·2685
0·9	0·2661	0·2637	0·2613	0·2589	0·2565	0·2541	0·2516	0·2492	0·2468	0·2444
1·0	0·2420	0·2396	0·2371	0·2347	0·2323	0·2299	0·2275	0·2251	0·2227	0·2203
1·1	0·2179	0·2155	0·2131	0·2107	0·2083	0·2059	0·2036	0·2012	0·1989	0·1965
1·2	0·1942	0·1919	0·1895	0·1872	0·1849	0·1826	0·1804	0·1781	0·1758	0·1736
1·3	0·1714	0·1691	0·1669	0·1647	0·1626	0·1604	0·1582	0·1561	0·1539	0·1518
1·4	0·1497	0·1476	0·1456	0·1435	0·1415	0·1394	0·1374	0·1354	0·1334	0·1315
1·5	0·1295	0·1276	0·1257	0·1238	0·1219	0·1200	0·1182	0·1163	0·1145	0·1127
1·6	0·1109	0·1092	0·1074	0·1057	0·1040	0·1023	0·1006	0·0989	0·0973	0·0957
1·7	0·0940	0·0925	0·0909	0·0893	0·0878	0·0863	0·0848	0·0833	0·0818	0·0804
1·8	0·0790	0·0775	0·0761	0·0748	0·0734	0·0721	0·0707	0·0694	0·0681	0·0669
1·9	0·0656	0·0644	0·0632	0·0620	0·0608	0·0596	0·0584	0·0573	0·0562	0·0551
2·0	0·0540	0·0529	0·0519	0·0508	0·0498	0·0488	0·0478	0·0468	0·0459	0·0449
2·1	0·0440	0·0431	0·0422	0·0413	0·0404	0·0396	0·0387	0·0379	0·0371	0·0363
2·2	0·0355	0·0347	0·0339	0·0332	0·0325	0·0317	0·0310	0·0303	0·0297	0·0290
2·3	0·0283	0·0277	0·0270	0·0264	0·0258	0·0252	0·0246	0·0241	0·0235	0·0229
2·4	0·0224	0·0219	0·0213	0·0208	0·0203	0·0198	0·0194	0·0189	0·0184	0·0180
2·5	0·0175	0·0171	0·0167	0·0163	0·0158	0·0154	0·0151	0·0147	0·0143	0·0139
2·6	0·0136	0·0132	0·0129	0·0126	0·0122	0·0119	0·0116	0·0113	0·0110	0·0107
2·7	0·0104	0·0101	0·0099	0·0096	0·0093	0·0091	0·0088	0·0086	0·0084	0·0081
2·8	0·0079	0·0077	0·0075	0·0073	0·0071	0·0069	0·0067	0·0065	0·0063	0·0061
2·9	0·0060	0·0058	0·0056	0·0055	0·0053	0·0051	0·0050	0·0048	0·0047	0·0046
3·0	0·0044	0·0043	0·0042	0·0040	0·0039	0·0038	0·0037	0·0036	0·0035	0·0034
3·1	0·0033	0·0032	0·0031	0·0030	0·0029	0·0028	0·0027	0·0026	0·0025	0·0025
3·2	0·0024	0·0023	0·0022	0·0022	0·0021	0·0020	0·0020	0·0019	0·0018	0·0018
3·3	0·0017	0·0017	0·0016	0·0016	0·0015	0·0015	0·0014	0·0014	0·0013	0·0013
3·4	0·0012	0·0012	0·0012	0·0011	0·0011	0·0010	0·0010	0·0010	0·0009	0·0009
3·5	0·0009	0·0008	0·0008	0·0008	0·0008	0·0007	0·0007	0·0007	0·0007	0·0006
3·6	0·0006	0·0006	0·0006	0·0005	0·0005	0·0005	0·0005	0·0005	0·0005	0·0004
3·7	0·0004	0·0004	0·0004	0·0004	0·0004	0·0004	0·0003	0·0003	0·0003	0·0003
3·8	0·0003	0·0003	0·0003	0·0003	0·0003	0·0002	0·0002	0·0002	0·0002	0·0002
3·9	0·0002	0·0002	0·0002	0·0002	0·0002	0·0002	0·0002	0·0002	0·0001	0·0001

ملحق II

المســـــاحات
تحت المنحنى الطبيعى المعيارى
من 0 الى z

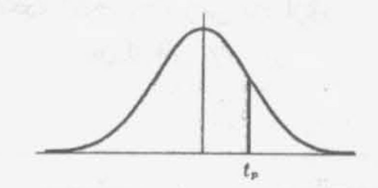


z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0·0	0·0000	0·0040	0·0080	0·0120	0·0160	0·0199	0·0239	0·0279	0·0319	0·0359
0·1	0·0398	0·0438	0·0478	0·0517	0·0557	0·0596	0·0636	0·0675	0·0714	0·0754
0·2	0·0793	0·0832	0·0871	0·0910	0·0948	0·0987	0·1026	0·1064	0·1103	0·1141
0·3	0·1179	0·1217	0·1255	0·1293	0·1331	0·1368	0·1406	0·1443	0·1480	0·1517
0·4	0·1554	0·1591	0·1628	0·1664	0·1700	0·1736	0·1772	0·1808	0·1844	0·1879
0·5	0·1915	0·1950	0·1985	0·2019	0·2054	0·2088	0·2123	0·2157	0·2190	0·2224
0·6	0·2258	0·2291	0·2324	0·2357	0·2389	0·2422	0·2454	0·2486	0·2518	0·2549
0·7	0·2580	0·2612	0·2642	0·2673	0·2704	0·2734	0·2764	0·2794	0·2823	0·2852
0·8	0·2881	0·2910	0·2939	0·2967	0·2996	0·3023	0·3051	0·3078	0·3106	0·3133
0·9	0·3159	0·3186	0·3212	0·3238	0·3264	0·3289	0·3315	0·3340	0·3365	0·3389
1·0	0·3413	0·3438	0·3461	0·3485	0·3508	0·3531	0·3554	0·3577	0·3599	0·3621
1·1	0·3643	0·3665	0·3686	0·3708	0·3729	0·3749	0·3770	0·3790	0·3810	0·3830
1·2	0·3849	0·3869	0·3888	0·3907	0·3925	0·3944	0·3962	0·3980	0·3997	0·4015
1·3	0·4032	0·4049	0·4066	0·4082	0·4099	0·4115	0·4131	0·4147	0·4162	0·4177
1·4	0·4192	0·4207	0·4222	0·4236	0·4251	0·4265	0·4279	0·4292	0·4306	0·4319
1·5	0·4332	0·4345	0·4357	0·4370	0·4382	0·4394	0·4406	0·4418	0·4429	0·4441
1·6	0·4452	0·4463	0·4474	0·4484	0·4495	0·4505	0·4515	0·4525	0·4535	0·4545
1·7	0·4554	0·4564	0·4573	0·4582	0·4591	0·4599	0·4608	0·4616	0·4625	0·4633
1·8	0·4641	0·4649	0·4656	0·4664	0·4671	0·4678	0·4686	0·4693	0·4699	0·4706
1·9	0·4713	0·4719	0·4726	0·4732	0·4738	0·4744	0·4750	0·4756	0·4761	0·4767
2·0	0·4772	0·4778	0·4783	0·4788	0·4793	0·4798	0·4803	0·4808	0·4812	0·4817
2·1	0·4821	0·4826	0·4830	0·4834	0·4838	0·4842	0·4846	0·4850	0·4854	0·4857
2·2	0·4861	0·4864	0·4868	0·4871	0·4875	0·4878	0·4881	0·4884	0·4887	0·4890
2·3	0·4893	0·4896	0·4898	0·4901	0·4904	0·4906	0·4909	0·4911	0·4913	0·4916
2·4	0·4918	0·4920	0·4922	0·4925	0·4927	0·4929	0·4931	0·4932	0·4934	0·4936
2·5	0·4938	0·4940	0·4941	0·4943	0·4945	0·4946	0·4948	0·4949	0·4951	0·4952
2·6	0·4953	0·4955	0·4956	0·4957	0·4959	0·4960	0·4961	0·4962	0·4963	0·4964
2·7	0·4965	0·4966	0·4967	0·4968	0·4969	0·4970	0·4971	0·4972	0·4973	0·4974
2·8	0·4974	0·4975	0·4976	0·4977	0·4977	0·4978	0·4979	0·4979	0·4980	0·4981
2·9	0·4981	0·4982	0·4982	0·4983	0·4984	0·4984	0·4985	0·4985	0·4986	0·4986
3·0	0·4987	0·4987	0·4987	0·4988	0·4988	0·4989	0·4989	0·4989	0·4990	0·4990
3·1	0·4990	0·4991	0·4991	0·4991	0·4992	0·4992	0·4992	0·4992	0·4993	0·4993
3·2	0·4993	0·4993	0·4994	0·4994	0·4994	0·4994	0·4994	0·4995	0·4995	0·4995
3·3	0·4995	0·4995	0·4995	0·4996	0·4996	0·4996	0·4996	0·4996	0·4996	0·4997
3·4	0·4997	0·4997	0·4997	0·4997	0·4997	0·4997	0·4997	0·4997	0·4997	0·4998
3·5	0·4998	0·4998	0·4998	0·4998	0·4998	0·4998	0·4998	0·4998	0·4998	0·4998
3·6	0·4998	0·4998	0·4999	0·4999	0·4999	0·4999	0·4999	0·4999	0·4999	0·4999
3·7	0·4999	0·4999	0·4999	0·4999	0·4999	0·4999	0·4999	0·4999	0·4999	0·4999
3·8	0·4999	0·4999	0·4999	0·4999	0·4999	0·4999	0·4999	0·4999	0·4999	0·4999
3·9	0·5000	0·5000	0·5000	0·5000	0·5000	0·5000	0·5000	0·5000	0·5000	0·5000

z	0
0·0	0·3989
0·1	0·3970
0·2	0·3910
0·3	0·3814
0·4	0·3683
0·5	0·3521
0·6	0·3332
0·7	0·3123
0·8	0·2897
0·9	0·2661
1·0	0·2420
1·1	0·2179
1·2	0·1942
1·3	0·1714
1·4	0·1497
1·5	0·1295
1·6	0·1109
1·7	0·0940
1·8	0·0790
1·9	0·0656
2·0	0·0540
2·1	0·0440
2·2	0·0355
2·3	0·0283
2·4	0·0224
2·5	0·0175
2·6	0·0136
2·7	0·0104
2·8	0·0079
2·9	0·0060
3·0	0·0044
3·1	0·0033
3·2	0·0024
3·3	0·0017
3·4	0·0012
3·5	0·0009
3·6	0·0006
3·7	0·0004
3·8	0·0003
3·9	0·0002

ملحق III

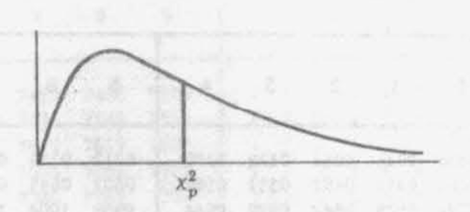
قيم المئينـــــات (t_p)
لتوزيع استودينت t – ت
لدرجات حرية ν
(المساحة المظللة = p)



ν	$t_{0.995}$	$t_{0.99}$	$t_{0.975}$	$t_{0.95}$	$t_{0.90}$	$t_{0.80}$	$t_{0.75}$	$t_{0.70}$	$t_{0.60}$	$t_{0.55}$
1	63·66	31·82	12·71	6·31	3·08	1·376	1·000	0·727	0·325	0·158
2	9·92	6·96	4·30	2·92	1·89	1·061	0·816	0·617	0·289	0·142
3	5·84	4·54	3·18	2·35	1·64	0·978	0·765	0·584	0·277	0·137
4	4·60	3·75	2·78	2·13	1·53	0·941	0·741	0·569	0·271	0·134
5	4·03	3·36	2·57	2·02	1·48	0·920	0·727	0·559	0·267	0·132
6	3·71	3·14	2·45	1·94	1·44	0·906	0·718	0·553	0·265	0·131
7	3·50	3·00	2·36	1·90	1·42	0·896	0·711	0·549	0·263	0·130
8	3·36	2·90	2·31	1·86	1·40	0·889	0·706	0·546	0·262	0·130
9	3·25	2·82	2·26	1·83	1·38	0·883	0·703	0·543	0·261	0·129
10	3·17	2·76	2·23	1·81	1·37	0·879	0·700	0·542	0·260	0·129
11	3·11	2·72	2·20	1·80	1·36	0·876	0·697	0·540	0·260	0·129
12	3·06	2·68	2·18	1·78	1·36	0·873	0·695	0·539	0·259	0·128
13	3·01	2·65	2·16	1·77	1·35	0·870	0·694	0·538	0·259	0·128
14	2·98	2·62	2·14	1·76	1·34	0·868	0·692	0·537	0·258	0·128
15	2·95	2·60	2·13	1·75	1·34	0·866	0·691	0·536	0·258	0·128
16	2·92	2·58	2·12	1·75	1·34	0·865	0·690	0·535	0·258	0·128
17	2·90	2·57	2·11	1·74	1·33	0·863	0·689	0·534	0·257	0·128
18	2·88	2·55	2·10	1·73	1·33	0·862	0·688	0·534	0·257	0·127
19	2·86	2·54	2·09	1·73	1·33	0·861	0·688	0·533	0·257	0·127
20	2·84	2·53	2·09	1·72	1·32	0·860	0·687	0·533	0·257	0·127
21	2·83	2·52	2·08	1·72	1·32	0·859	0·686	0·532	0·257	0·127
22	2·82	2·51	2·07	1·72	1·32	0·858	0·686	0·532	0·256	0·127
23	2·81	2·50	2·07	1·71	1·32	0·858	0·865	0·532	0·256	0·127
24	2·80	2·49	2·06	1·71	1·32	0·857	0·685	0·531	0·256	0·127
25	2·79	2·48	2·06	1·71	1·32	0·856	0·684	0·531	0·256	0·127
26	2·78	2·48	2·06	1·71	1·32	0·856	0·684	0·531	0·256	0·127
27	2·77	2·47	2·05	1·70	1·31	0·855	0·684	0·531	0·256	0·127
28	2·76	2·47	2·05	1·70	1·31	0·855	0·683	0·530	0·256	0·127
29	2·76	2·46	2·04	1·70	1·31	0·854	0·683	0·530	0·256	0·127
30	2·75	2·46	2·04	1·70	1·31	0·854	0·683	0·530	0·256	0·127
40	2·70	2·42	2·02	1·68	1·30	0·851	0·681	0·529	0·255	0·126
60	2·66	2·39	2·00	1·67	1·30	0·848	0·679	0·527	0·254	0·126
120	2·62	2·36	1·98	1·66	1·29	0·845	0·677	0·526	0·254	0·126
∞	2·58	2·33	1·96	1·645	1·28	0·842	0·674	0·524	0·253	0·126

ملحق IV

قيم المئينـــات (χ_p^2)
لتوزيع كا ــ تربيع
لدرجة حــرية v
(المساحة المظللة = p)



v	$\chi^2_{0.995}$	$\chi^2_{0.90}$	$\chi^2_{0.975}$	$\chi^2_{0.95}$	$\chi^2_{0.90}$	$\chi^2_{0.75}$	$\chi^2_{0.50}$	$\chi^2_{0.25}$	$\chi^2_{0.10}$	$\chi^2_{0.05}$	$\chi^2_{0.025}$	$\chi^2_{0.01}$	$\chi^2_{0.005}$
1	7·88	6·63	5·02	3·84	2·71	1·32	0·455	0·102	0·0158	0·0039	0·0010	0·0002	0·0000
2	10·6	9·21	7·38	5·99	4·61	2·77	1·39	0·575	0·211	0·103	0·0506	0·0201	0·0100
3	12·8	11·3	9·35	7·81	6·25	4·11	2·37	1·21	0·584	0·352	0·216	0·115	0·072
4	14·9	13·3	11·1	9·49	7·78	5·39	3·36	1·92	1·06	0·711	0·484	0·297	0·207
5	16·7	15·1	12·8	11·1	9·24	6·63	4·35	2·67	1·61	1·15	0·831	0·554	0·412
6	18·5	16·8	14·4	12·6	10·6	7·84	5·35	3·45	2·20	1·64	1·24	0·872	0·676
7	20·3	18·5	16·0	14·1	12·0	9·04	6·35	4·25	2·83	2·17	1·69	1·24	0·989
8	22·0	20·1	17·5	15·5	13·4	10·2	7·34	5·07	3·49	2·73	2·18	1·65	1·34
9	23·6	21·7	19·0	16·9	14·7	11·4	8·34	5·90	4·17	3·33	2·70	2·09	1·73
10	25·2	23·2	20·5	18·3	16·0	12·5	9·34	6·74	4·87	3·94	3·25	2·56	2·16
11	26·8	24·7	21·9	19·7	17·3	13·7	10·3	7·58	5·58	4·57	3·82	3·05	2·60
12	28·3	26·2	23·3	21·0	18·5	14·8	11·3	8·44	6·30	5·23	4·40	3·57	3·07
13	29·8	27·7	24·7	22·4	19·8	16·0	12·3	9·30	7·04	5·89	5·01	4·11	3·57
14	31·3	29·1	26·1	23·7	21·1	17·1	13·3	10·2	7·79	6·57	5·63	4·66	4·07
15	32·8	30·6	27·5	25·0	22·3	18·2	14·3	11·0	8·55	7·26	6·26	5·23	4·60
16	34·3	32·0	28·8	26·3	23·5	19·4	15·3	11·9	9·31	7·96	6·91	5·81	5·14
17	35·7	33·4	30·2	27·6	24·8	20·5	16·3	12·8	10·1	8·67	7·56	6·41	5·70
18	37·2	34·8	31·5	28·9	26·0	21·6	17·3	13·7	10·9	9·39	8·23	7·01	6·26
19	38·6	36·2	32·9	30·1	27·2	22·7	18·3	14·6	11·7	10·1	8·91	7·63	6·84
20	40·0	37·6	34·2	31·4	28·4	23·8	19·3	15·5	12·4	10·9	9·59	8·26	7·43
21	41·4	38·9	35·5	32·7	29·6	24·9	20·3	16·3	13·2	11·6	10·3	8·90	8·03
22	42·8	40·3	36·8	33·9	30·8	26·0	21·3	17·2	14·0	12·3	11·0	9·54	8·64
23	44·2	41·6	38·1	35·2	32·0	27·1	22·3	18·1	14·8	13·1	11·7	10·2	9·26
24	45·6	43·0	39·4	36·4	33·2	28·2	23·3	19·0	15·7	13·8	12·4	10·9	9·89
25	46·9	44·3	40·6	37·7	34·4	29·3	24·3	19·9	16·5	14·6	13·1	11·5	10·5
26	48·3	45·6	41·9	38·9	35·6	30·4	25·3	20·8	17·3	15·4	13·8	12·2	11·2
27	49·6	47·0	43·2	40·1	36·7	31·5	26·3	21·7	18·1	16·2	14·6	12·9	11·8
28	51·0	48·3	44·5	41·3	37·9	32·6	27·3	22·7	18·9	16·9	15·3	13·6	12·5
29	52·3	49·6	45·7	42·6	39·1	33·7	28·3	23·6	19·8	17·7	16·0	14·3	13·1
30	53·7	50·9	47·0	43·8	40·3	34·8	29·3	24·5	20·6	18·5	16·8	15·0	13·8
40	66·8	63·7	59·3	55·8	51·8	45·6	39·3	33·7	29·1	26·5	24·4	22·2	20·7
50	79·5	76·2	71·4	67·5	63·2	56·3	49·3	42·9	37·7	34·8	32·4	29·7	28·0
60	92·0	88·4	83·3	79·1	74·4	67·0	59·3	52·3	46·5	43·2	40·5	37·5	35·5
70	104·2	100·4	95·0	90·5	85·5	77·6	69·3	61·7	55·3	51·7	48·8	45·4	43·3
80	116·3	112·3	106·6	101·9	96·6	88·1	79·3	71·1	64·3	60·4	57·2	53·5	51·2
90	128·3	124·1	118·1	113·1	107·6	98·6	89·3	80·6	73·3	69·1	65·6	61·8	59·2
100	140·2	135·8	129·6	124·3	118·5	109·1	99·3	90·1	82·4	77·9	74·2	70·1	67·3

v	$t_{0.995}$
1	63·66
2	9·92
3	5·84
4	4·60
5	4·03
6	3·71
7	3·50
8	3·36
9	3·25
10	3·17
11	3·11
12	3·06
13	3·01
14	2·98
15	2·95
16	2·92
17	2·90
18	2·88
19	2·86
20	2·84
21	2·83
22	2·82
23	2·81
24	2·80
25	2·79
26	2·78
27	2·77
28	2·76
29	2·76
30	2·75
40	2·70
60	2·66
120	2·62
∞	2·58

ملحق ٧

اللوغاريتمات المعتادة لاربعة ارقام عشرية

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	الفروق								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

اللوغارتيمات المعتادة لأربعة ارقام عشرية

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	الفروق								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

ملحق VI

قيم $e^{-\lambda}$

λ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0·0	1·0000	0·9900	0·9802	0·9704	0·9608	0·9512	0·9418	0·9324	0·9231	0·9139
0·1	0·9048	0·8958	0·8869	0·8781	0·8694	0·8607	0·8521	0·8437	0·8353	0·8270
0·2	0·8187	0·8106	0·8025	0·7945	0·7866	0·7788	0·7711	0·7634	0·7558	0·7483
0·3	0·7408	0·7334	0·7261	0·7189	0·7118	0·7047	0·6977	0·6907	0·6839	0·6771
0·4	0·6703	0·6636	0·6570	0·6505	0·6440	0·6376	0·6313	0·6250	0·6188	0·6126
0·5	0·6065	0·6005	0·5945	0·5886	0·5827	0·5770	0·5712	0·5655	0·5599	0·5543
0·6	0·5488	0·5434	0·5379	0·5326	0·5273	0·5220	0·5169	0·5117	0·5066	0·5016
0·7	0·4966	0·4916	0·4868	0·4819	0·4771	0·4724	0·4677	0·4630	0·4584	0·4538
0·8	0·4493	0·4449	0·4404	0·4360	0·4317	0·4274	0·4232	0·4190	0·4148	0·4107
0·9	0·4066	0·4025	0·3985	0·3946	0·3906	0·3867	0·3829	0·3791	0·3753	0·3716

$(\lambda = 1, 2, 3, \ldots, 10)$

λ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$e^{-\lambda}$	0·367 88	0·135 34	0·049 79	0·018 32	0·006 738	0·002 479	0·000 912	0·000 335	0·000 123	0·000 045

ملحوظة : للحصول على قيم $e^{-\lambda}$ لقيم λ الأخرى ، استخدم قوانين الأسس .

مثال : $e^{-3\cdot48} = (e^{-3\cdot00})(e^{-0\cdot48}) = (0\cdot049\,79)(0\cdot6188) = 0\cdot030\,81$

ملحق VII

الأرقـــام العشـــوائية

51772	74640	42331	29044	46621	62898	93582	04186	19640	87056
24033	23491	83587	06568	21960	21387	76105	10863	97453	90581
45939	60173	52078	25424	11645	55870	56974	37428	93507	94271
30586	02133	75797	45406	31041	86707	12973	17169	88116	42187
03585	79353	81938	82322	96799	85659	36081	50884	14070	74950
64937	03355	95863	20790	65304	55189	00745	65253	11822	15804
15630	64759	51135	98527	62586	41889	25439	88036	24034	67283
09448	56301	57683	30277	94623	85418	68829	06652	41982	49159
21631	91157	77331	60710	52290	16835	48653	71590	16159	14676
91097	17480	29414	06829	87843	28195	27279	47152	35683	47280
50532	25496	95652	42457	73547	76552	50020	24819	52984	76168
07136	40876	79971	54195	25708	51817	36732	72484	94923	75936
27989	64728	10744	08396	56242	90985	28868	99431	50995	20507
85184	73949	36601	46253	00477	25234	09908	36574	72139	70185
54398	21154	97810	36764	32869	11785	55261	59009	38714	38723
65544	34371	09591	07839	58892	92843	72828	91341	84821	63886
08263	65952	85762	64236	39238	18776	84303	99247	46149	03229
39817	67906	48236	16057	81812	15815	63700	85915	19219	45943
62257	04077	79443	95203	02479	30763	92486	54083	23631	05825
53298	90276	62545	21944	16530	03878	07516	95715	02526	33537

ملحق VIII

خطوات الحصول على المعادلات الاعتدالية لخط المربعات الصغرى

اعتبر أن المعادلة المطلوبة لخط المربعات الصغرى هي $Y = a_0 + a_1 X$ فإن قيم Y على هذا الخط المقابلة لقيم $X = X_1, X_2, \ldots, X_N$ هي $a_0 + a_1X_1, a_0 + a_1X_2, \ldots, a_0 + a_1X_N$ بينما القيم الفعلية هي Y_1 ، Y_2 ، … Y_N على الترتيب . بهذا فإن خط المربعات الصغرى يحقق (أنظر صفحة ٣٥٢)

$$S = (a_0 + a_1X_1 - Y_1)^2 + (a_0 + a_1X_2 - Y_2)^2 + \cdots + (a_0 + a_1X_N - Y_N)^2$$ نهاية صغرى،

من قواعد التفاضل ، S نهاية صغرى عندما تكون التفاضلات الجزئية لـ S بالنسبة لـ a_0, a_1 تساوى صفرا ، إذن :

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 2\{(a_0 + a_1X_1 - Y_1) + (a_0 + a_1X_2 - Y_2) + \cdots + (a_0 + a_1X_N - Y_N)\} = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = 2\{(a_0 + a_1X_1 - Y_1)X_1 + (a_0 + a_1X_2 - Y_2)X_2 + \cdots + (a_0 + a_1X_N - Y_N)X_N\} = 0$$

وهذه المعادلة تعطى المعادلات الاعتدالية المطلوبة :

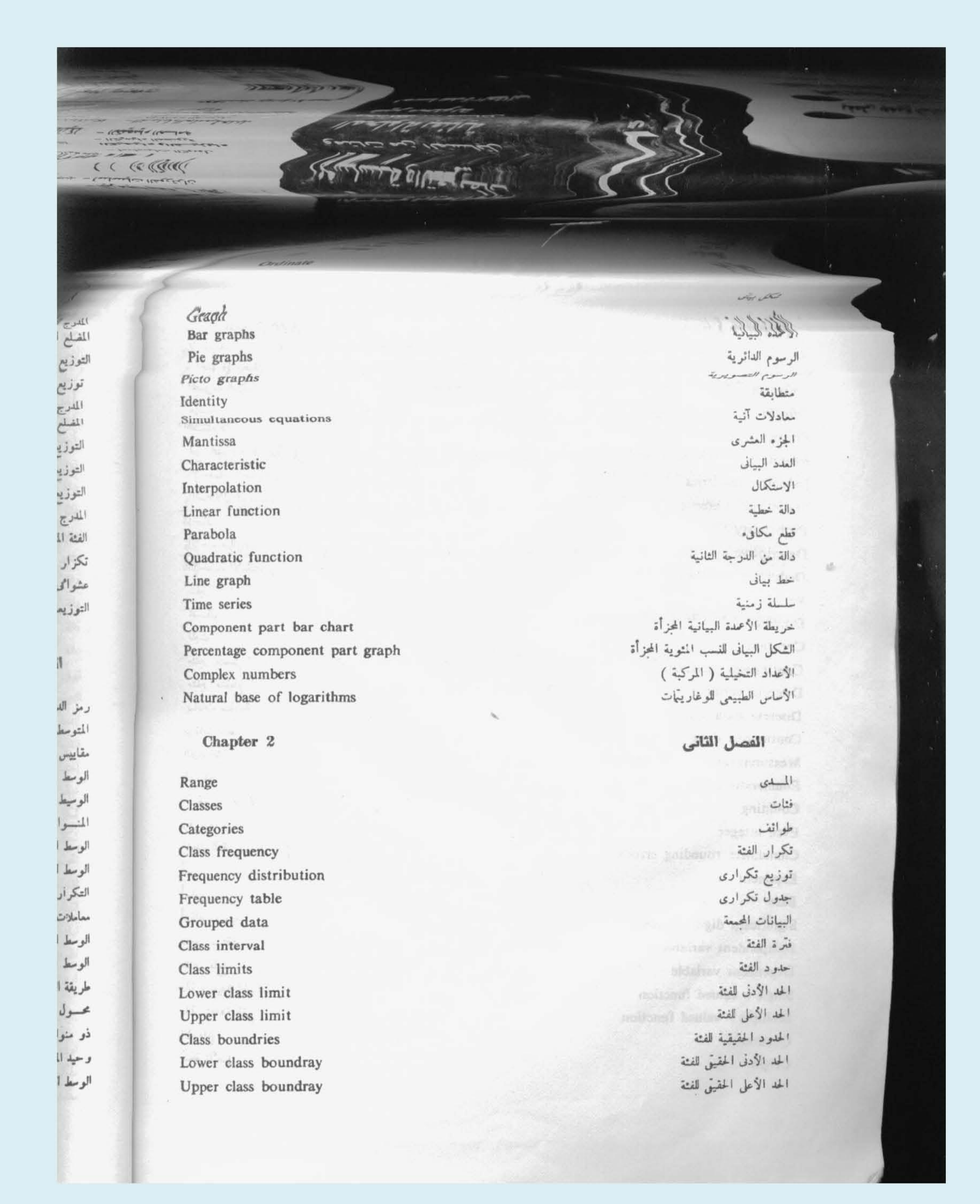
$$Na_0 + a_1\Sigma X - \Sigma Y = 0$$

$$a_0\Sigma X + a_1\Sigma X^2 - \Sigma XY = 0$$

Glossary قائمة المصطلحات

Chapter 1 الفصل الأول

Chapter 1	الفصل الأول
Population	المجتمع الإحصائى
Universe	المجموعة الكلية
Sample	عينـــة
Finite	محـــدود
Infinite	غير محدود (لا نهائى)
Inductive statistics	الإحصاء الاستقرائى
Statistical inference	الاستدلال الإحصائى
Probability	إحتمال
Descriptive statistics	الإحصاء الوصفى
Deductive statistics	الإحصاء الاستنتاجى
Variable	متغير
Domain	مجـــال
Constant	ثابت
Continuous variable	متغير متصل
Discrete variable	متغير متقطع
Discrete data	بيانات متقطعة
Continuous data	بيانات متصلة
Measurements	القياسات
Enumerations	العـــدد
Counting	الترقيم (العد)
Even integer	رقم زوجى
Cumulative rounding errors	أخطاء التقريب المتراكم
Exponent	أس
Base	أساس
Significant digits (figures)	أرقام معنوية
Independent variable	متغير مستقل
Dependent variable	متغير تابع
Single - valued function	دالة وحيدة القيمة
Multiple - valued function	دالة متعددة القيم
Quadrants	الأرباع
Origin	نقطة الأصل



Graph	شكل بيانى
Bar graphs	الأعمدة البيانية
Pie graphs	الرسوم الدائرية
Picto graphs	الرسوم التصويرية
Identity	متطابقة
Simultaneous equations	معادلات آنية
Mantissa	الجزء العشرى
Characteristic	العدد البيانى
Interpolation	الاستكمال
Linear function	دالة خطية
Parabola	قطع مكافىء
Quadratic function	دالة من الدرجة الثانية
Line graph	خط بيانى
Time series	سلسلة زمنية
Component part bar chart	خريطة الأعمدة البيانية المجزأة
Percentage component part graph	الشكل البيانى للنسب المئوية المجزأة
Complex numbers	الأعداد التخيلية (المركبة)
Natural base of logarithms	الأساس الطبيعى للوغاريتمات

Chapter 2 — الفصل الثانى

Range	المدى
Classes	فئات
Categories	طوائف
Class frequency	تكرار الفئة
Frequency distribution	توزيع تكرارى
Frequency table	جدول تكرارى
Grouped data	البيانات المجمعة
Class interval	فترة الفئة
Class limits	حدود الفئة
Lower class limit	الحد الأدنى للفئة
Upper class limit	الحد الأعلى للفئة
Class boundries	الحدود الحقيقية للفئة
Lower class boundray	الحد الأدنى الحقيقى للفئة
Upper class boundray	الحد الأعلى الحقيقى للفئة

Bernoulli distribution	توزيع برنولى
Normal distribution	التوزيع الطبيعى (أو المعتدل)
Normal curve	المنحنى الطبيعى
Gaussian distribution	توزيع جاوس
Standard form	الصيغة القياسية
Poisson distribution	توزيع بواسون
Multinomial distribution	توزيع كثيرات الحدود
Multinomial expansion	مفكوك كثيرات الحدود
Goodness of fit	جودة التوفيق
Chi - Square test	إختبار كا٢ أو χ^2
Normal curve graph paper	ورق رسم بيانى للمنحنى الطبيعى
Probability graph paper	ورق رسم بيانى إحتمالى

Chapter 8 — الفصل الثامن

Estimation	تقــدير
Population parameters	معالم المجتمع
Sample statistics	إحصائيات العينة
Test of significance	إختبارات المعنوية
Test of hypotheses	إختبارات الفروض
Theory of decisions	نظرية القرارات
Design of the experiment	تصميم التجارب
Random sampling	عينة عشوائية
Sampling with replacement	معاينة مع الإرجاع
Sampling without replacement	معاينة بدون إرجاع
Sampling distribution	توزيع المعاينة
Sampling distribution of means	توزيع المعاينة للأوساط
Central limit theorem	نظرية الحد مركزية
Asymptotically normal	يؤول إلى التوزيع الطبيعى
Sampling distribution of proportions	توزيع المعاينة للنسب
Sampling distribution of differences of the statistics	توزيع المعاينة للفروق بين الإحصائيات
Independent	إستقلال
Sampling distribution of the sum of statistics	توزيع المعاينة لمجموع الإحصائيات
Standard error	خطأ معيارى
Large sampling methods	أساليب العينات الكبيرة
Theory of small samples	نظرية العينات الصغيرة
Experimental sampling distribution	توزيع المعاينة التجريبى

Chapter 9	الفصل التاسع
Unbiased estimator	تقدير غير متحيز
Baised estimator	تقدير متحيز
Efficient estimator	تقدير كفؤ
Inefficient estimator	تقدير غير كفؤ
Most efficient (best estimator)	الأكثر كفاءة
Point estimate	تقدير بنقطة
Interval estimate	تقدير بفترة
Reliability	المأمونية
Confidence intervals	فترات الثقة
Confidence limit	حدود الثقة
Fiducial limit	حدود الاطمئنان
Confidence level	مستوى الثقة
Confidence coefficients	معاملات الثقة
Critical values	القيم الحرجة
Probable error	الخطأ المحتمل

Chapter 10	الفصل العاشر
Statistical decisions	القرارات الاحصائية
Statistical hypotheses	الفروض الاحصائية
Null hypotheses	فروض العدم
Alternative hypothesis	الفرض البديل
Significant	معنوية
Rules of decisions	قواعد اتخاذ القرارات
Type I error	خطأ من النوع الأول
Type II error	خطأ من النوع الثانى
Level of significance	مستوى المعنوية
Critical region	المنطقة الحرجة
Region of rejection of the hypothesis	منطقة رفض الفرض
Region of significance	منطقة المعنوية
Region of acceptance of the hypothesis	منطقة قبول الفرض
Region of non-significance	منطقة عدم المعنوية
Test statistic	إحصائية الاختبار
Two - tailed test	إختبار من طرفين
Two - sided test	إختبار من جانبين
One - tailed test	إختبار من طرف واحد
One - sided test	إختبار من جانب واحد

English	العربية
Operating characteristic curves	منحنيات توصيف العمليات
Power of test	قوة الاختبار
Quality control	الرقابة على الجودة
Control charts	خرائط المراقبة
Probably significant	محتمل المعنوية
Experimental significance level (descriptive)	مستوى المعنوية التجريبى (الوصفى)
Power function	دالة القوة

Chapter 11 الفصل الحادى عشر

English	العربية
Small sampling theory	نظرية العينات الصغيرة
Exact sampling theory	النظرية المضبوطة للعينات
"Students" t distribution	توزيع « ستودينت » ت
Chi - square distribution	توزيع كا – تربيع
Number of degrees of freedom	عدد درجات الحرية
t score (t statistic)	إحصائية « ت » t
Z score (z statistic)	إحصائية z

Chapter 12 الفصل الثانى عشر

English	العربية
Observed frequencies	التكرارات المشاهدة
Expected or theoretical frequencies	التكرارات المتوقعة أو النظرية
Dichotomy or dichotomous classification	تقسيم ثنائى
One - way classification table	جدول تقسيم فى اتجاه واحد
Two - way classification table (hxk table)	جدول تقسيم فى اتجاهين (hxk)
Contingency tables	جداول الاقتران
Cell frequencies	تكرارات الخلايا
Marginal frequency	التكرار الهامشى
Yates correction	تصحيح ييتس
Coefficient of contingency	معامل الاقتران
Correlation of attributes	إرتباط الصفات
Tetrachoric correlation	ارتباط رباعى
Additive property	خاصية الانجماع

Chapter 13 الفصل الثالث عشر

English	العربية
Scatter diagram	شكل الانتشار
Approximating curve	المنحنى التقريبى
Linear relationship	علاقة خطية
Non - linear relationship	علاقة غير خطية
Curve fitting	توفيق المنحنى
Polynomials	كثيرات الحدود

Semi - log paper	ورق نصف لوغاريتمى
Log - log paper	ورق لوغاريتمى – لوغاريتمى
Freehand method of curve fitting	توفيق المنحنى باليد
Slope	الميل
Y intercept	الجزء المقطوع من محور الصادات
Residual	الباقى
Best fitting curve	المنحنى الأحسن توفيقاً
Least square curve	منحنى المربعات الصغرى
Least square parabola	قطع المربعات الصغرى
Normal equations	المعادلات الاعتدالية
Center of gravity	مركز الثقل
Regression curve of Y on X	منحنى انحدار Y على X
Regression curve of X on Y	منحنى انحدار Y على X
Trend line	خط الاتجاه العام
Trend curve	منحنى الاتجاه العام
Approximating plane	المستويات التقريبية
Regression surfaces	سطوح الانحدار
Linear interpolation	استكمال خطى
Linear extrapolation	استكمال خارجى
Multiple regression	الانحدار المتعدد
Base period	فترة الأساس
Reference period	فترة الإسناد

Chapter 14 — الفصل الرابع عشر

Correlation	ارتباط
Perfect correlation	ارتباط تام
Uncorrelated	غير مرتبط
Simple correlation	ارتباط بسيط
Simple regression	انحدار بسيط
Multiple correlation	ارتباط متعدد
Positive (direct) correlation	ارتباط موجب (طردى)
Negative (inverse) correlation	ارتباط سالب (عكسى)
Measures of correlation	مقاييس الارتباط
Perfect linear correlation	ارتباط خطى تام
Standard error of estimate of Y on X	الخطأ المعيارى لتقدير Y على X
Total variation	الاختلافات الكلية
Unexplained variation	الاختلاف الغير مفسر
Explained variation	الاختلاف المفسر

Coefficient of determination	معامل التحديد
Coefficient of correlation	معامل الارتباط
Modified standard eiror of estimate	الخطأ المعيارى المعدل للتقدير
Degrees of freedom	درجات الحرية
Non - Linear correlation	إرتباط غير خطى
Nonsense (spurious) correlation	ارتباط لامعنى له (زائف)
Product - moment formula	صيغة عزم حاصل الضرب
Covariance	تغاير
Bivariate table	جدول مزدوج – ذو متغيرين
Bivariate frequency distribution	توزيع تكرارى ذو متغيرين
Correlation table	جدول الارتباط
Coefficient of rank correlation	معامل ارتباط الرتب
Auto correlation	الارتباط الذاتى
Attributes	الصفات
Bivariate population	مجمع ثنائى
Bivariate normal distribution	توزيع طبيعى ثنائى
Fisher's Z transformation	تحويله Z لفيشر
Marginal totals	المجاميع الهامشية

Chapter 15 — الفصل الخامس عشر

Regression equation	معادلة الانحدار
Partial regression coefficients	معاملات الانحدار الجزئية
Linear regression equation	معادلة الانحدار الخطى
Regression plane	مستوى الانحدار
Least square regression planes	مستويات أنحدار المربعات الصغرى
Zero order correlation coefficients	معاملات الارتباط من الرتبة صفر
Coefficient of multiple correlation	معامل الارتباط المتعدد
Coefficient of multiple determination	معامل التحديد المتعدد
Coefficient of linear multiple correlattion	معامل الارتباط المتعدد الخطى
Hyper plane in four dimensional space	مستوى زائدى فى مجال ذو أبعاد أربعة
Least square regression equation	معادلة انحدار المربعات الصغرى
Coefficient of partial correlation	معامل الارتباط الجزئى

Chapter 16 — الفصل السادس عشر

Characteristic movements (variations)	التحركات المميزة
Forecasting	التنبؤ
Secular variation (trend)	الاتجاه العام
Cyclical variations	التغيرات الدورية
Seasonal variations	التغيرات الموسمية

English	العربية
Decomposition	تفكيك
Moving average of order N	وسط متحرك من الدرجة N
Moving total of order N	مجاميع متحركة من الدرجة N
N year moving average	N سنة وسط متحرك
N month moving average	N شهر وسط متحرك
Smoothing of time series	تمهيد السلاسل الزمنية
Weighted moving average of order N	وسط متحرك مرجح من الدرجة N
Seasonal index	الدليل الموسمى
Centred 12 month moving average	١٢ شهر متوسط متحرك مركزى
Link relatives	الوصلات النسبية
Cyclical indexes	الأدلة الدورية
Long range forecasting	التنبؤ طويل المدى
Short range forecasting	التنبؤ قصير المدى
Chain relatives	سلسلة المناسيب

Chapter 17 — الفصل السابع عشر

English	العربية
Cost of living index	الرقم القياسى لتكاليف المعيشة
Consumer price index	الرقم القياسى للمستهلك
Price relative	منسوب السعر
Quantity relatives	مناسيب الكمية
Volume relatives	مناسيب الحجم
Factor reversal property (test)	خاصية اختبار الانعكاس فى المعامل
Time reversal test	اختبار الانعكاس فى الزمن
Weighted average of relatives	الوسط المرجح للمناسيب
Laspeyres volume index	رقم لاسبيرز القياسى للحجوم
Paasche volume index	رقم باشى القياسى للحجوم
Value indexes	الأرقام القياسية للقيمة
Simple aggregate index	رقم قياى تجميعى بسيط
Circular test	إختبار الدائرية
Real incomes	الدخول الحقيقية
Purchasing powers	القوى الشرائية
Apparent or physical incomes	الدخل الظاهرى أو المادى
Cost of living	تكلفة المعيشة
Consumer index numbers	الأرقام القياسية للمستهلك
Deflating (a time series)	أنقاص (سلسلة زمنية)
Deseasonalize data	بيانات مخلصة من أثر الموسم
Seasonal index numbers	الأرقام القياسية الموسمية

Changing the base period	تغير فترة الأساس
Shifting the base	إزاحة الأساس
Cost per employee index number	الرقم القياسي لتكلفة العامل
Law of sypply and demand	قانون العرض والطلب
Overestimate	المغالاة فى التقدير
Under estimate	التقليل فى التقدير